ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ: μια σύνοψη των θεμελιακών χαρακτηριστικών.

1. ΣΥΝΟΛΑ: το σκεπτικό.

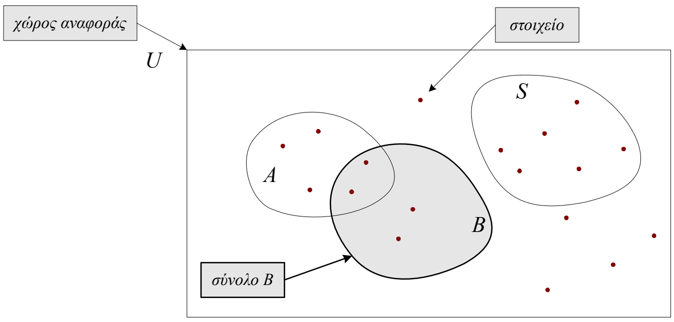
- ***σύνολο*** = πολλά ***στοιχεία*** ως «ένα», ως «μία» ολότητα.
- τα στοιχεία ***ανήκουν*** στο σύνολο, ή είναι ***μέλη*** του συνόλου· το σύνολο ***περιέχει*** τα στοιχεία του.
- τα στοιχεία της ολότητας έχουν μια κάποια κοινή ιδιότητα Ι, και το σύνολο προκύπτει επειδή από κάποιο ***χώρο αναφοράς*** U, αποσπούμε το σύνολο S όσων στοιχείων του U έχουν την ιδιότητα Ι.

2. ΣΥΝΟΛΑ: γραφή και ανάγνωση.

- ως «νόημα»: γράφουμε ως $\{ x: I(x) \}$ ως το σύνολο των x που έχουν την ιδιότητα Ι(-).
- ως «αναφορά»: γράφουμε ως $\{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_N \}$ το σύνολο με τα ίδια τα στοιχεία σ_κ, $1 \le \kappa \le N$.
- γράφουμε $\sigma \in A$, όταν και μόνον το στοιχείο σ είναι ένα εκ των στοιχείων-μελών του Α.
- γράφουμε $\sigma \notin A$, για το «σ δεν ανήκει στο Α».
- ΠΡΟΣΟΧΗ:
  - είναι δυνατόν να έχουμε σύνολα «μέσα» σε σύνολα: $\{ \alpha, \{ \alpha, \beta, \{ \gamma, \alpha \} \}, \{ \beta \}, \gamma \}$.
  - η σειρά δεν παίζει ρόλο: $\{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \} = \{ \beta, \alpha, \delta, \gamma \}$.
  - η επανάληψη δεν παίζει ρόλο: $\{ \alpha, \beta, \beta, \gamma \} = \{ \alpha, \beta, \gamma \} = \{ \alpha, \alpha, \gamma, \beta, \beta \}$.
  - ίσως να μην έχουμε κανένα στοιχείο: $\{ \}$ (το «κενό» σύνολο, με σύμβολο: $\varnothing$).
  - το στοιχείο x και το «μονοσύνολο» $\{ x \}$ δεν είναι το ίδιο πράγμα: $x \neq \{ x \}$. (Στη «καθαρή» θεωρία συνόλων αυτό δεν ισχύει *ποτέ*, διότι αν $\sigma = \{ \sigma \}$ τότε $\sigma \in \sigma$, και το σύνολο είναι «ανώμαλο», κάτι που η standard θεωρία συνόλων το εξαιρεί αξιωματικά. Σε μια τέτοια περίπτωση το σ θα είχε την μορφή $\sigma = \{ \sigma \} = \{ \{ \sigma \} \} = \{ \{ \{ \sigma \} \} \}$ χωρίς οι αγκύλες να μπορούσαν να εξαντληθούν...)

3. ΣΥΝΟΛΑ: σχεδίαση (διαγράμματα τύπου *Euler-Venn*)

- για κάθε στοιχείο σ και σύνολο Α, το σ είναι είτε «εντός» του Α, είτε «εκτός» του Α. Γι' αυτό μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα σύνολο ως μια κλειστή γραμμή, και τα στοιχεία του Α να είναι τα στοιχεία «εντός» αυτής της γραμμής και μόνον.
- συνήθως σχεδιάζουμε τον χώρο αναφοράς U ως ένα ορθογωνικό πλαίσιο που περιβάλλει τα σύνολα που έχουμε εξάγει από αυτόν.
- σε πεπερασμένους χώρους αναφοράς αναπαριστούμε τα στοιχεία ως «σημεία», (αν και συχνά για λόγους οικονομίας παραλείπουμε αυτή τη σχεδίαση).



4. ΣΥΝΟΛΑ: θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ συνόλων.

- «ανήκειν»: $\sigma \in S$.
  - στη θεωρία συνόλων όλα τα στοιχεία είναι επίσης σύνολα, άρα η σχέση του «ανήκειν» είναι μια σχέση μεταξύ δύο συνόλων.
  - ΠΡΟΣΟΧΗ: $(\sigma \in S) \Leftrightarrow (\{ \sigma \} \subseteq S)$.

- «ισότητα»: $A = B$.
  - έχουν τα «ίδια» στοιχεία με το εξής πολύ συγκεκριμένο τρόπο:

$$(A = B) \equiv \forall x ((x \in A) \leftrightarrow (x \in B))$$

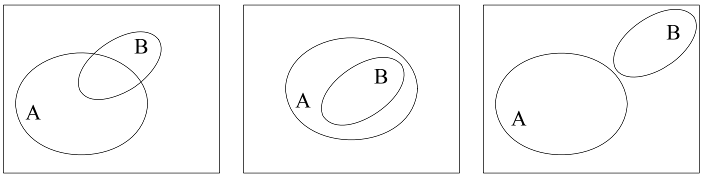
- «υποσύνολο»: $A \subseteq B$.
  - όλα τα στοιχεία του Α είναι και στοιχεία του Β:

$$(A = B) \equiv \forall x ((x \in A) \rightarrow (x \in B))$$

  - $\models (A=B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$, δηλαδή η σχέση «υποσύνολο» είναι «αντι-συμμετρική», δεν ισχύει και προς τις δύο κατευθύνσεις παρά μόνον εάν τα δύο σύνολα είναι ίσα.

- $\vDash (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq \Gamma) \Rightarrow (A \subseteq \Gamma)$, δηλαδή η σχέση «υποσύνολο» είναι «μεταβατική».

- «*ξένα*»: δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.



γενική θέση — *Β υποσύνολο Α* — *Α, Β ξένα μεταξύ τους*

5. ΣΥΝΟΛΑ: το κενό σύνολο – προσοχή στις ιδιότητές του.

- *υπάρχει*: το κενό σύνολο αντιστοιχεί στην «αδύνατη» ιδιότητα, και επί οποιουδήποτε χώρου αναφοράς υπάρχει μία τουλάχιστον «αδύνατη» ιδιότητα, δηλαδή μια ιδιότητα που κανένα στοιχείο δεν μπορεί να την έχει. Αυτή είναι λ.χ. η ιδιότητα: $I(\sigma) \equiv$ **$(\sigma \neq \sigma)$**.
- *είναι υποσύνολο κάθε συνόλου*: $\forall S\ (\varnothing \subseteq S)$, δηλαδή το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. (Και πράγματι: είναι δυνατόν να υπάρξει έστω ένα στοιχείο που να ανήκει στο $\varnothing$, αλλά να *μήν* ανήκει στο S;). ΠΡΟΣΟΧΗ: το κενό σύνολο είναι *υποσύνολο* του S, *όχι στοιχείο* του S.
- *είναι ένα και μοναδικό*: έστω ότι ΚΕΝΟ(x) είναι αληθες εάν και μόνον εάν το x δεν περιέχει κανένα στοιχείο: $\text{ΚΕΝΟ}(x) \equiv \forall\sigma\ (\sigma \notin x)$. Τότε:

$$\vDash \forall x\ \forall y\ ((\text{ΚΕΝΟ}(x) \wedge \text{ΚΕΝΟ}(y)) \rightarrow (x = y))$$

γι' αυτό και δικαιολογούμαστε να χρησιμοποιήσουμε *ένα* σύμβολο για αυτό, (το: $\varnothing$).
- *ένα μόνον κενό σύνολο (?)*: αν από «πρόσωπα» ξεωρίσουμε ένα κενό σύνολο, και από «αριθμούς» ξεχωρίσουμε ένα κενό σύνολο, τότε πώς ένα σύνολο προσώπων ισούται με ένα σύνολο αριθμών; Το παράδοξο είναι φαινομενικό διότι στην ισότητα των συνόλων *δεν εξετάζουμε την ερμηνεία που τους δίνουμε*, αλλά μόνον το ποιά στοιχεία περιέχουν. Και δύο κενά σύνολα περιέχουν τα «ίδια» στοιχεία: κανένα.

6. ΣΥΝΟΛΑ: πράξεις επί ενός ή δύο συνόλων (μονομελείς / διμελείς).

- *πράξεις κατασκευής*: στα σύνολα – όπως και σε όλων των ειδών τα «αντικείμενα» από ήδη υπάρχοντα μπορούμε με «πράξεις» να κατασκευάσουμε νέα. Μας ενδιαφέρουν δύο είδη πράξεων: μονομελείς και διμελείς, δηλαδή με μία ή δύο παραμέτρους. (Πράξεις με μηδέν παραμέτρους δίνουν πάντα το ίδιο αποτέλεσμα, αντιστοιχούν λοιπόν σε *σταθερές*. Στα σύνολα η βασική σταθερά είναι το $\varnothing$ (το *κενό*).)

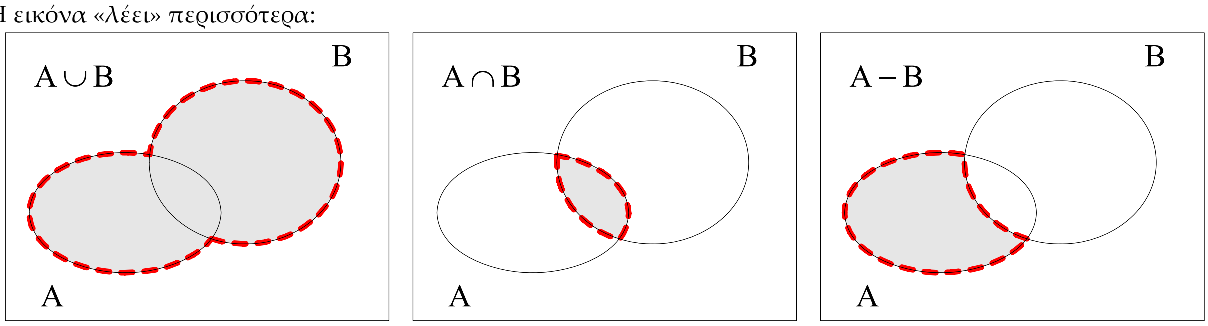
- *μονομελείς*: η κύρια μονομελής πράξη είναι η «κατασκευή» από ένα σύνολο S του συνόλου που περιέχει ***όλα*** τα υποσύνολα του S – που συμβολίζεται με $\wp[S]$, και ονομάζεται ***δυναμοσύνολο*** του S:

$$\wp[S] = \{ s:\ \ s \subseteq S \}$$

Π.χ. $\wp[\{\alpha,\beta,\gamma\}] = \{ \varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\beta,\gamma\}, \{\gamma,\alpha\}, \{\alpha,\beta,\gamma\} \}$

- *διμελείς*: τέσσερεις διμελείς πράξεις είναι οι πιο συχνές στη χρήση:
  - *ένωση*: από τα σύνολα Α και Β «κατασκευάζουμε» το $A \cup B = \{ \sigma:\ \ (\sigma \in A) \vee (\sigma \in B) \}$.
  - *τομή*: από τα σύνολα Α και Β «κατασκευάζουμε» το $A \cap B = \{ \sigma:\ \ (\sigma \in A) \wedge (\sigma \in B) \}$.
  - *διαφορά*: από τα σύνολα Α και Β «κατασκευάζουμε» το $A - B = \{ \sigma:\ \ (\sigma \in A) \wedge (\sigma \notin B) \}$.
  - *(καρτεσιανό) γινόμενο*: $A \times B = \{ \sigma:$ *(δίδεται στην ενότητα #7.)* $\}$.

Η εικόνα «λέει» περισσότερα:



- *προτασιακός λογισμός και πράξεις συνόλων*: αν τα σύνολα Α και Β προσδιορίζονται από τις ιδιότητας I_A και I_B, τότε οι παραπάνω πράξεις αναπαριστούν λογικές πράξεις επί των ιδιοτήτων:
  - *ένωση*: αναπαριστά την λογική διάζευξη $I_A \vee I_B$
  - *τομή*: αναπαριστά την λογική σύζευξη $I_A \wedge I_B$
  - *διαφορά*: περιέχει την άρνηση της I_B $I_A \wedge \neg I_B$

7. ΣΥΝΟΛΑ: διατεταγμένα ζεύγη και το (καρτεσιανό) γινόμενο συνόλων.

- Μας ενδιαφέρει να παραστήσουμε την *διάταξη δύο στοιχείων* μέσω της θεωρίας συνόλων – να μπορούμε να πούμε δηλαδή ότι από δύο στοιχεία α και β το α είναι το «1ο» και το β είναι το «2ο». Αυτό είναι ηλίου φαεινότερον στη *γραφή*, π.χ. μπορούμε να γράψουμε $\langle \alpha, \beta \rangle$ (οπότε το α γράφεται ως πρώτο), αλλά θέλουμε αυτό να αποτυπώνεται στο *νόημα*. Και κάτι τέτοιο δεν επιτυγχάνεται λ.χ. ερμηνεύοντας το $\langle \alpha, \beta \rangle$ ως το ***απλό*** *ζεύγος* $\{ \alpha, \beta \}$, διότι – όπως έχουμε ήδη διευκρινίσει – η σειρά δεν παίζει ρόλο στα σύνολα: $\{ \alpha, \beta \} = \{ \beta, \alpha\}$.
- Το «τέχνασμα» (του *Kuratowksi* – δείτε *wikipedia* για το ποιός ήταν) που αποδίδει (ανάμεσα και σε άλλα) είναι να ορίσουμε ως ***διατεταγμένο*** *ζεύγος* $\langle \alpha, \beta \rangle$ το εξής:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \equiv \{ \{ \alpha \}, \{ \alpha, \beta \} \}$$

Η παρακάτω σειρά συλλογισμών, (ιδιαίτερα μακρά για 3-4 στοιχεία!), αποδεικνύει ότι:

$$\vDash \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \kappa, \lambda \rangle \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha = \kappa) \text{ και } (\beta = \lambda)$$

«Ευθύ»: $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \kappa, \lambda \rangle \ \Rightarrow \ (\alpha = \kappa)$ και $(\beta = \lambda)$

- $\vDash$ δεν μπορεί ένα μονοσύνολο $\{ \sigma \}$ να ισούται με ένα δισύνολο $\{ \kappa, \lambda \}$ $(\kappa \neq \lambda)$:

  διότι θα έπρεπε $\kappa \in \{ \sigma \}$, άρα $\kappa = \sigma$, και $\lambda \in \{ \sigma \}$ άρα $\lambda = \sigma$, δηλαδή $\kappa = \sigma = \lambda$, ενώ έχουμε υποθέσει ότι $\kappa \neq \lambda$. (Προσέξτε ότι δεν χρησιμοποιούμε «αριθμούς», αλλά μόνον λόγια περί «συνόλων»!)
- $\vDash$ αν $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \kappa, \lambda \rangle$ τότε είτε $(\alpha = \beta)$ και $(\kappa = \lambda)$, είτε $(\alpha \neq \beta)$ και $(\kappa \neq \lambda)$, δηλαδή τα $\{\alpha, \beta\}$ και $\{\kappa, \lambda\}$ θα ήσαν είτε και τα δύο μονοσύνολα, είτε και τα δύο δισύνολα:

  διότι αν ίσχυε $(\alpha = \beta)$ αλλά $(\kappa \neq \lambda)$ θα είχαμε την εξής αντίφαση:
  το μέν 1ο ζεύγος θα ήταν μονοσύνολο, αφού:
  $$\langle \alpha, \beta \rangle = \{ \{\alpha\}, \{\alpha, \beta\} \} = \{ \{\alpha\}, \{\alpha, \alpha\} \} = \{ \{\alpha\}, \{\alpha\} \} = \{ \{\alpha\} \}$$
  το δε 2ο ζεύγος θα ήταν δισύνολο, αφού $\langle \kappa, \lambda \rangle = \{ \{ \kappa \}, \{ \kappa, \lambda \} \}$ και το $\{ \kappa \}$ είναι διάφορο του $\{ \kappa, \lambda \}$, (το πρώτο είναι μονοσύνολο και το δεύτερο είναι δισύνολο διότι $(\kappa \neq \lambda)$).
- $\vDash$ αν $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \kappa, \lambda \rangle$ και είναι και τα δύο μονοσύνολα τότε $(\alpha = \kappa)$ και $(\beta = \lambda)$.

  διότι $\langle \alpha, \beta \rangle = \{\{\alpha\}\} = \{\{\kappa\}\} = \langle \kappa, \lambda \rangle$ και άρα $\alpha = \kappa$ · και παρομοίως, $\beta = \lambda$.
- $\vDash$ αν $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \kappa, \lambda \rangle$ και είναι και τα δύο δισύνολα τότε $(\alpha = \kappa)$ και $(\beta = \lambda)$.

  διότι $\langle \alpha, \beta \rangle = \{ \{ \alpha \}, \{ \alpha, \beta \} \}$ και $\langle \kappa, \lambda \rangle = \{ \{ \kappa \}, \{ \kappa, \lambda \} \}$, και το στοιχείο $\{ \alpha \}$ ανήκει στο $\{ \{ \kappa \}, \{ \kappa, \lambda \} \}$, άρα ισούται με το 1ο ή το 2ο στοιχείο. Δεν μπορεί όμως ένα μονοσύνολο να ισούται με το δισύνολο $\{ \kappa, \lambda \}$, άρα ισούται με το $\{ \kappa \}$, και άρα $\alpha = \kappa$. Ομοίως το δισύνολο $\{ \alpha, \beta \}$ δεν μπορεί να ισούται με το μονοσύνολο $\{ \kappa \}$, άρα $\{ \alpha, \beta \} = \{ \kappa, \lambda \} = \{ \alpha, \lambda \}$, και αφού $\beta \neq \alpha$, πρέπει να ισχύει $\beta = \lambda$.

«Αντίστροφο»: $(\alpha = \kappa)$ και $(\beta = \lambda) \Rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \kappa, \lambda \rangle$

(προφανές)

- Έχοντας στην διάθεσή μας το εργαλείο των «διατεταγμένων» ζευγών, μπορούμε να ορίσουμε μία από τις πιο σημαντικές κατασκευές στη θεωρία συνόλων – το ***καρτεσιανό γινόμενο***:

$$A \times B = \{ \sigma : \sigma = \langle \alpha, \beta \rangle, \alpha \in A \text{ και } \beta \in B \}$$

δηλαδή το σύνολο όλων και μόνον των διατεταγμένων ζευγών, το 1ο μέλος των οποίων είναι από το σύνολο Α και το 2ο από το σύνολο Β.
- *Το «νόημα» του καρτεσιανού γινομένου*: Μετά τα σύνολα που αναπαριστούν ιδιότητες στοιχείων, θέλουμε ένα τρόπο για να παραστήσουσε τις ***σχέσεις*** που έχουν τα διάφορα στοιχεία μεταξύ τους. Η σχέση του στοιχείου ‘α’ με το στοιχείο ‘β’ – με όποιο τρόπο και εάν ορίζεται ή δημιουργείται ή ερμηνεύεται – καταλήγει να «γράφεται» με έναν απλό τρόπο: ως το διατεταγμένο ζεύγος **⟨α, β⟩**. Π.χ. η σχέση «*x γονέας-του y*» περιέχει ζεύγη της μορφής ⟨*Παρασκευάς, Κυριακή*⟩, όπου το 1ο μέλος δηλώνει τον γονέα (εδώ έναν πατέρα), και το 2ο μέλος δηλώνει το τέκνο (εδώ μια κόρη). Αν πρόκειται να συσχετίσουμε στοιχεία από δύο σύνολα Α και Β, το γινόμενο $A \times B$ απλά περιέχει όλες ακριβώς τις δυνατές συσχετίσεις που θα μπορούσαν να συμβούν.

8. ΣΥΝΟΛΑ: οι ιδιότητες των πράξεων – και ο τρόπος ανάλυσης.

- Οι διμελείς πράξεις έχουν μια σειρά από ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν.
- ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ. Λ.χ. για κάθε X, Y: $X \cap \Upsilon = \Upsilon \cap X$ η σειρά των Χ, Υ μπορεί να αλλάξει.
- ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ. Λ.χ. για κάθε X, Y, Z : $X \cup (\Upsilon \cup Z) = (X \cup \Upsilon) \cup Z$ η σειρά των παρενθέσεων αλλάζει.
- ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ. Λ.χ. για κάθε X, Y, Z: $X \cap (\Upsilon \cup Z) = (X \cap \Upsilon) \cup (X \cap Z)$ η πράξη «επιμερίζεται» επί της άλλης.

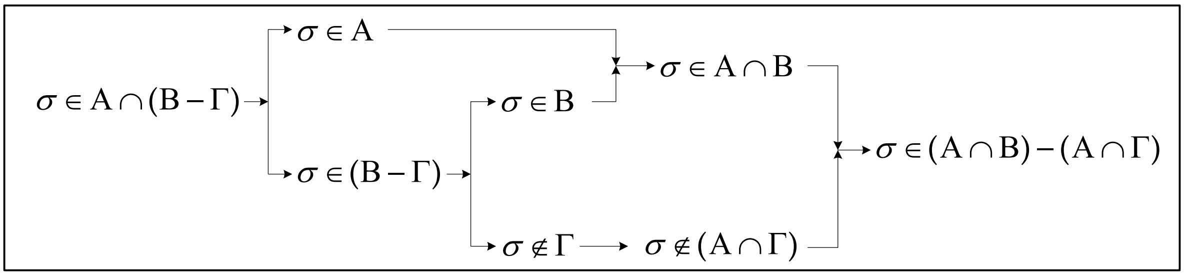
Δίνουμε δύο πίνακες για το ποιές ιδιότητες ισχύουν στα σύνολα. Ότι γράφεται ισχύει, εκτός εάν αναγράφεται το αντίθετο. Διαβάστε τα περιεχόμενα ένα-προς-ένα, και σχεδιάστε το.

ιδιότητα:	**ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ**	**ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ**
$\cup$	$A \cup B = B \cup A$	$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$
$\cap$	$A \cap B = B \cap A$	$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$
$-$	$A - B = B - A$ μόνον αν A=B	$A - (B - \Gamma) =? (A - (B - \Gamma)$ όχι πάντοτε
$\times$	$A \times B = B \times A$ μόνον αν A=B	$A \times (B \times \Gamma) \approx (A \times B) \times \Gamma$

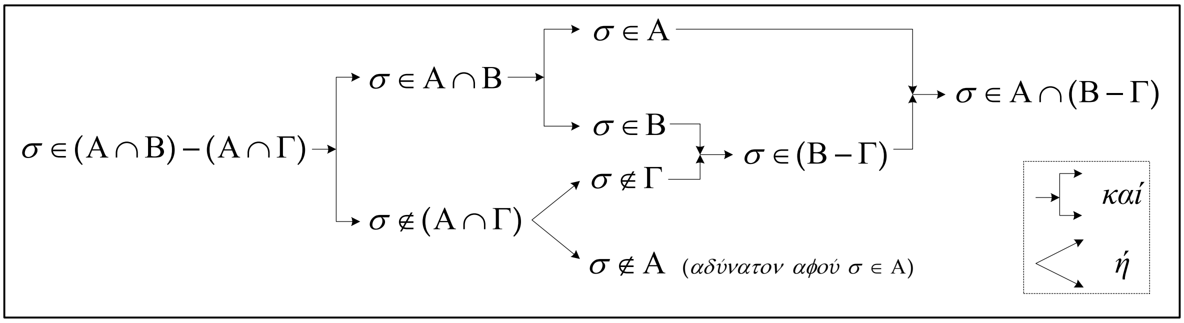
ΕΠΙΜΕΡΙΖΕΤΑΙ *επί*:	$\cup$	$\cap$	$-$	$\times$
$\cup$		$A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$	$A\cup(B-\Gamma) =? (A\cup B)-(A\cup\Gamma)$ *όχι* **(!)**	*χωρίς νόημα*
$\cap$	$A\cap(B\cup\Gamma) = (A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$		$A\cap(B-\Gamma) = (A\cap B)-(A\cap\Gamma)$ *ναί* **(!)**	*χωρίς νόημα*
$-$	$A-(B\cup\Gamma) = (A-B)\cap(A-\Gamma)$ *De Morgan* (!)	$A-(B\cap\Gamma) = (A-B)\cup(A-\Gamma)$ *De Morgan* (!)		*χωρίς νόημα*
$\times$	$A\times(B\cup\Gamma) = (A\times B)\cup(A\times\Gamma)$	$A\times(B\cap\Gamma) = (A\times B)\cap(A\times\Gamma)$	$A\times(B-\Gamma) = (A\times B)-(A\times\Gamma)$	

- ΠΡΟΣΟΧΗ:
  - Η σχέση $A \times (B \times \Gamma) \approx (A \times B) \times \Gamma$ δεν ισχύει επακριβώς διότι τα στοιχεία του 1ου μέλους είναι της μορφής $\langle\alpha, \langle\beta, \gamma\rangle\rangle$ ενώ του 2ου είναι $\langle\langle\alpha, \beta\rangle, \gamma\rangle$. Αντί για ισότητα έχουμε ένα είδος ισοδυναμίας, διότι και τα δύο σύνολα περιέχουν (τις ίδιες) διατεταγμένες τριάδες στοιχείων $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$
  - Όταν έχουμε επιμερισμό της διαφοράς '–' η ένωση γίνεται τομή και η τομή γίνεται ένωση, (σχέσεις *De Morgan*).
  - Ακόμα και εάν από κάποιο σχήμα για τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι η ισότητα *ισχύει*, η ***αποδεικτική ανάλυση*** ότι αυτό είναι πράγματι αλήθεια, γίνεται με τον πρωταρχικό κανόνα της «ισότητας»: δείχνουμε πως όποιο στοιχείο ανήκει στο 1ο μέλος ανήκει και στο 2ο, και όποιο ανήκει στο 2ο ανήκει και στο 1ο.

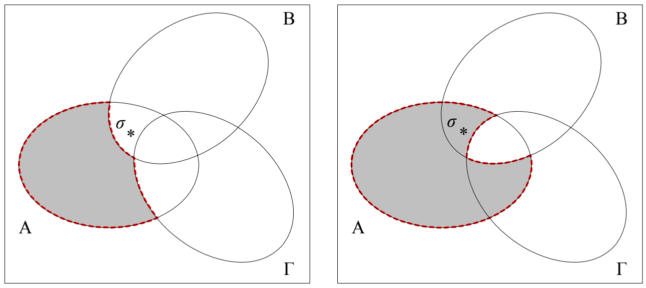
  Π.χ.: ισχύει πάντοτε η σχέση: $A\cap(B-\Gamma)=(A\cap B)-(A\cap\Gamma)$. Η απόδειξη έχει τα εξής δύο σκέλη:
  - $\sigma \in A\cap(B-\Gamma) \Rightarrow \sigma \in (A\cap B)-(A\cap\Gamma)$



  - $\sigma \in (A\cap B)-(A\cap\Gamma) \Rightarrow \sigma \in A\cap(B-\Gamma)$



- Εάν από κάποιο σχήμα για τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι η ισότητα *δεν ισχύει*, μπορούμε και πρέπει να πάρουμε ***αντιπαράδειγμα***, τοποθετώντας στις σχετικές περιοχές του σχήματος «κατοίκους». Θα μπορούσαμε να «κατοικήσουμε» όλες τις εμφανιζόμενες περιοχές-σύνολα, και με πολλά στοιχεία, αλλά οικονομικότερες λύσεις συχνά αρκούν. Π.χ. για την σχέση: $A - (B \cup \Gamma) \ =? \ (A - B) \cup (A - \Gamma)$,



$A - (B \cup \Gamma)$ $\qquad$ $(A - B) \cup (A - \Gamma)$

αρκεί ένας «κάτοικος» σ στο $(A \cap B) - \Gamma$ για να υλοποιήσει την ανισότητα, και να παραγάγει το αντιπαράδειγμα: $A = \{ \sigma \}$, $B = \{ \sigma \}$, $\Gamma = \{ \ \}$, όπου $A - (B \cup \Gamma) = \varnothing$ και $(A - B) \cup (A - \Gamma) = \{ \sigma \}$.

9. ΣΥΝΟΛΑ: οι συνολοπράξεις και η σχέση ορισμάτων και αποτελεσμάτων.

- Εξετάζουμε πώς οι πράξεις *μεταβάλλουν* τα σύνολα, δηλαδή τι σχέσεις υπάρχουν μεταξύ των ορισμάτων και των αποτελεσμάτων:
  - $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ — η ένωση «αυξάνει» τα σύνολα.
  - $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ — η τομή «μειώνει» τα σύνολα.
  - $S \in \wp[S]$ — το δυναμοσύνολο περιέχει το αφετηριακό σύνολο.
  - $A \cup A = A$ — η ένωση με το ίδιο το σύνολο δεν το μεταβάλλει.
  - $A \cup \varnothing = A$ — η ένωση με το κενό δεν μεταβάλλει το αφετηριακό σύνολο.
  - $A \cap A = A$ — η τομή με το ίδιο το σύνολο δεν το μεταβάλλει.
  - $A \cap \varnothing = \varnothing$ — η τομή με το κενό παράγει πάντοτε το κενό σύνολο.
  - $A - A = \varnothing$ — αφαιρώντας από σύνολο τον εαυτό του παράγεται το κενό.
  - $A - \varnothing = A$ — αφαιρώντας από το σύνολο το κενό, το σύνολο μένει αμετάβλητο,
  - $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$ — το γινόμενο με κενό δίδει κενό σύνολο,

- Έχει επίσης ενδιαφέρον ποιές σχέσεις *διατηρούνται* (ή πώς μεταβάλλονται) από τις πράξεις – π.χ. :
  - αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup S \subseteq B \cup S$ — η ένωση διατηρεί τη σχέση υποσυνόλου.
  - αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap S \subseteq B \cap S$ — η τομή διατηρεί τη σχέση υποσυνόλου.
  - αν $A \subseteq B$ τότε $A \times S \subseteq B \times S$ — το γινόμενο διατηρεί τη σχέση υποσυνόλου.
  - αν $A \subseteq B$ τότε $A - S \subseteq B - S$ — η αφαίρεση του ιδίου συνόλου διατηρεί τη σχέση υποσυνόλου.
  - αν $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ τότε $S - \mathbf{B} \subseteq S - \mathbf{A}$ — ! η αφαίρεση από το ίδιο σύνολο αντιστρέφει τη σχέση υποσυνόλου.

10. ΣΥΝΟΛΑ: η γλώσσα των συνόλων και ο ρόλος της.

- Έχουμε λοιπόν συνθέσει μια γλώσσα για να «μιλάμε» (για την ακρίβεια: να *γράφουμε*) προτάσεις περί συνόλων. Τα γλωσσικά στοιχεία (πέραν των όποιων μεταβλητών: α, β, σ, S, A, B, x, y, z, κτλ) είναι τα εξής:
  - *από λογική*: $\forall, \exists$ — λογικοί ποσοδείκτες.
    $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ — λογικοί σύνδεσμοι.
    $=$ — σχέση της ισότητας.
  - *από σύνολα*: $\varnothing$ — η σταθερά «κενό σύνολο».
    $\in, \subseteq$ — σχέση ανήκειν και υποσυνόλου.
    $\wp[-]$ — δυναμοσύνολο.
    $\cup, \cap, -, \times$ — διμελείς πράξεις.

- Με αυτή την γλώσσα μπορούμε να γράψουμε τυπικές προτάσεις που να εκφράζουν ορισμούς και ιδιότητες επί των συνόλων. Ουσιαστικά όλα τα μαθηματικά που κάνουμε μπορούν να γραφούν σε αυτή τη γλώσσα. Π.χ. μπορείτε να διαβάσετε τις παρακάτω προτάσεις και να καταλάβετε το «νόημά» τους, (επί των συνόλων); Μας λένε συζευκτικά ότι το σύνολο F είναι μια «συνάρτηση» από το A στο B:

$F \subseteq A \times B$	Το F αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη του $A \times B$.
$\forall \alpha \ (\alpha \in A) \rightarrow \exists \beta ((\beta \in B) \wedge (\langle \alpha,\beta \rangle \in F))$	Κάθε στοιχείο του A απεικονίζεται σε ένα *τουλάχιστον*,
$\forall \alpha \forall \beta \forall \beta' \ (((\langle \alpha,\beta \rangle \in F) \wedge (\langle \alpha,\beta' \rangle \in F)) \rightarrow (\beta = \beta'))$	και ένα το *πολύ* στοιχείο του B (δηλαδή σε ένα ακριβώς).

▪ Το ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι το εξής απλό: «*και γιατί να το κάνουμε έτσι; - τα καθημερινά ελληνικά δεν αρκούν;*». Η απάντηση είναι ότι στα μαθηματικά (και όχι μόνον) τα όσα λέμε έχουν δύο όψεις:

- η μία είναι *συντακτική*, και αφορά στο τί γράφουμε – (ή σκεπτόμαστε, αλλά θα *μπορούσαμε* να γράψουμε, είναι δηλαδή «γραπτόν»), και,
- η άλλη είναι η *σημασιολογική*, και αφορά στο πώς ερμηνεύουμε ή φανταζόμαστε αυτό που γράφουμε.

Π.χ. μπορεί να γράφουμε $x = y$, αλλά πώς ερμηνεύουμε την ισότητα (ως ομοιότητα, λ.χ. ή ως απόλυτη ταυτότητα); Ή, όταν γράφουμε ($\alpha \in A$) πώς ερμηνεύουμε το σύμβολο '$\in$'; Και η ερμηνεία μας είναι η ίδια κάθε φορά ή σε ένα χρόνο από τώρα θα έχει μεταβληθεί; Και πώς την εξηγούμε σε κάποιον άλλον από εμάς; Αυτός ο άλλος το ερμηνεύει επίσης κατά τον ίδιο τρόπο με εμάς; Όλες αυτές οι «πολυσημίες» είναι εμπόδια και στη σαφήνεια, και στην επικοινωνία, και στην ορθότητα των συλλογισμών – ιδίως όταν συνοδεύουν οριακά ή και παράδοξα φαινόμενα. Η διέξοδος και λύση είναι…

- να χρησιμοποιήσουμε μια αυστηρή («τυπική») γλώσσα,
- να γράψουμε σε αυτήν τις πρωταρχικές υποθέσεις μας (τα «αξιώματα»),
- και να θέσουμε κανόνες συλλογιστικής («τυπική λογική»), δηλαδή εξαγωγής συμπερασμάτων από αυτά.

Π.χ. μπορούμε να θέσουμε τον κανόνα $\forall\alpha\forall\beta\forall\sigma(\ ((\alpha{=}\sigma) \wedge (\beta{=}\sigma)) \rightarrow (\alpha{=}\beta)\ )$ που λέει ότι «τα προς τρίτον ίσα είναι και μεταξύ τους ίσα». Με αυτό τον κανόνα από δύο ισότητες λ.χ. $\chi = 5$, $\psi = 5$, μπορούμε να συμπεράνουμε μηχανικά ή «συντακτικά» ότι $\chi = \psi$, [με την αντικατάσταση: $\alpha \leftarrow \chi$, $\beta \leftarrow \psi$, $\sigma \leftarrow 5$] χωρίς να ασχοληθούμε με το ποιά είναι η ερμηνεία που είτε εμείς είτε οποιοσδήποτε άλλος δίνει στο χ ή στο ψ, ακόμα και στο ίδιο το '5'. Έτσι η ανάγκη σαφήνειας και επικοινωνίας περιορίζεται στη συμφωνία πάνω σε απλά θεμελιακά στοιχεία – κάτι που είναι πολύ πιο εύκολο και ασφαλές· στη συνέχεια προχωράμε σε «αποδείξεις» δηλαδή σε εφαρμογή κοινώς παραδεκτών λογικών κανόνων.

▪ Δεδομένων δύο προτάσεων Φ και Ψ, αν οποτεδήποτε και οπουδήποτε αληθεύει η Φ, τυχαίνει να αληθεύει και Ψ, θα λέμε ότι η Ψ είναι *σημασιολογική συνέπεια* της Φ ($\Phi \vDash \Psi$). Και αν από την Φ μπορούμε με μηχανικούς γραπτούς κανόνες (συν τους πάγιους λογικούς κανόνες) να παραγάγουμε την Ψ τότε λέμε ότι η Ψ *παράγεται συντακτικά* (ή *αποδεικνύεται*) από την Φ, ή ($\Phi \vdash \Psi$). Στην καθημερινή πρακτική ανακαλούμε συνεχώς την «σημασία» των όσων λέμε, και σπάνια γράφουμε επακριβώς κάθε λεπτομέρεια, εργαζόμαστε δηλαδή κυρίως «σημασιολογικά». Εδώ έρχεται να φωτίσει την κατάσταση ένα βαρυσήμαντο θεώρημα του *Gödel* (βλ. *wikipedia*), από τις αρχές του 20ου αιώνα, το οποίο λέει το εξής:

«*εάν η Ψ είναι σημασιολογική συνέπεια της Φ, τότε η Ψ παράγεται συντακτικά από την Φ, (και αντιστρόφως)*»

ή συμβολικά:

«($\Phi \vDash \Psi$) ισοδυναμεί με ($\Phi \vdash \Psi$)»

Αυτό το θεώρημα μας λέει ότι *εάν κάνουμε σωστά* την *σημασιολογική* πλευρά, τότε τίποτε δεν αφαιρείται και τίποτε δεν προστίθεται στα όσα θα μπορούσαμε να αποδείξουμε με *συντακτικό*, δηλαδή με αδιάσειστο μηχανικό και γραπτό τρόπο. Εάν ο τρόπος που εκφραζόμαστε και γράφουμε είναι αρκετά αυστηρός ώστε τα όσα λέμε έστω και ***να μπορούσαν*** να γραφούν με την παραπάνω γλώσσα των συνόλων, τότε είναι πιο εύκολο να εξασφαλίσουμε την ορθή σημασιολογική συνέπεια ($\Phi \vDash \Psi$), και εξ αυτής να εξασφαλίζουμε την ύπαρξη και μιας *συντακτικής* (= *γραπτής*) *απόδειξης* από τα αξιώματά μας, να εξασφαλίσουμε δηλαδή την λογική παραγωγή ($\Phi \vdash \Psi$). Και αυτό είναι που θέλουμε και επιδιώκουμε διότι τέτοιες αποδείξεις αποτελούν το τελεσίδικο κριτήριο ορθότητας (εξ όσων διαθέτουμε), αλλά και το μοναδικό καταφύγιο σε περίπτωση περίπλοκων ή παράδοξων φαινομένων.

11. ΣΥΝΟΛΑ: τί σύνολα υπάρχουν;

▪ Τί υπάρχει αφετηριακά: Δύο σύνολα είναι οι αφετηρίες μας:

▪ το κενό σύνολο, που το έχουμε ήδη σχολιάσει,

$$\mathbf{KENO(x) \equiv \forall\sigma\ (\sigma \notin x)}, \qquad \mathbf{\exists s\ KENO(s)}$$

και το σπουδαιότερο (μετά από αυτό) σύνολο των μαθηματικών, οι φυσικοί αριθμοί:

▪ οι φυσικοί αριθμοί: αρχίζοντας από το κενό σύνολο (με «μηδέν» στοιχεία), $\mathbf{0} = \varnothing$, μπορούμε να φτιάξουμε το σύνολο $\mathbf{1} = \{ \varnothing \}$, με «ένα» στοιχείο. Από αυτά μπορούμε να φτιάξουμε ένα σύνολο με «δύο» στοιχεία, το $\mathbf{2} = \{\varnothing, \{ \varnothing \} \} = \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \}$, και να συνεχίσουμε έτσι «επ' άπειρον», θεωρώντας ότι ο «φυσικός αριθμός» $\mathbf{n}^+$ δεν είναι παρά το σύνολο των «προηγουμένων» του: $\mathbf{n}^+ = \{ \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n} \}$. (Ο *Frege* είχε χρησιμοποιήσει αυτή την ιδέα, θεμελιώνοντας την λογική και την αριθμητική(δείτε *wikipedia* για το ποιός ήταν).) Υπάρχει όμως το *σύνολο* όλων των φυσικών αριθμών; Αυτό το υποθέτουμε *αξιωματικά*· (χωρίς ένα τέτοιο σύνολο δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε πολλά διότι δεν θα είχαμε στη διάθεσή μας παρά μόνον πεπερασμένα σύνολα):

$$\mathbf{\exists S\ (\ (\varnothing \in S) \wedge \forall n\ (\ (n{\in}S) \rightarrow ((n^+){\in}S)\ )\ )}$$

Το μικρότερο σύνολο με την παραπάνω ιδιότητα **(…)**, το συμβολίζουμε με το γνωστό σύμβολο ℕ, και είναι οι φυσικοί αριθμοί, χάρις στους οποίους «μετράμε» (και κάνουμε «επαγωγικές» αποδείξεις).

- Τί σύνολα κατασκευάζονται (*αξιωματικά*) από ήδη υπάρχοντα σύνολα:
  - από δύο σύνολα A, B, το σύνολο-<u>ζεύγος</u> με αυτά ως στοιχεία: $A, B \to \{ A, B \}$
  - από ένα σύνολο S η <u>ένωση</u> των στοιχείων του: $S \longrightarrow \bigcup_{\sigma \in S} \sigma$
  - από ένα σύνολο S το <u>δυναμοσύνολο</u>: $S \to \wp[S]$
  - από ένα σύνολο S και μια ιδιότητα I το <u>εξειδικευμένο</u> σύνολο: $S, I(\text{-}) \to \{ \sigma : (\boldsymbol{\sigma \in S}) \text{ και } \mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma}) \}$

- Από τις παραπάνω κατασκευές (των οποίων το αποτέλεσμα ζητείται *αξιωματικά* να υπάρχει πάντοτε), είναι δυνατόν να εξασφαλίσουμε τις 4 συνήθεις διμελείς πράξεις: *ένωση*, *τομή*, *διαφορά*, *γινόμενο.* [1]
- Προσέξτε ότι ότι δεν ζητάμε να κατασκευάζουμε ένα σύνολο από μια οποιαδήποτε ιδιότητα I(-), παρά μόνον να αποσπούμε από ήδη υπάρχον σύνολο όσα στοιχεία έχουν την «συνολοποιό» ιδιότητα I(-). Ο λόγος εξηγείται παρακάτω και η ανακάλυψή του (από τον *Russel* ως σχόλιο στο έργο του *Frege*), ήταν μείζον μαθηματικό γεγονός στη στροφή του 19ου προς τον 20ο αιώνα.

- Το παράδοξο του *Russel* (δείτε *wikipedia* για το ποιός ήταν): δεν μπορούμε από οποιαδήποτε «ιδιότητα» (ή «έννοια») να σχηματίσουμε το σύνολο ακριβώς (δηλαδή: ***όλων και μόνον***) των στοιχείων που έχουν αυτή την ιδιότητα. Π.χ. έστω η ιδιότητα ή έννοια ΟΜΑΛΟ(x), που ισχύει εάν και μόνον εάν το σύνολο x *δεν* περιέχει τον εαυτό του, (κάτι που ούτως ή άλλως θα ήταν πολύ παράξενο):

$$\text{ΟΜΑΛΟ}(x) \equiv (x \notin x)$$

Αν από αυτή την ιδιότητα μπορούσαμε να φτιάξουμε το «*σύνολο S όλων και μόνον των ομαλών συνόλων*», δηλαδή το:

$$S \equiv \{ x : \text{ΟΜΑΛΟ}(x) \}$$

τότε θα καταλήγαμε στην εξής λογική αντίφαση:

- Ισχύει ΟΜΑΛΟ (S), είναι δηλαδή το S ομαλό; Μα τότε αφού το S έχει ως στοιχεία ***όλα*** τα ομαλά σύνολα θα έπρεπε να περιέχει και το ομαλό S, δηλαδή τον εαυτό του, δηλαδή $S \in S$, και το S θα ήταν ανώμαλο…
- Ισχύει ΟΧΙ-ΟΜΑΛΟ (S), είναι δηλαδή το S ανώμαλο; Μα τότε αφού $S \in S$, και αφού το S έχει ως στοιχεία ***μόνον*** ομαλά σύνολα θα έπρεπε να ισχύει ΟΜΑΛΟ (S)…

Δηλαδή ΟΜΑΛΟ (S) ⇒ ΟΧΙ-ΟΜΑΛΟ (S), *αλλά και* ΟΧΙ-ΟΜΑΛΟ (S) ⇒ ΟΜΑΛΟ (S), πράγμα αδύνατον, άρα το S δεν μπορεί να θεωρηθεί σύνολο… Γι’ αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε μια ιδιότητα I(-) για να κατασκευάσουμε ένα σύνολο S όχι μόνη της, αλλά «εξειδικεύοντας» με βάση αυτήν τα στοιχεία ενός ήδη υπάρχοντος συνόλου U.[2]

Έτσι με αφετηρία το κενό σύνολο, και (στη συνέχεια) το σύνολο των φυσικών αριθμών, και με πράξεις κατασκευής το ζευγάρωμα, την ένωση και το δυναμοσύνολο κατασκευάζουμε μια ιεραρχία συνόλων, τα οποία είναι δυνατόν να «εξειδικεύουμε» προς μικρότερα, μέσω μια οποιασδήποτε λογικής ιδιότητας I(-). Και με αυτά τα σύνολα μπορούμε να κάνουμε όλα τα «μαθηματικά» που χρειαζόμαστε. (Εμείς στην πληροφορική: καταμέτρηση, συνδυαστική, θεωρία υπολογισμού και πολυπλοκότητας, κτт).

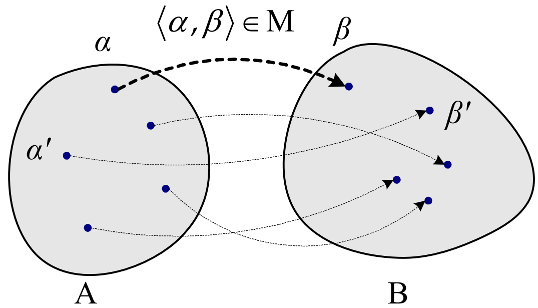
12. ΣΥΝΟΛΑ: δύο κατηγορίες συνόλων, πεπερασμένα και άπειρα – το τέχνασμα της διαγωνιοποίησης.

- Δύο είναι οι σπουδαίες κατηγορίες συνόλων, και στηρίζονται σε μια διάκριση που είναι βαθειά μέσα στον πυρήνα των μαθηματικών: τα ***πεπερασμένα*** και τα ***άπειρα*** σύνολα. Πώς τα διακρίνουμε; Δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε αριθμούς, διότι θέλουμε να οδηγηθούμε (όπως και συμβαίνει) *από τα σύνολα στους αριθμούς* και όχι ανάποδα. Η διάκριση γίνεται με βάση την παρατήρηση: δύο σύνολα μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν *ισάριθμα* στοιχεία, (ή, αλλιώς, ότι είναι ***ισοπληθή***) *χωρίς* να μετρήσουμε τα στοιχεία τους (!). Αρκεί να φέρουμε τα στοιχεία τους *σε ένα-προς-ένα αντιστοίχιση*:
- Δεδομένων δύο συνόλων, A και B, θα αποκαλούμε ***αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση*** ένα υποσύνολο M του γινομένου $A \times B$, τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του A ή του B να ανήκει σε ένα και μόνον ένα ζεύγος του M, δηλαδή:

[1] Τα αξιώματα που δίνουμε (συν 1-2 επιπλέον), οφείλονται στους Zermelo-Fraenkel, και αποτελούν την standard συνολοθεωρία.

[2] Έχει ενδιαφέρον ότι αυτή την προσεκτική στάση είχαν κρατήσει οι αρχαίοι – αν και όχι στα πλαίσια μιας θεωρίας συνόλων, αλλά σε φιλοσοφικό πλαίσιο: ο Αριστοτέλης έλεγε ότι από ένα «γένος» (το σύνολο U), συν ένα «ειδοποιό» χαρακτηριστικό (την ιδιότητα I(-)), ορίζεται ένα «είδος» (το σύνολο S). Λ.χ. από τα «ορθογώνια» συν το «ίσες πλευρές» λαμβάνουμε τα «τετράγωνα». Από αυτή την ιδέα έχουμε κρατήσει τις λέξεις «*ειδοποιός*» και «*εξ-ειδ-ίκευση*» (specification).

$\forall\alpha\ (\alpha\in A) \to \exists\beta(\ (\beta\in B) \wedge (\langle\alpha, \beta\rangle\in M)\ )$	κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται με ένα του B
$\forall\beta\ (\beta\in B) \to \exists\alpha(\ (\alpha\in A) \wedge (\langle\alpha, \beta\rangle\in M)\ )$	κάθε στοιχείο του B αντιστοιχίζεται με ένα του A
$\forall\alpha\forall\beta\forall\alpha'\forall\beta'\ (\ (\ (\langle\alpha,\beta\rangle\in M)\wedge(\langle\alpha', \beta'\rangle\in M)\wedge(\alpha\neq\alpha')\ )\to(\beta\neq\beta')\ ),$	
$\forall\alpha\forall\beta\forall\alpha'\forall\beta'\ (\ (\ (\langle\alpha,\beta\rangle\in M)\wedge(\langle\alpha', \beta'\rangle\in M))\wedge(\beta\neq\beta')\ )\to(\alpha\neq\alpha')\ )$	δύο ζεύγη αντιστοίχισης δεν έχουν κοινό στοιχείο



Αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση του A στο B θα γράφουμε ότι: **A ≈ B** ή |**A**|=|**B**|, και θα λέμε ότι το A είναι ***ισοπληθές*** με το B. Αν το A είναι ισοπληθές με ένα <u>*υποσύνολο*</u> του B, αλλά <u>*όχι*</u> με το ίδιο το B, τότε θα γράφουμε |A| < |B|. (Και βοηθητικά, |A| > |B| εάν και μόνον εάν |B| < |A|).

- Η εξής παρατήρηση διακρίνει τα πεπερασμένα από τα άπειρα σύνολα:
  - Η αρχή του περιστερώνα (του *Dirichlet*, δείτε *wikipedia*): υπάρχουν σύνολα A από τα οποία εάν αφαιρέσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο τους σ, το αποτέλεσμα είναι πληθικά μικρότερο: |A| < |A–{σ}| για σ ∈ A, δηλαδή δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση |A| ↔ |A–{σ}|. Αυτά είναι όλα και μόνον τα «πεπερασμένα», και αυτό ακριβώς λέει η *αρχή του περιστερώνα*:

    ⊨ *«Όπως και αν θέσουμε n περιστέρια σε n′ < n < ∞ φωλιές, κάπου θα έχουμε μια διπλοθεσία.»*

    (δηλαδή: δεν υπάρχει ούτε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση από n σε n′ < n όταν n < ∞ .)
  - Το άπειρο ξενοδοχείο (του *Hilbert*, δείτε *wikipedia*): Υπάρχουν όμως σύνολα από τα οποία ακόμα και εάν αφαιρέσουμε ένα οποιαδήποτε στοιχείο, το αποτέλεσμα παραμένει ισοπληθές με το αρχικό (!), δηλαδή: |A| = |A–{σ}|, για σ ∈ A. Αυτά είναι όλα και μόνον τα «άπειρα». Π.χ. φανταστείτε ένα ιδεατό ξενοδοχείο με δωμάτια αριθμημένα με τους φυσικούς αριθμούς ως 0, 1, 2, 3, κοκ , το οποίο είναι πλήρες, με έναν ένοικο σε κάθε δωμάτιο. Στο δωμάτιο υπ. αρ. δ συμβαίνει μια βλάβη και ο ένοικός του πρέπει να εξυπηρετηθεί, (χωρίς να δώσουμε σε δύο ενοίκους το ίδιο δωμάτιο). Μπορεί να γίνει αυτό; Ναί... Ζητάμε από τους ενοίκους των δωματίων κ = (δ+1), (δ+2), και εφεξής, να μετακινηθούν από το δωμάτιό τους κ, στο επόμενο (κ+1), και δίνουμε στον ένοικο του δωματίου δ το υπ. αρ. (δ+1) δωμάτιο. Με αυτόν τον τρόπο χωρέσαμε ℕ ενοίκους σε ℕ – {δ} δωμάτια, από έναν στο καθένα!
- Το λήμμα του δυναμοσυνόλου και η τεχνική της διαγωνιοποίησης (του *Cantor*, δείτε *wikipedia*): Το ξενοδοχείο του *Hilbert* μοιάζει με παιδικό ανέκδοτο σε παράθεση με την εξής διαπίστωση (που μπορεί να τρελλάνει κόσμο, και κατά εποχές το έκανε κιόλας). Είναι προφανές ότι για ένα πεπερασμένο σύνολο S, το δυναμοσύνολο $\wp[S]$ περιέχει περισσότερα στοιχεία (αφού περιέχει το { σ } για κάθε σ ∈ S, και εκτός αυτών περιέχει το ∅, και ίσως και άλλα). Αλλά για απειροπληθή σύνολα αυτό θα μπορούσε να μην ισχύει· ίσως και να «πρέπει» να μην ισχύει αφού το S και το $\wp[S]$, ως άπειρα και τα δύο, θα έπρεπε να είναι «ισοπληθή». Και όμως ισχύει:

  ⊨ *«Για κάθε σύνολο S (πεπερασμένο ή άπειρο) ισχύει ότι* |S| < $\wp[S]$ *(Cantor)»*

Το λήμμα αυτό, και ο τρόπος απόδειξής του, σημάδεψαν τα μαθηματικά από τα τέλη του 19ου αιώνα, όλου του 20ου αιώνα, και εφεξής. Η τεχνική λέγεται «διαγωνιοποίηση» και φαίνεται στην εξής απόδειξή του:

• Προφανώς το S έρχεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία σ ↔ { σ }, με κάποιο υποσύνολο S′ του $\wp[S]$, αυτό που περιέχει όλα τα μονο-υπο-σύνολα { σ } για σ ∈ S. Άρα είτε |S| < |$\wp[S]$|, είτε |S| = |$\wp[S]$|.

• Το ζήτημα είναι να δείξουμε ότι *δεν* υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από S προς *όλο* το $\wp[S]$, δηλαδή |S| < $\wp[S]$. Προς τούτο θα δείξουμε πρώτα ότι για μια οποιαδήποτε αντιστοιχία $\sigma \to \Upsilon_\sigma \subseteq S$, μπορούμε να φτιάξουμε ένα υποσύνολο Δ *διαφορετικό από όλα* τα υποσύνολα της μορφής Υ_x, (για x ∈ S). Αυτό ισχύει διότι μπορούμε να κάνουμε το σύνολο Δ να διαφέρει από το Υ_σ *ως προς το σ*, για κάθε σ, (γι′ αυτό και η ονομασία «αντιδιαγώνιο»)· η εξής «κατασκευή» αρκεί:
Εξετάζουμε όλα τα στοιχεία σ ∈ S, και,
– αν ($\sigma \in \Upsilon_\sigma$) τότε δεν συμπεριλαμβάνουμε το σ στο Δ, δηλαδή (σ ∉ Δ), άρα $\Delta \neq \Upsilon_\sigma$ για αυτά τα σ.
– αν ($\sigma \notin \Upsilon_\sigma$) τότε συμπεριλαμβάνουμε το σ στο Δ, δηλαδή (σ ∈ Δ), άρα $\Delta \neq \Upsilon_\sigma$ και για αυτά τα σ.
Έχουμε ένα καλώς ορισμένο υποσύνολο Δ του S, (αφού για κάθε σ είναι ορισμένο το εάν (σ ∈ Δ) ή (σ ∉ Δ)), και αυτό το Δ διαφέρει από όλα τα υποσύνολα της μορφής Υ_x, διότι για κάθε σ έχουμε εξασφαλίσει $\Delta \neq \Upsilon_\sigma$.
Από τα παραπάνω έπεται ότι *δεν* υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από S προς *όλο* τα υποσύνολα $\wp[S]$. Διότι τότε το παραπάνω αντιδιαγώνιο υποσύνολο Δ διαφέροντας από όλα τα Υ_x θα διέφερε από *όλα*

τα υποσύνολα του S, πράγμα αδύνατον αφού είναι ένα από αυτά! Και αφού δεν υπάρχει τέτοια πλήρης αντιστοίχιση, ισχύει |S| < ℘[S]. Δείτε τα παραπάνω σχηματικά σε παράδειγμα με 6 στοιχεία:

S =	1	2	3	4	5	6
$Υ_1$ = { 1, 2 }	∈	∈				
$Υ_2$ = { 2, 4, 5 }		∈		∈	∈	
$Υ_3$ = { }						
$Υ_4$ = { 2, 4, 6 }		∈		∈		∈
$Υ_5$ = { 1, 3, 4 }	∈		∈	∈		
$Υ_6$ = { 1, 3, 5 }	∈		∈		∈	

S =	1	2	3	4	5	6	
			∈				
					∈		
						∈	
$Υ_?$			3 ✓		5 ✓	6 ✓	∈ Δ

«Αντιδιαγώνιο» σύνολο: Δ = { 3, 5, 6 }: διαφέρει από το $Υ_σ$ ως προς το στοιχείο σ, για σ ∈ { 1, 2, 3, … }.

- Οι διαβαθμίσεις του απείρου: Η «τρέλλα» της προηγούμενης διαπίστωσης είναι ότι τα υποσύνολα ενός απείρου συνόλου S είναι περισσότερα από τα στοιχεία του S, και τόσο πολύ ώστε να μην είναι δυνατόν να έλθουν σε ένα-προς-ένα αντιστοίχιση με αυτά: για κάθε άπειρο σύνολο, υπάρχει τουλάχιστον ένα ακόμα πολύ πιο… άπειρο.
  - ***αριθμήσιμα*** σύνολα: όσα σύνολα S είναι πεπερασμένα ή ισοπληθή με τους φυσικούς ℕ: |S| ≤ |ℕ|.
  - ***μη-αριθμήσιμα*** σύνολα: όσα σύνολα S είναι άπειρα μεν, αλλά και *μη-ισοπληθή* με το ℕ: |S| > |ℕ|.
  - οι ρητοί αριθμοί είναι αριθμήσιμοι, και οι πραγματικοί αριθμοί μή-αριθμήσιμοι.

13. ΣΥΝΟΛΑ: η (ανα)παράσταση συνόλων σε μια γλώσσα προγραμματισμού.

- Ως δομές δεδομένων που στηρίζουν, με ταχύ ή όχι τρόπο, τις πράξεις ανεύρεσης, συγχώνευσης, τομής κλπ.
- Ως πίνακες S[1..M] λογικών τιμών. Το υπ. αρ. κ στοιχείο ανήκει στο σύνολο εάν και μόνον S[κ] = ΑΛΗΘΕΣ.

Πρόσωπα:		
Αριστοτέλης	*Έλληνας*	384 – 322 π.Χ.
Euler, Leonhard	*Ελβετός*	1707 – 1783 μ.Χ.
Venn, John	*Βρεττανός*	1834 – 1923
Frege, Friedrich Ludwig Gottlob	*Γερμανός*	1848 – 1925
Cantor, George	*Γερμανός*	1845 – 1918
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune	*Γερμανός*	1805 – 1859
Russel, Bertrandl	*Βρεττανός*	1872 – 1970
Hilbert, David	*Γερμανός*	1862 – 1943
Zermelo, Ernst	*Γερμανός*	1871 – 1953
Fraenkel, Abraham	*Γερμανός-Εβραίος*	1891 – 1965
Kuratowski, Kazimierz	*Πολωνός*	1896 – 1980
Gödel, Kurt	*Αυστριακός*	1906 – 1978

⊢ ⊨