Ειδικά Θέματα Υπολογιστικής Όρασης & Γραφικής

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης & Αθανάσιος Τσακαλίδης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Υπολογιστική Όραση

Επεξεργασία Εικόνας

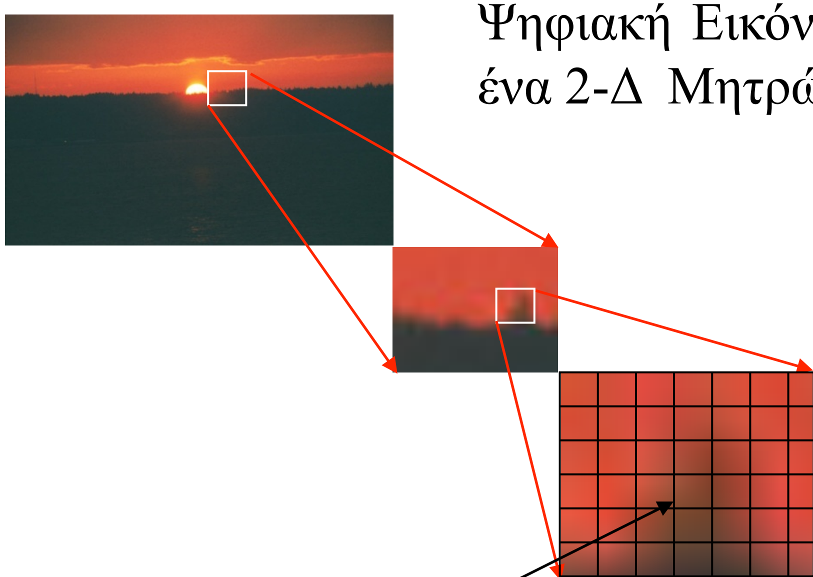
Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

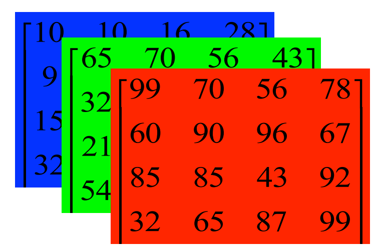
Υπολογιστική Όραση Επισκόπιση Μαθήματος

- Εικόνα
- Σκοπός της Επεξεργασίας Εικόνας
- 2-Δ Γραμμικά Συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Βασικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί
- Ένα Στοιχειώδες Πρόβλημα Αντιστοίχισης
- Πυραμίδες Εικόνων

Υπολογιστική Όραση: Ψηφιακή Εικόνα

Ψηφιακή Εικόνα = Ένα 2-Δ Μητρώο ή ένα 2-Δ Μητρώο διανυσμάτων.



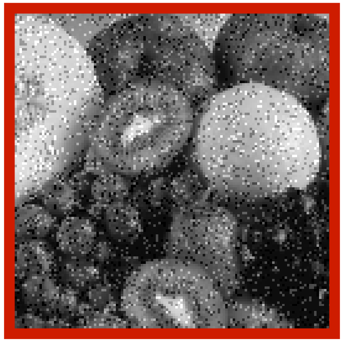


Κάθε στοιχείο της εικόνας ονομάζεται εικονοστοιχείο (pixel) και συναναστρέφεται με μία τιμή στην περίπτωση των εικόνων διαβαθμίσεων του γκρί, ή με ένα διάνυσμα 3x1 στις έγχρωμες εικόνες.

Υπολογιστική Όραση: Επεξεργασία Ψηφιακής Εικόνας

Μια Ψηφιακή Εικόνα μπορεί να είναι:

•Θορυβώδης

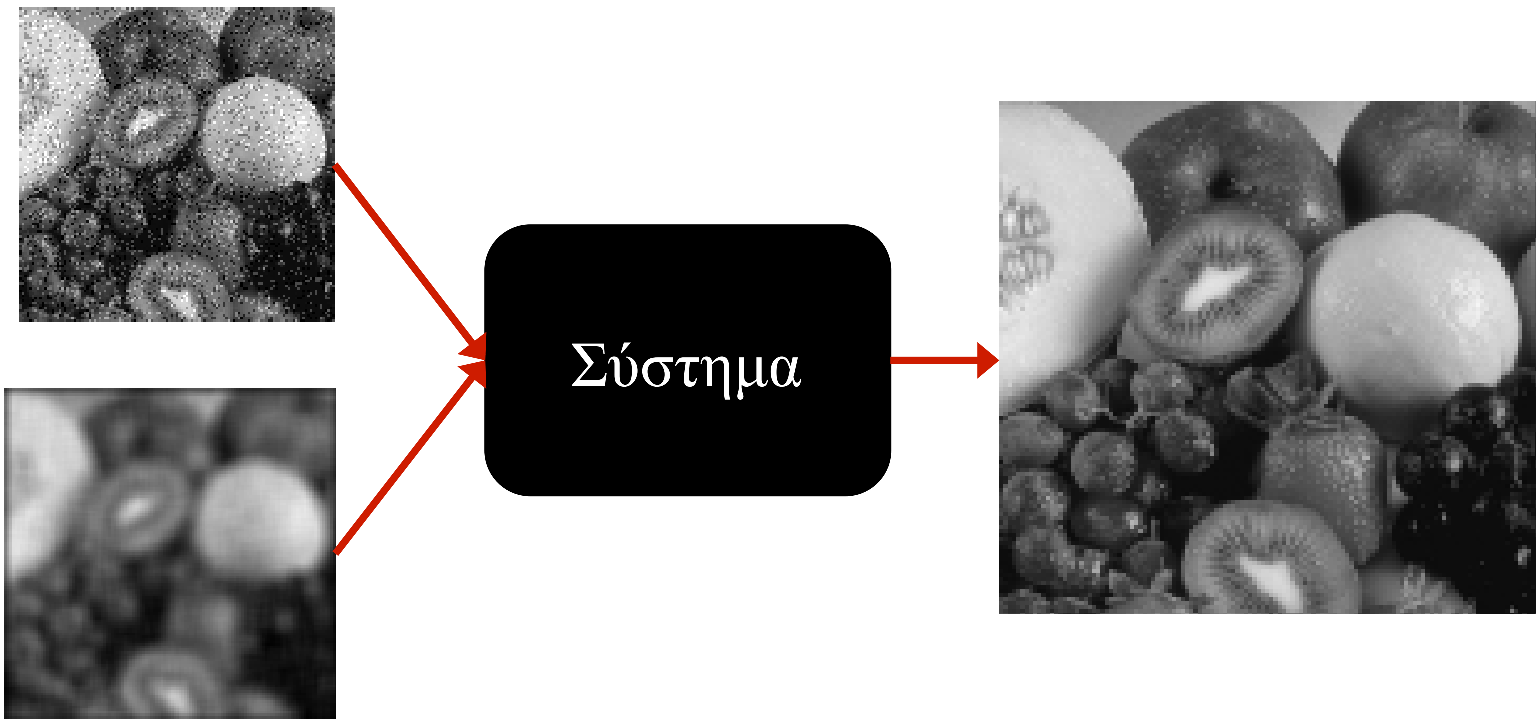


ή

•Θολή

Υπολογιστική Όραση: Επεξεργασία Ψηφιακής Εικόνας

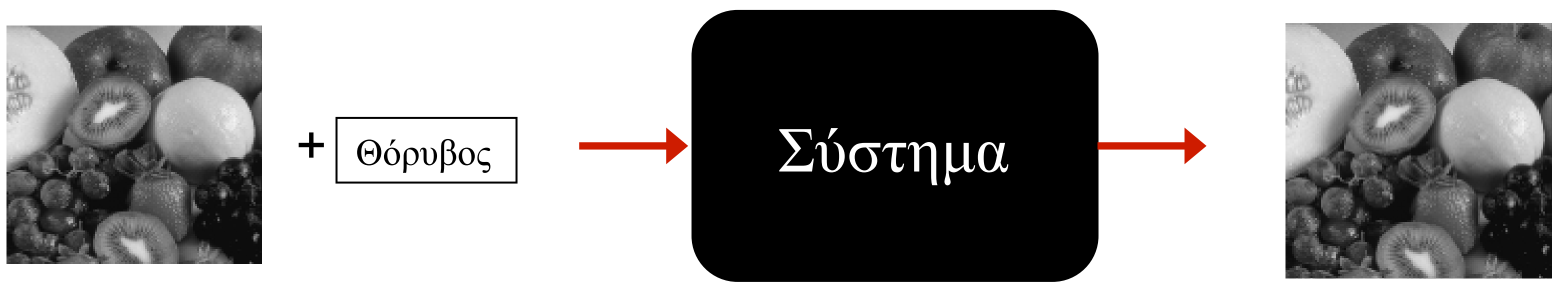
Βασικός σκοπός της Ψηφιακής Επεξεργασίας είναι η *βελτίωση* της *οπτικής ποιότητας* της εικόνας.



Υπολογιστική Όραση: Επεξεργασία Ψηφιακής Εικόνας

ΕΡΩΤΗΣΗ ...

Υπάρχει ένα ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ μέ το οποίο μπορούμε να επιτύχουμε *βελτίωση* της *οπτικής ποιότητας* της εικόνας;



Η απάντηση ΔΥΣΤΥΧΩΣ είναι αρνητική...

Οι τεχνικές βελτίωσης χωρίζονται στις παρακάτω κατηγορίες:

- Σημειακές επεξεργασίες
- Επεξεργασίες βασισμένες στο ιστόγραμμα της εικόνας
- Χωρικές επεξεργασίες
- Επεξεργασίες στο πεδίο των χωρικών συχνοτήτων

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Σημειακές Επεξεργασίες

Εφαρμογή ενός τελεστή *μηδενικής μνήμης* πάνω σε κάθε ένα εικονοστοιχείο της εικόνας. Η αρχική εικόνα $f(x,y)$ μετασχηματίζεται στην εικόνα $g(x,y)$ μέσω ενός τελεστή T, δηλαδή :

$$f(x,y) \xrightarrow{T} g(x,y) = T(f(x,y))$$

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Ιστόγραμμα εικόνας

Επεξεργασίες βασισμένες στο Ιστόγραμμα της εικόνας

Ως ιστόγραμμα μιάς εικόνας $f(x,y)$ με L επίπεδα του γκρί ορίζεται η ακολουθία:

$$p(u_i) = n_i/n,$$

όπου:

•u_i είναι το i-στό επίπεδο του γκρί με τιμές (ακέραιες) στο διάστημα $[0, L-1]$,

•n_i είναι το πλήθος των εικονοστοιχείων της $f(x,y)$ με επίπεδο γκρί ίσο με u_i και

•n είναι το συνολικό πλήθος των εικονοστοιχείων της.

Δηλαδή το ιστόγραμμα μας δείχνει ουσιαστικά τη *συχνότητα εμφάνισης* των διαφόρων επιπέδων του γκρί.

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Ιστόγραμμα εικόνας

Ισοστάθμιση Ιστογράμματος

Η αρχική εικόνα μετασχηματίζεται σε μία νέα εικόνα με ισοσταθμισμένο ιστόγραμμα. Δηλαδή στην προκύπτουσα εικόνα όλα τα επίπεδα του γκρί έχουν την ίδια συχνότητα εμφάνισης.

Ο μετασχηματισμός που υλοποιεί την ισοστάθμιση ιστογράμματος είναι ο ακόλουθος:

$$v_i = T(u_i) = \sum_{j=0}^{i} p(u_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{i} n_j$$

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Χωρική Επεξεργασία

Χωρικά Φίλτρα Εξομάλυνσης και Χαμηλοπερατά Φίλτρα.

Η πιό συνηθισμένη (και εύκολη στην υλοποίηση) περίπτωση φίλτρου εξομάλυνσης είναι αυτή του *μέσου όρου* ή *κινούμενου μέσου*, όπου η τιμή κάθε εικονοστοιχείου αντικαθίσταται από το μέσο όρο των τιμών των εικονοστοιχείων της γειτονιάς του.

Μάσκα Φίλτρου.

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Χωρική Επεξεργασία

Χωρικά Φίλτρα Ανάδειξης Ακμών και Υψηπερατά Φίλτρα.

Τα φίλτρα αυτά χρησιμοποιούνται για να προσδώσουν έμφαση στις λεπτομέρειες της εικόνας και να βελτιώσουν τη σαφήνεια της.

Μάσκα Φίλτρου.

-1/9	-1/9	-1/9
-1/9	8/9	-1/9
-1/9	-1/9	-1/9

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Χωρική Επεξεργασία

Χωρικά Φίλτρα Μεσαίου.

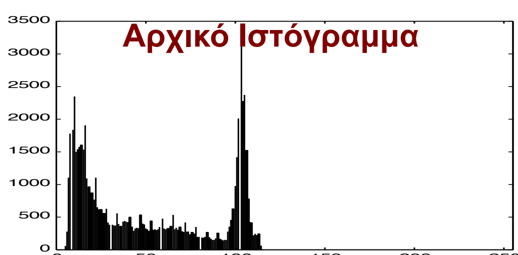
Στα φίλτρα αυτού του τύπου το κάθε εικονοστοιχείο της αρχικής εικόνας αντικαθίσταται από τον *μεσαίο* (*median*) των εικονοστοιχείων της γειτονιάς του. Για να βρεθεί φυσικά ο μεσαίος της εκάστοτε γειτονιάς θα πρέπει πρώτα να προηγηθεί η διάταξη των εικονοστοιχείων ανάλογα με την τιμή τους (gray level). Τα φίλτρα μεσαίου είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικά στην αφαίρεση του λεγόμενου κρουστικού θορύβου ή θορύβου αλατοπίπερου *(salt & pepper)*.

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Επεξεργασία σε Άλλους Χώρους

1) Gray value (histogram) domain
2) Spatial (image) domain
3) Frequency (Fourier) domain

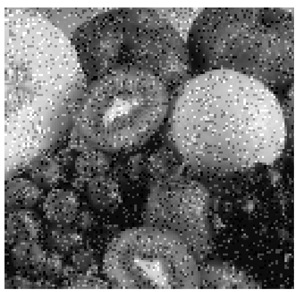
Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Επεξεργασία σε Άλλους Χώρους

- Histogram stretching, equalization, specification, κλπ...

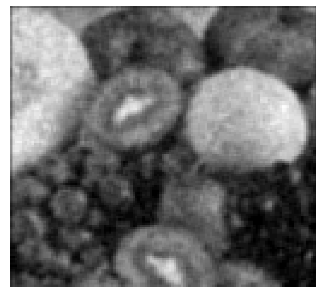


Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Επεξεργασία σε Άλλους Χώρους

- Average filter, median filter, gradient, laplacian, κλπ…



Ενθόρυβη Εικόνα
Salt & Pepper noise)



3 X 3 MA

5 X 5 MA

7 X 7 MA

Μεσαίου (Median)

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Επεξεργασία σε Άλλους Χώρους

- Average filter, median filter, gradient, laplacian, κλπ…

Αρχική Εικόνα $\boldsymbol{f}$

Μέτρο Βαθμίδας

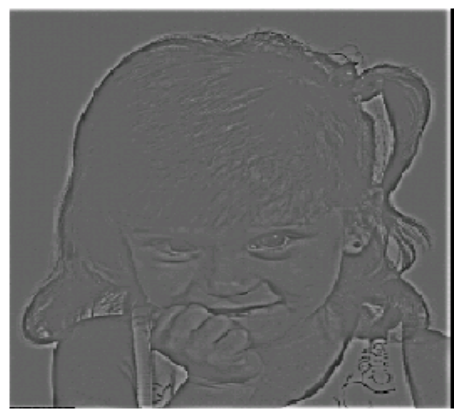
$$\|\nabla \boldsymbol{f}\| = \sqrt{\boldsymbol{f_x}^2 + \boldsymbol{f_y}^2}$$

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Επεξεργασία σε Άλλους Χώρους

- Average filter, median filter, gradient, laplacian, κλπ…

Θολή Εικόνα

+



Laplacian

=

Βελτιωμένη Εικόνα

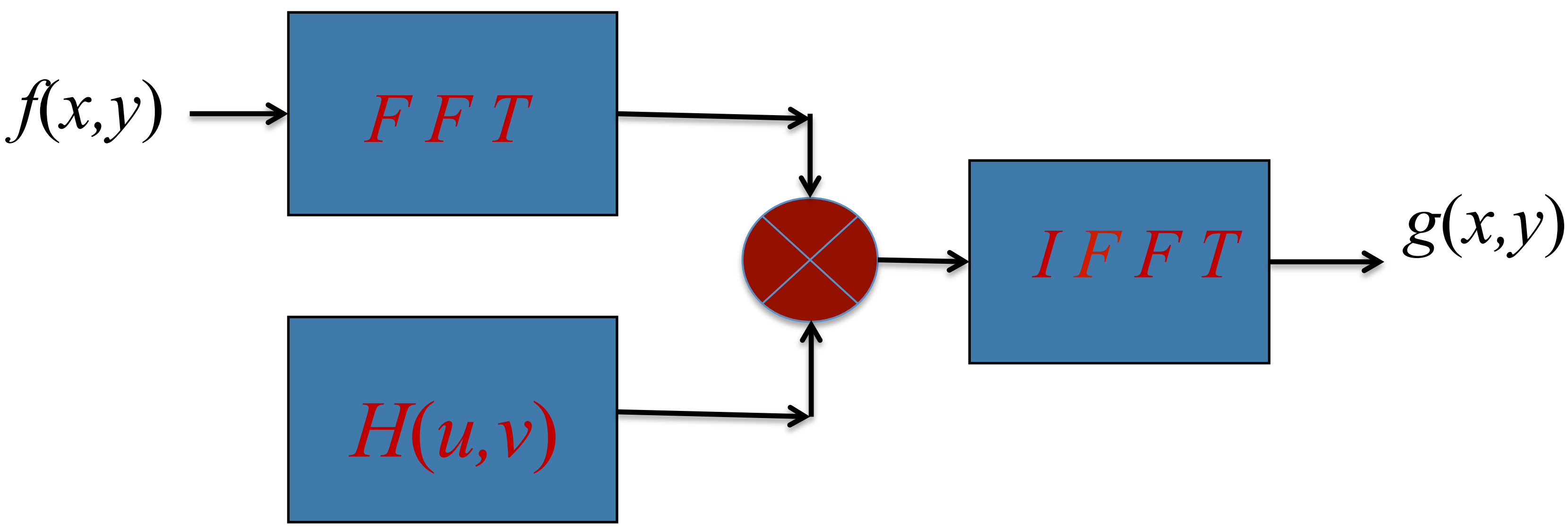
Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Χωρικές Συχνότητες

Επεξεργασίες στο πεδίο των χωρικών συχνοτήτων:

Η ανάπτυξη τεχνικών βελτίωσης στο πεδίο των χωρικών συχνοτήτων στηρίζεται στα ισχυρά μαθηματικά εργαλεία της Θεωρίας Σημάτων και Συστημάτων δύο διαστάσεων. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων απαραίτητο συστατικό στοιχείο στην υλοποίηση των τεχνικών αυτών είναι ο δημοφιλής αλγόριθμος *FFT* (*Fast Fourier Transform*) ο οποίος υπολογίζει τον *DFT* (*Discrete Fourier Transform*) με θεαματικά χαμηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα.

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Χωρικές Συχνότητες

Γραμμικά Φίλτρα στο Πεδίο Συχνοτήτων



Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας-Χωρικές Συχνότητες

Ομοιομορφικά Φίλτρα στο Πεδίο Συχνοτήτων

$$f(x,y)=r(x,y)\ i(x,y)$$

δηλαδή γινόμενο δύο διδιάστατων συναρτήσεων όπου:

- $i(x,y)$ η συνάρτηση έντασης φωτεινότητας και
- $r(x,y)$ η συνάρτηση αντίθεσης.

Τότε: $\ln(f(x,y))=\ln(r(x,y))+\ln(\ i(x,y))$

Επεξεργασία Εικόνας- 1-Δ Γραμμικά Συστήματα

Μονοδιάστατα (1-Δ) *Γραμμικά Συστήματα*:

Συνεχούς: $$\boxed{f*g\ (x)=\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} f(\alpha)g(x-\alpha)\,d\alpha}$$ και

Διακριτού: $$\boxed{f*g\ (n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m)}$$ χρόνου.

Επεξεργασία Εικόνας- 2-Δ Γραμμικά Συστήματα

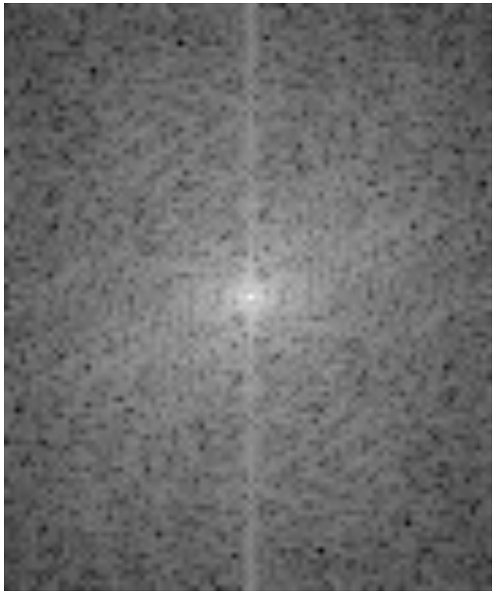
Διδιάστατα (2-Δ) *Γραμμικά Συστήματα*:

Συνεχούς: $$\boxed{f * g(x,y) = \int_{a=-\infty}^{\infty} \int_{\beta=-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta) g(x-\alpha, y-\beta) d\alpha d\beta}$$ και

Διακριτού: $$\boxed{f * g\ (n,m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(k,l) g(n-k, m-l)}$$ χρόνου.

Μετασχηματισμός Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier



Θεώρημα Συνέλιξης (1-Δ)

$$\Im\{f(x) * g(x)\} = \Im\{f(x)\}\ \ \Im\{g(x)\}$$

και αντιστοίχως:

$$\Im\{f(x)g(x)\} = \Im\{f(x)\} * \Im\{g(x)\}$$

Υπολογιστική Όραση: ***Θεώρημα Συνέλιξης (2-Δ)***

$$\boxed{\Im\left\{f(x,y) * g(x,y)\right\} = \Im\left\{f(x,y)\right\}\Im\left\{g(x,y)\right\}}$$

και αντιστοίχως:

$$\boxed{\Im\left\{f(x,y)g(x,y)\right\} = \Im\left\{f(x,y)\right\} * \Im\left\{g(x,y)\right\}}$$

Μετασχηματισμός Fourier - Ευθύς

Μονοδιάστατος (1-Δ) Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$\Im\{f(x)\} = F(ju) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-jux}dx.$$

Διδιάστατος (2-Δ) Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$\Im\{f(x,y)\} = F(ju,jv) = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-j(ux+vy)}dxdy.$$

Υπολογιστική Όραση

Μετασχηματισμός Fourier (1-Δ)– *Αντίστροφος*

Μονοδιάστατος (1-Δ) Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$\Im\{f(x)\} = F(ju) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-jux}dx.$$

Μονοδιάστατος (1-Δ) Συνεχής Αντίστροφος Μετ/σμός Fourier

$$\Im^{-1}\{F(ju)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{u=-\infty}^{\infty} F(ju)\mathrm{e}^{jux}\,du.$$

Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)– *Αντίστροφος*

Διδιάστατος (2-Δ) Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

$$\Im\{f(x,y)\} = F(ju,jv) = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-j(ux+vy)}dxdy.$$

Διδιάστατος (2-Δ) Συνεχής Αντίστροφος Μετα/σμός Fourier

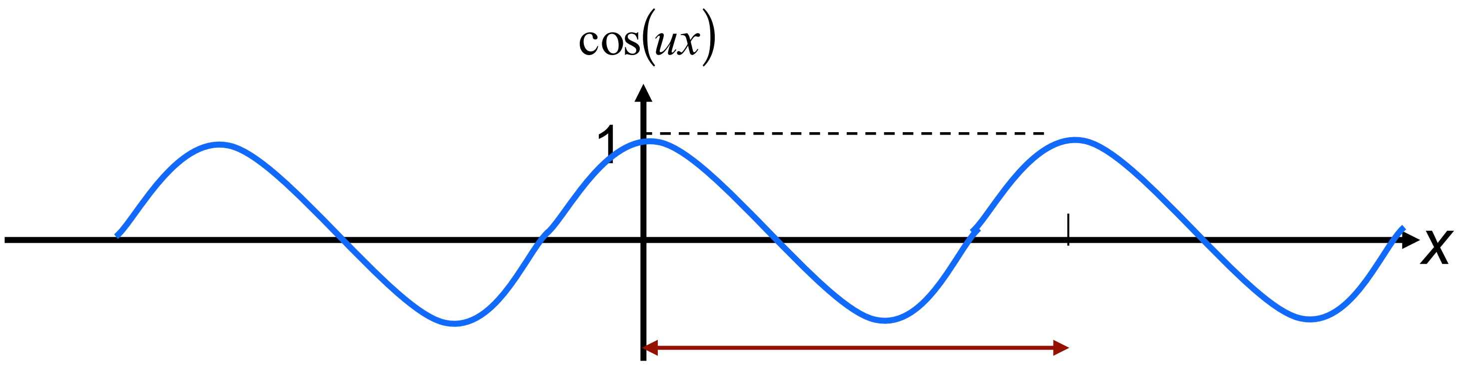
$$\Im^{-1}\{F(ju,jv)\} = f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{\infty} F(ju,jv)\mathrm{e}^{j(ux+vy)}dudv.$$

Υπολογιστική Όραση: *Συναρτήσεις Βάσης*

Μονοδιάστατες (1-Δ) Συναρτήσεις Βάσης: e^{jux}

$$\mathrm{Re}(e^{jux}) = \cos(ux)$$

$$\mathrm{Im}(e^{jux}) = \sin(ux)$$



Μήκος Κύματος:$2\pi/u$

Υπολογιστική Όραση: *Συναρτήσεις Βάσης*

Διδιάστατες (2-Δ) Συναρτήσεις Βάσης: $e^{j(ux+vy)}$

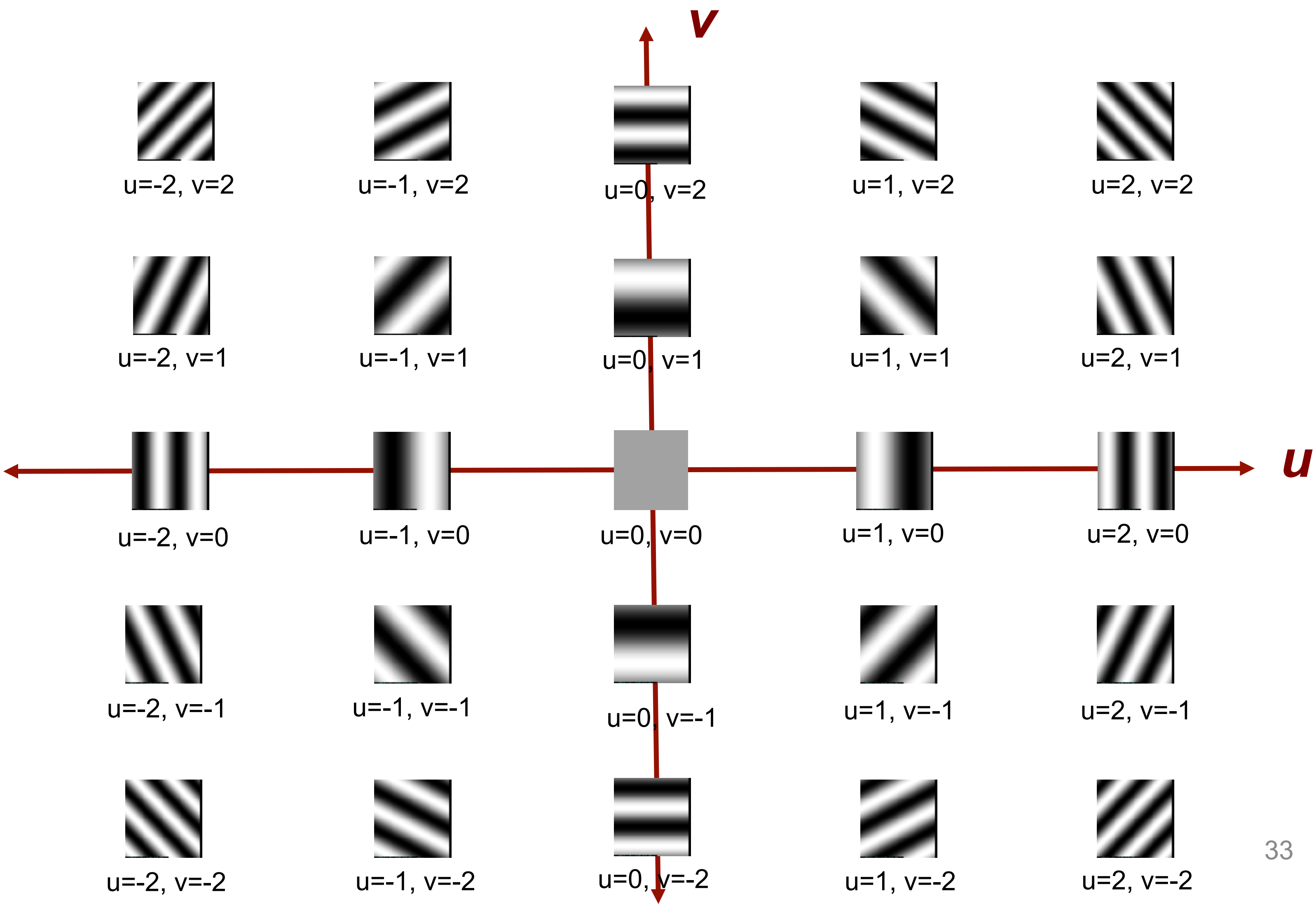
$$\mathrm{Re}(e^{j(ux+vy)}) = \cos(ux+vy)$$

$$\mathrm{Im}(e^{j(ux+vy)}) = \sin(ux+vy)$$

Μήκος Κύματος: $1/\sqrt{u^2+v^2}$.

Κατεύθυνση: u/v.

Υπολογιστική Όραση: *Συναρτήσεις Βάσης*



Υπολογιστική Όραση

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier - Ευθύς

Μονοδιάστατος (1-Δ) Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$\Im\{x(n)\} = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-2\pi jnk}{N}}.$$

Διδιάστατος (2-Δ) Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$\Im\{x(n,m)\} = X(k,l) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} x(n,m) e^{\frac{-2\pi j(kn+lm)}{NM}}.$$

Υπολογιστική Όραση

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier - Αντίστροφος

Μονοδιάστατος (1-Δ) Αντίστροφος Διακριτός Μετ/σμός Fourier

$$\Im^{-1}\{X(k)\} = x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{2\pi j n k}{N}}.$$

Διδιάστατος (2-Δ) Αντίστροφος Διακριτός Μετ/σμός Fourier

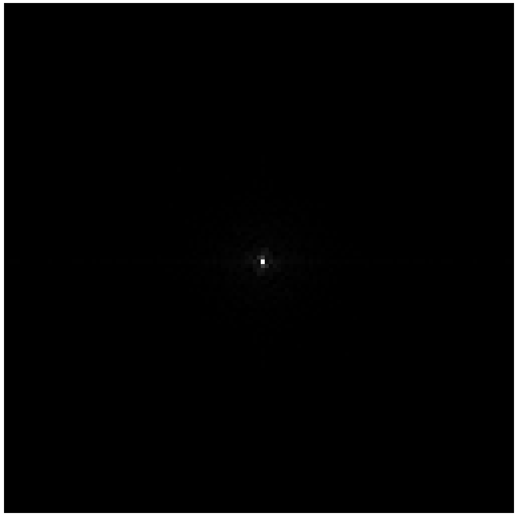
$$\Im^{-1}\{X(k,l)\} = x(n,m) = \frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} x(n,m) e^{\frac{2\pi j (kn+lm)}{NM}}.$$

Υπολογιστική Όραση

Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)

Αρχική Εικόνα

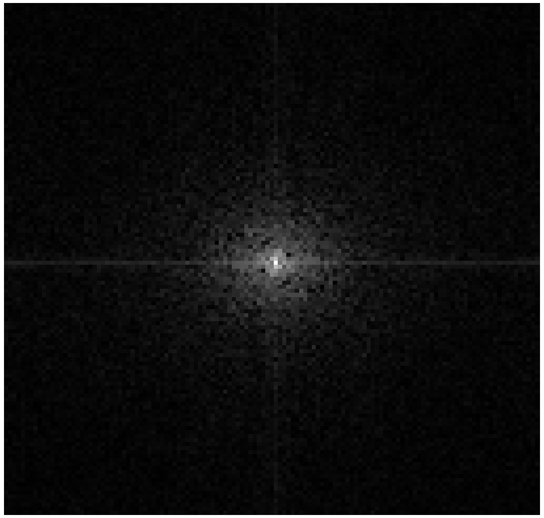
Μέτρο Μετ/σμού Fourier |F(u,v)|



Υπολογιστική Όραση
Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)

Αρχική Εικόνα

Λογ. Μέτρο Μετ/σμού Fourier
$\log(1 + |F(u,v)|)$

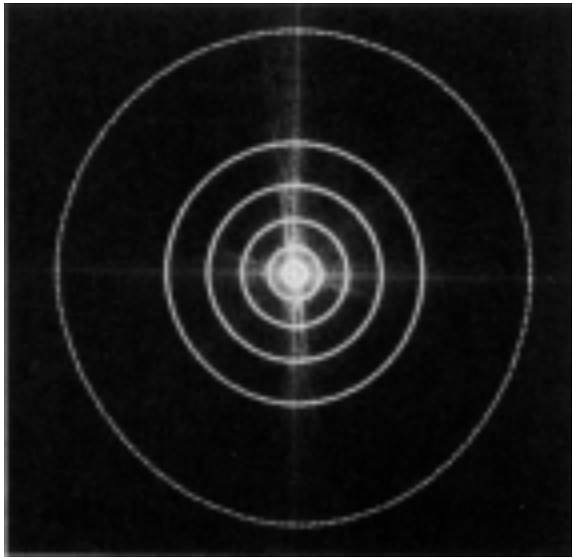


Υπολογιστική Όραση

Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Συχνοτικές Ζώνες*

Αρχική Εικόνα

Μέτρο Μετ/σμού Fourier



Ισχύς της εικόνας (%) που περιέχεται σε κάθε κύκλο ακτίνας Μ.

90%, 95%, 98%, 99%, 99.5%, 99.9%

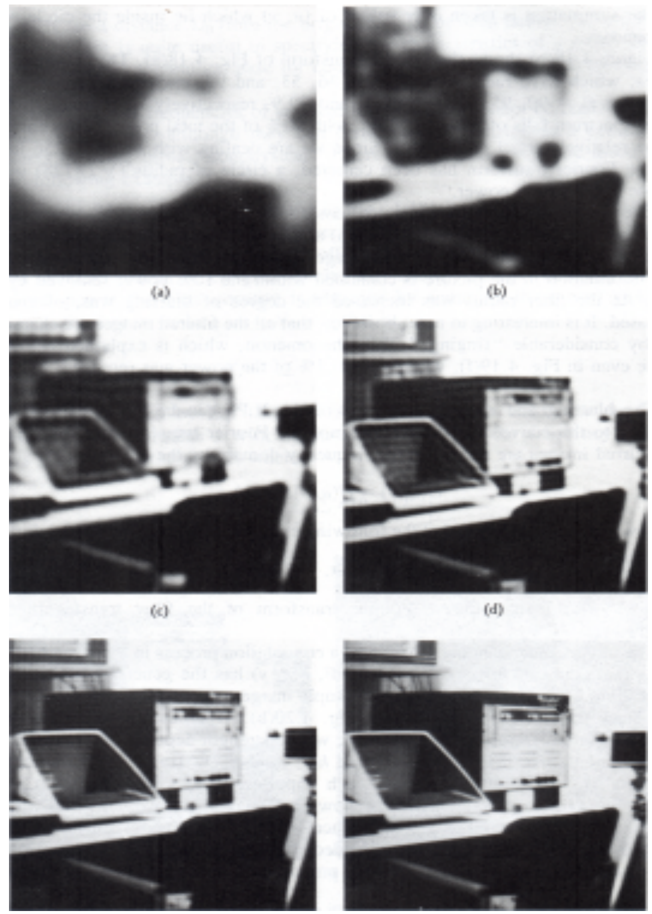
Υπολογιστική Όραση

Συχνοτικές Ζώνες-Φιλτράρισμα

90% 95%

98% 99%

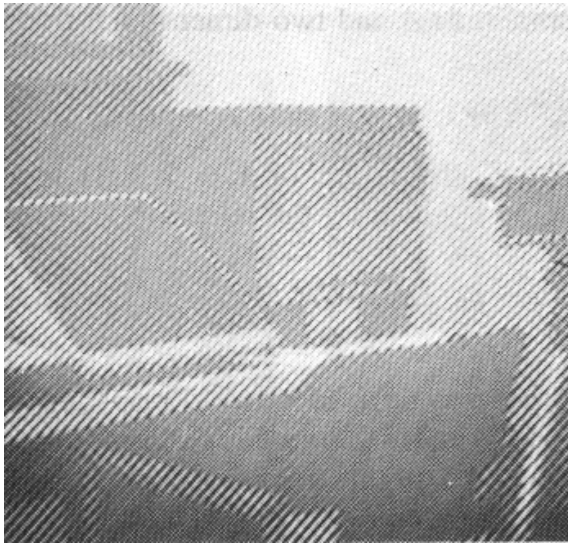
99.5% 99.9%



Υπολογιστική Όραση
Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Απομάκρυνση Θορύβου*

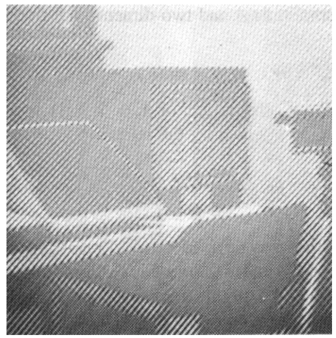
Αρχική Εικόνα

Αρχική Εικόνα + Θόρυβος



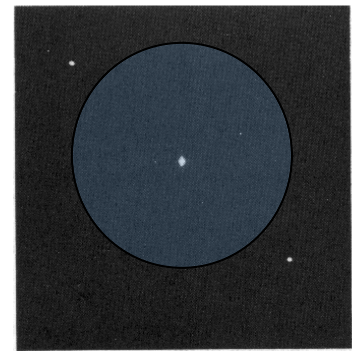
Υπολογιστική Όραση
Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Απομάκρυνση Θορύβου*

Θορυβώδης Εικόνα



Μετ/σμός Fourier

Μέτρο Μετ/σμού Fourier



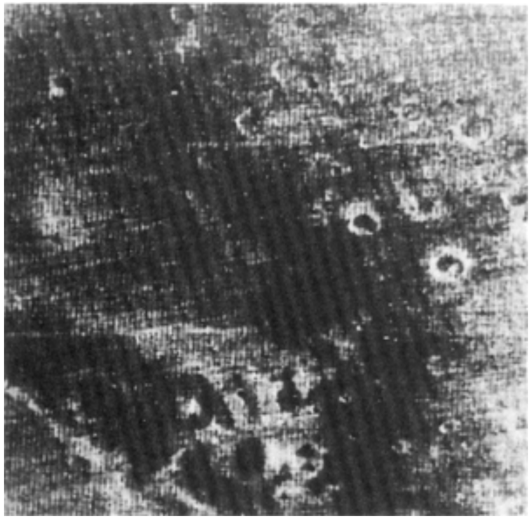
Αρχική Εικόνα

«Καθαρή» Εικόνα

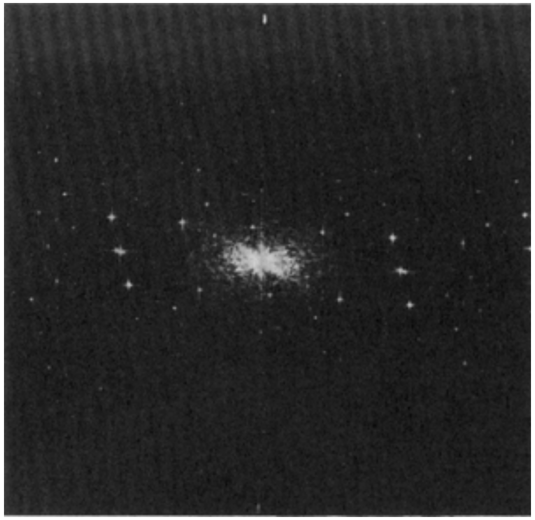
Υπολογιστική Όραση

Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Απομάκρυνση Θορύβου*

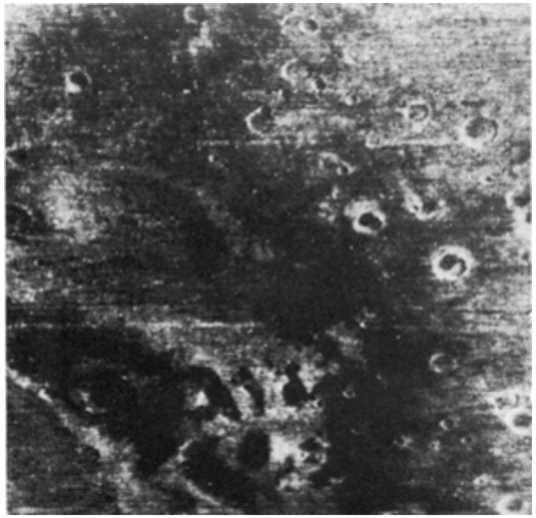
Θορυβώδης Εικόνα



Μέτρο Μετ/σμού Fourier



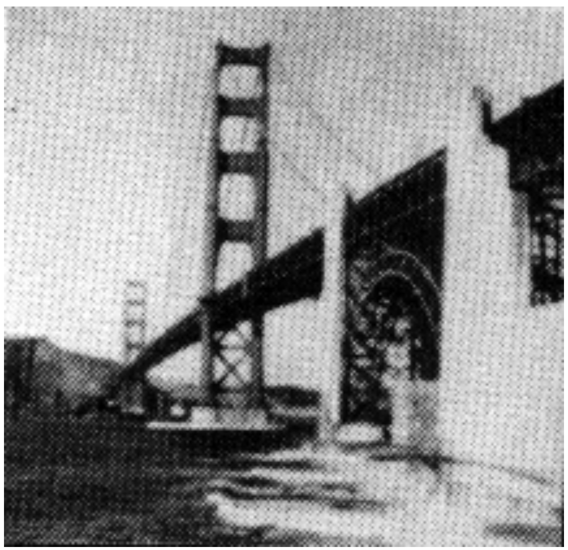
«Καθαρή» Εικόνα



Υπολογιστική Όραση

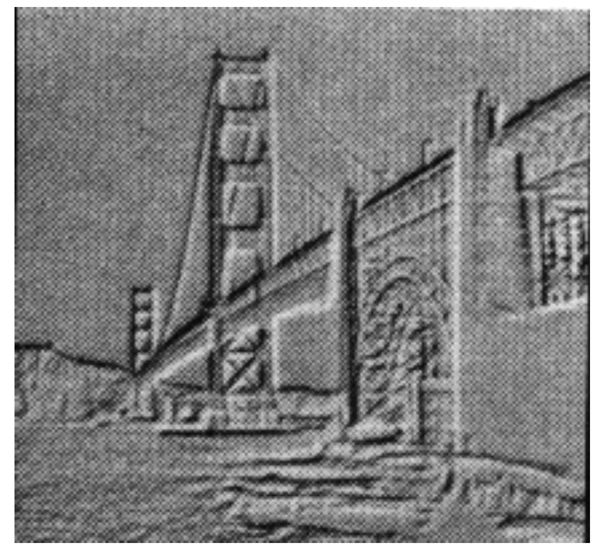
Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Έμφαση Υψηλών Συχνοτήτων*

Αρχική Εικόνα



Υψηπερατό Φίλτρο

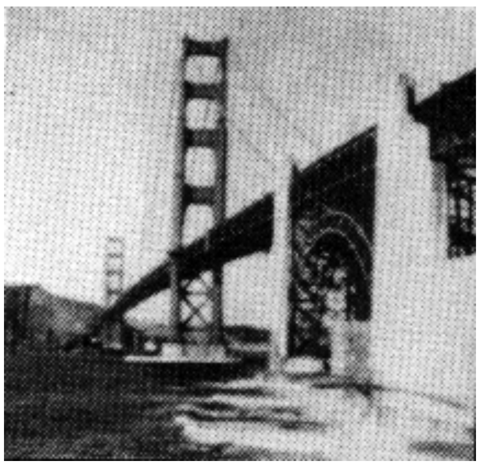
Φιλτραρισμένη Εικόνα



Υπολογιστική Όραση

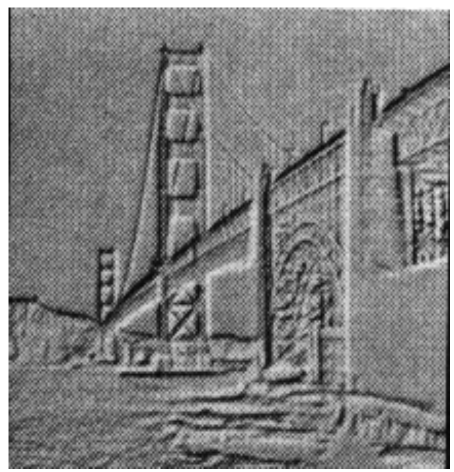
Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Έμφαση Υψηλών Συχνοτήτων*

Αρχική Εικόνα



\+

Φιλτραρισμένη Εικόνα

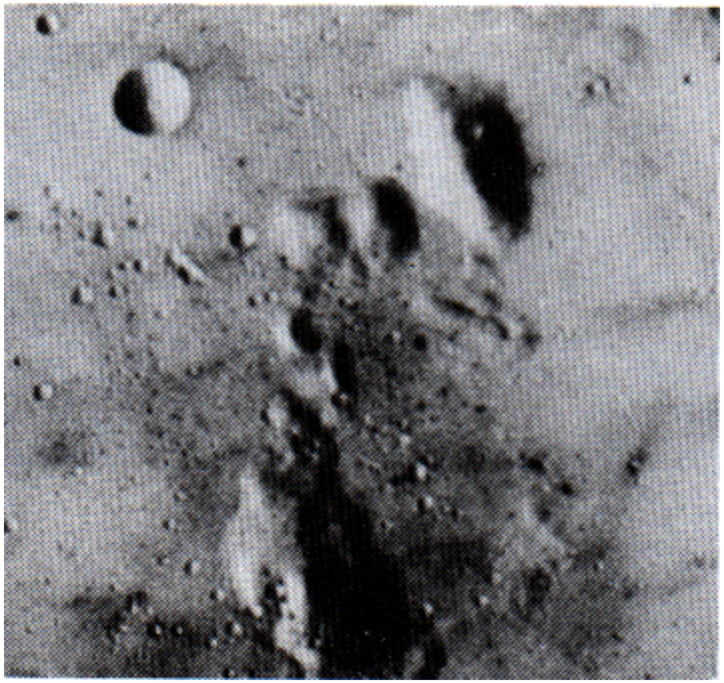


=

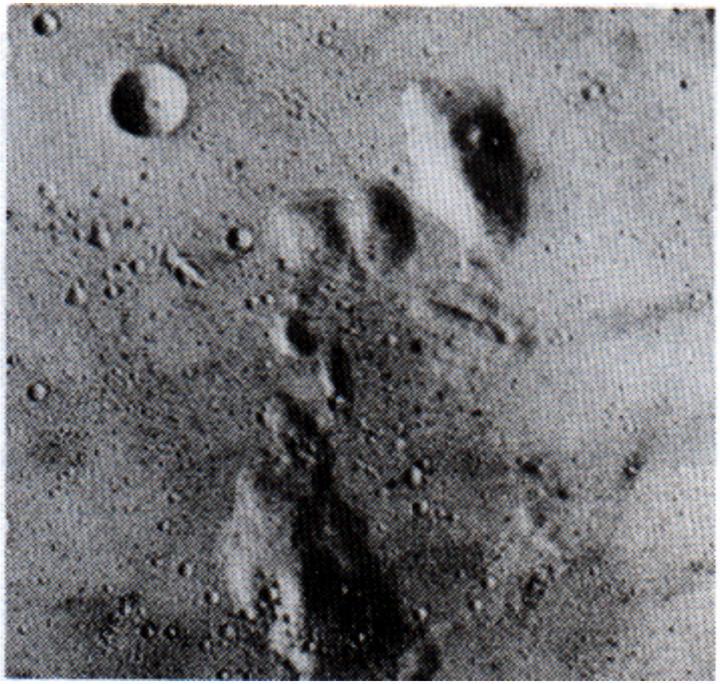
Έμφαση Υψηλών Συχνοτήτων

Υπολογιστική Όραση
Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Έμφαση Υψηλών Συχνοτήτων*

Αρχική Εικόνα



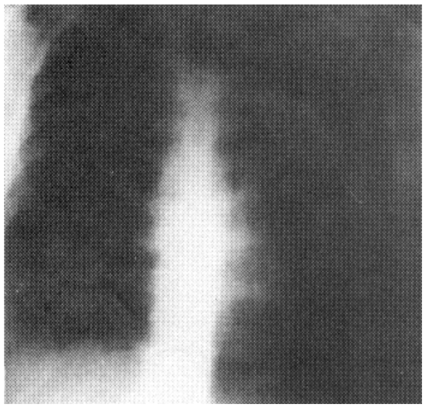
Έμφαση Υψηλών Συχνοτήτων



Υπολογιστική Όραση

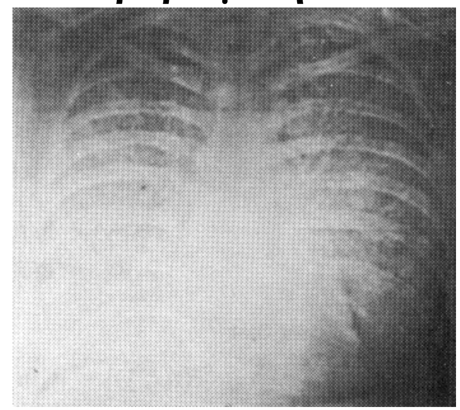
Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Έμφαση Υψηλών Συχνοτήτων*

Αρχική Εικόνα

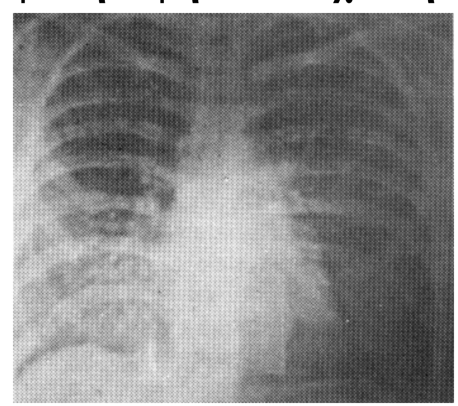


Υψηπερατό Φίλτρο

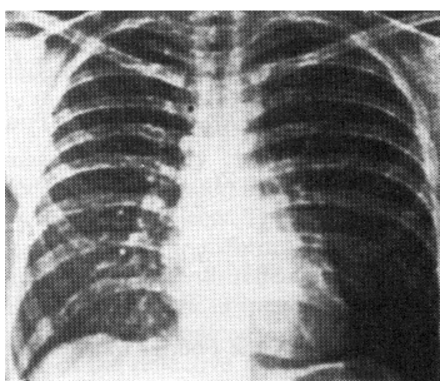
Φιλτραρισμένη Εικόνα



Έμφαση Υψηλών Συχνοτήτων



Εξίσωση Ιστογράμματος



Υπολογιστική Όραση
Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Σχεδίαση Φίλτρων*

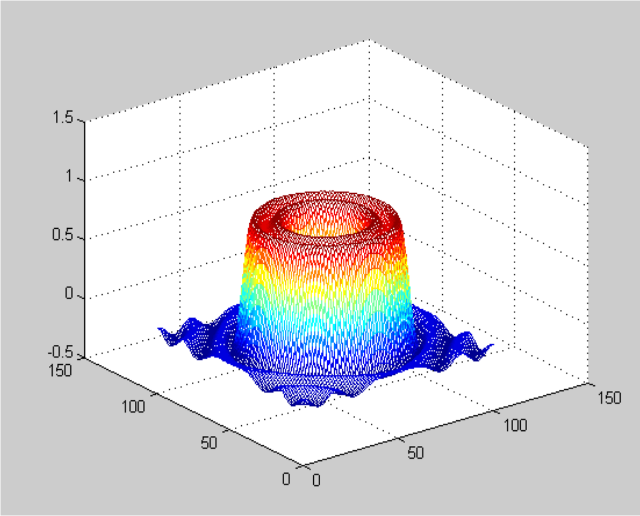
Σχεδίαση 2-Δ Φίλτρων:
Επεκτάσεις των 1-Δ Μεθόδων, αλλά και με μεθόδους που δεν έχουν 1-Δ αντίστοιχο.

• Μέθοδοι Σχεδίασης Βέλτιστων 2-Δ FIR IIR-Φίλτρων με χρήση των σταθμών *Lp* (*p*={2,∞})
• Μέθοδοι Σχεδίασης 2-Δ FIR Φίλτρων με Μετασχηματισμό 1-Δ φίλτρων.
•Το πρόβλημα της Ευστάθειας των IIR είναι ένα πολύ πιο δύσκολο πρόβλημα από το αντίστοιχο 1-Δ (κατάρα των διαστάσεων).

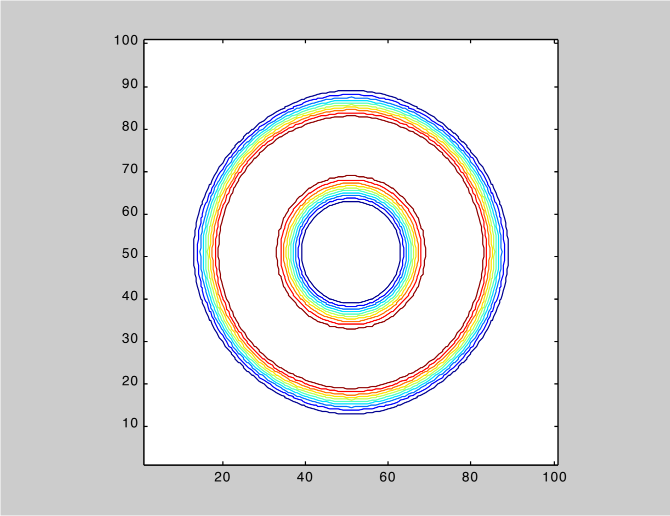
Υπολογιστική Όραση

Μετασχηματισμός Fourier (2-Δ)-*Σχεδίαση Φίλτρων*

Απόκριση Συχνότητας Ζωνοπερατού Φίλτρου



Ισοϋψείς Ζωνοπερατού Φίλτρου



Υπολογιστική Όραση

Βασικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί

Αν g(n_1, n_2) είναι ένα διδιάστατο σήμα με περιοχή υποστήριξης [0 N-1]×[0 M-1] τότε ο *ορθός* (*forward*) και ο *αντίστροφος* (*inverse*) γραμμικός μετασχηματισμός του σήματος, ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$G(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{M-1} g(n_1,n_2)K_f(n_1,k_1:n_2,k_2)$$

$$g(n_1,n_2)=\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{M-1} G(k_1,k_2)K_i(k_1,n_1:k_2,n_2)$$

όπου $K_f(n_1,k_1:n_2,k_2)$ και $K_i(k_1,n_1:k_2,n_2)$ οι *πυρήνες* του ορθού και του αντίστροφου γραμμικού μετασχηματισμού αντίστοιχα. Η φύση κάθε *γραμμικού* μετασχηματισμού καθορίζεται από τις ιδιότητες του πυρήνα του.

Υπολογιστική Όραση
Βασικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί

Ένας μετασχηματισμός είναι *ορθομοναδιαίος* (*unitary*), αν οι πυρήνες $K_f(n_1,k_1{:}n_2,k_2)$ και $K_i(k_1,n_1{:}k_2,n_2)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες ορθοκανονικότητας:

$$\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{M-1} K_f(n_1,k_1{:}n_2,k_2)K_f^*(l_1,k_1{:}l_2,k_2)=\delta(n_1-l_1,n_2-l_2)$$

$$\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{M-1} K_f(n_1,k_1{:}n_2,k_2)K_f^*(n_1,m_1{:}n_2,m_2)=\delta(k_1-m_1,k_2-m_2)$$

$$\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{M-1} K_i(n_1,k_1{:}n_2,k_2)K_i^*(l_1,k_1{:}l_2,k_2)=\delta(n_1-l_1,n_2-l_2)$$

$$\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{M-1} K_i(n_1,k_1{:}n_2,k_2)K_i^*(n_1,m_1{:}n_2,m_2)=\delta(k_1-m_1,k_2-m_2)$$

όπου $K^*(\ )$ συμβολίζει την συζυγή συνάρτηση της $K(\ )$ και $\delta(n_1,n_2)$ η διδιάστατη ακολουθία Kronecker

Υπολογιστική Όραση
Βασικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί

Βασικές ιδιότητες γνωστών ορθομοναδιαίων μετασχηματισμών:

- Διατηρήση της ενέργειας του σήματος.
- Ενσωμάτωση του μεγαλύτερου ποσοστού της ενέργειας του σήματος σε ένα μικρό αριθμό συντελεστών του μετασχηματισμού.
- Μείωση της συσχέτισης των συντελεστών του μετασχηματισμού.
- Η δυνατότητα παραγοντοποίησης του πίνακα του μετασχηματισμού σε βασικούς πίνακες οι οποίοι περιέχουν ένα πολύ μικρό αριθμό μη μηδενικών στοιχείων. Αυτή η ιδιότητα είναι που μας παρέχει την δυνατότητα γρήγορου υπολογισμού των περισσότερων ορθομοναδιαίων μετασχηματισμών.

Υπολογιστική Όραση
Βασικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί

Ενας πυρήνας είναι *διαχωρίσιμος* αν ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$K_f(k_1,n_1:k_2,n_2) = K_{f_1}(k_1,n_1)K_{f_2}(k_2,n_2)$$

- Η διαχωρισιμότητα του πυρήνα ενός μετασχηματισμού είναι αυτή που μας παρέχει την δυνατότητα υπολογισμού των συντελεστών του, χρησιμοποιώντας τεχνικές αποσύνθεσης γραμμών-στηλών (*row-column decomposition techniques*).

- Ένας διαχωρίσιμος πυρήνας είναι *συμμετρικός* αν ικανοποιεί την σχέση:

$$K_{f_1}(k,n) = K_{f_2}(k,n)$$

Βασικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)

Ο πυρήνας του 2-Δ διακριτού μετασχηματισμού Fourier ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$K_f(k_1, n_1 : k_2, n_2) = \frac{1}{N^2} e^{-j2\pi\left(\frac{n_1 k_1}{N} + \frac{n_2 k_2}{N}\right)}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερή η διαχωρισιμότητα και η συμμετρικότητα του πυρήνα του. Οι ιδιότητες αυτές του πυρήνα επιτρέπουν την ανάπτυξη γρήγορων αλγορίθμων υπολογισμού του.

Διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου (DCT)

Ο μετασχηματισμός συνημιτόνου είναι ένας πολύ χρήσιμος πραγματικός μετασχηματισμός του οποίου ο πυρήνας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$K_f(k_1,n_1:k_2,n_2) = a(k_1)a(k_2)\cos\left(\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N}\right)\cos\left(\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N}\right)$$

με τα $a(k)$ να ορίζονται από την σχέση:

$$a(k_i) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{N}}, & k_i = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}}, & k_i = 1,\ldots,N\text{-}1 \end{cases} \quad ,i = 1,2.$$

Υπολογιστική Όραση
Βασικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί

Διακριτός Karhunen-Loeve Μετασχηματισμός (KLT)

Ο διακριτός KLT είναι ένας ορθομοναδιαίος μετασχηματισμός ο οποίος βασίζεται σε στατιστικές ιδιότητες του σήματος εισόδου. Συγκεκριμένα, τα δύο βασικά σημεία στα οποία διαφέρει ο KLT είναι τα ακόλουθα:

•το σήμα εισόδου g(n_1, n_2) με περιοχή υποστήριξης [0 $N-1$]×[0 $M-1$] θεωρούμε ότι περιγράφει μία τυχαία διαδικασία με γνωστή ακολουθία συνδιασπορών $C_g(n_1,n_2,k_1,k_2)$ η οποία ορίζεται από την σχέση:

$$C_g(n_1,n_2,l_1,l_2) = E\{(g(n_1,n_2) - E\{g(n_1,n_2)\})(g(l_1,l_2) - E\{g(l_1,l_2)\})\}$$

•ο πυρήνας $K_f(n_1,n_2{:}k_1,k_2)$ του μετασχηματισμού δεν ορίζεται αναλυτικά αλλά προκύπτει από την λύση του ακόλουθου γραμμικού συστήματος:

$$\lambda(k_1,k_2)K_f(n_1,n_2:k_1,k_2) = \sum_{l_1=0}^{N-1}\sum_{l_2=0}^{M-1} C_g(n_1,n_2,l_1,l_2)K_f(l_1,l_2:k_1,k_2)$$

Ο KLT παρουσιάζει πολύ μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον εξ αιτίας ορισμένων βέλτιστων χαρακτηριστικών που έχει όπως:

- το ότι οι συντελεστές του μετασχηματισμού είναι ασυσχέτιστοι και
- στο γεγονός ότι από όλους τους γραμμικούς μετασχηματισμούς της ίδιας τάξης, ο KLT είναι αυτός που ενσωματώνει στους συντελεστές του το μεγαλύτερο ποσοστό ενέργειας του σήματος.

Υπολογιστική Όραση

Multi-Resolution Image Representation

https://ssl.panoramio.com/photo/4286585

Υπολογιστική Όραση
Multi-Resolution Image Representation

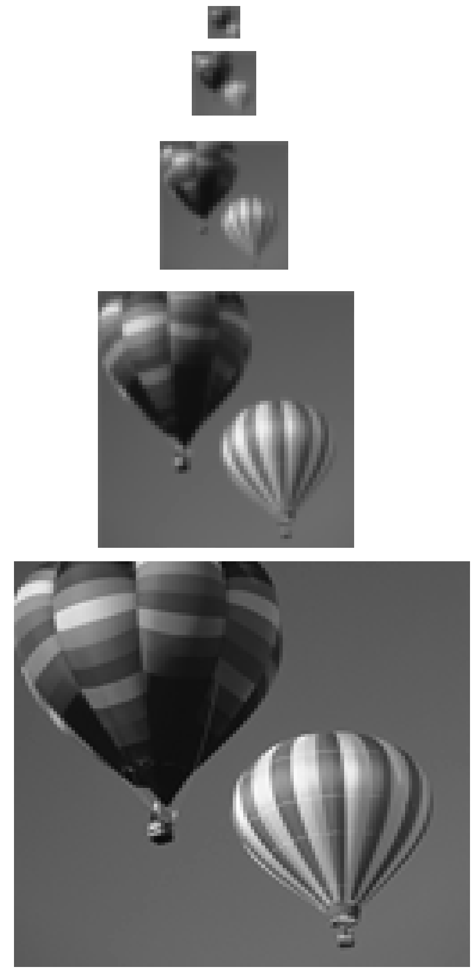
- *Gaussian* Πυραμίδες
- *Laplacian* Πυραμίδες

Υπολογιστική Όραση

Πυραμίδες

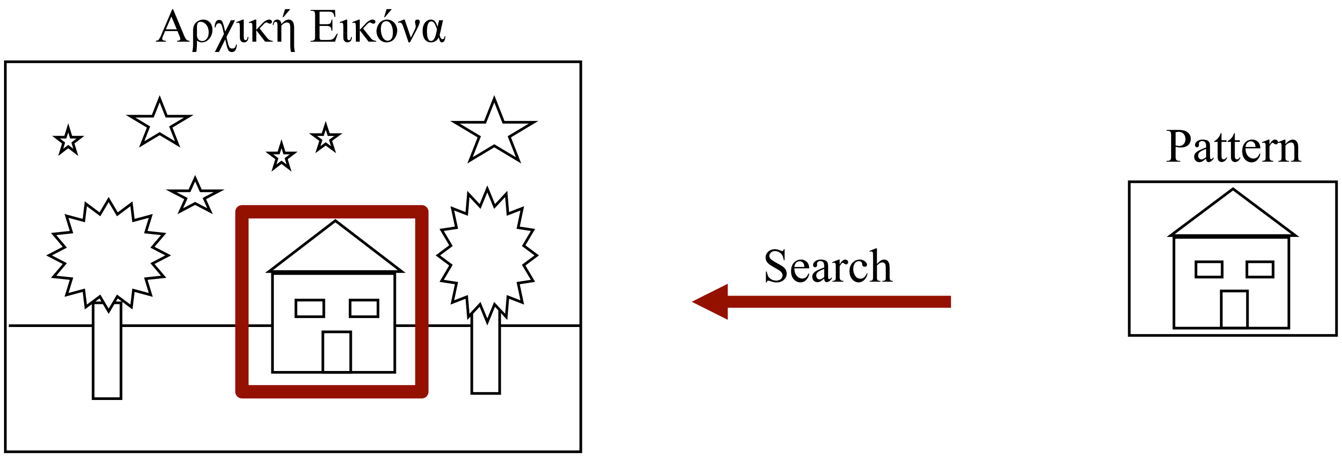
Χαμηλή Ανάλυση (LR)

Υψηλή Ανάλυση (HR)



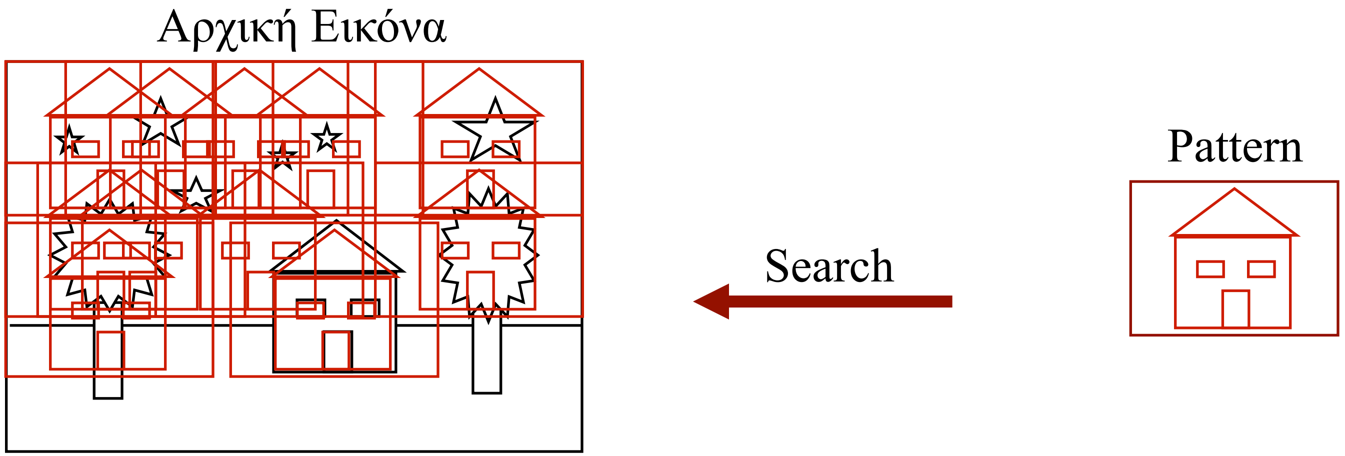
Υπολογιστική Όραση

Pattern Matching



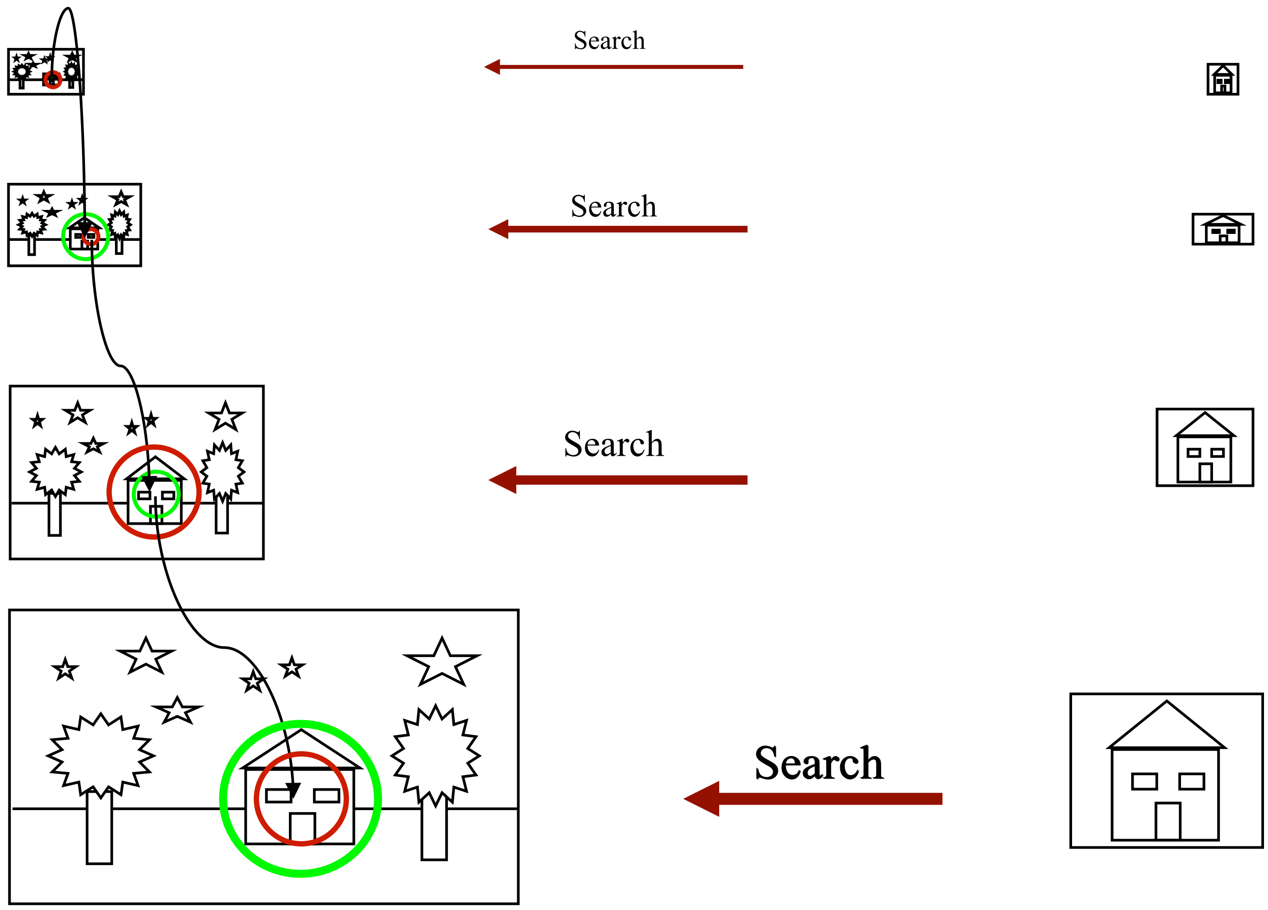
Πώς μπορούμε να λύσουμε το παραπάνω στοιχειώδες πρόβλημα;

Υπολογιστική Όραση
Pattern Matching



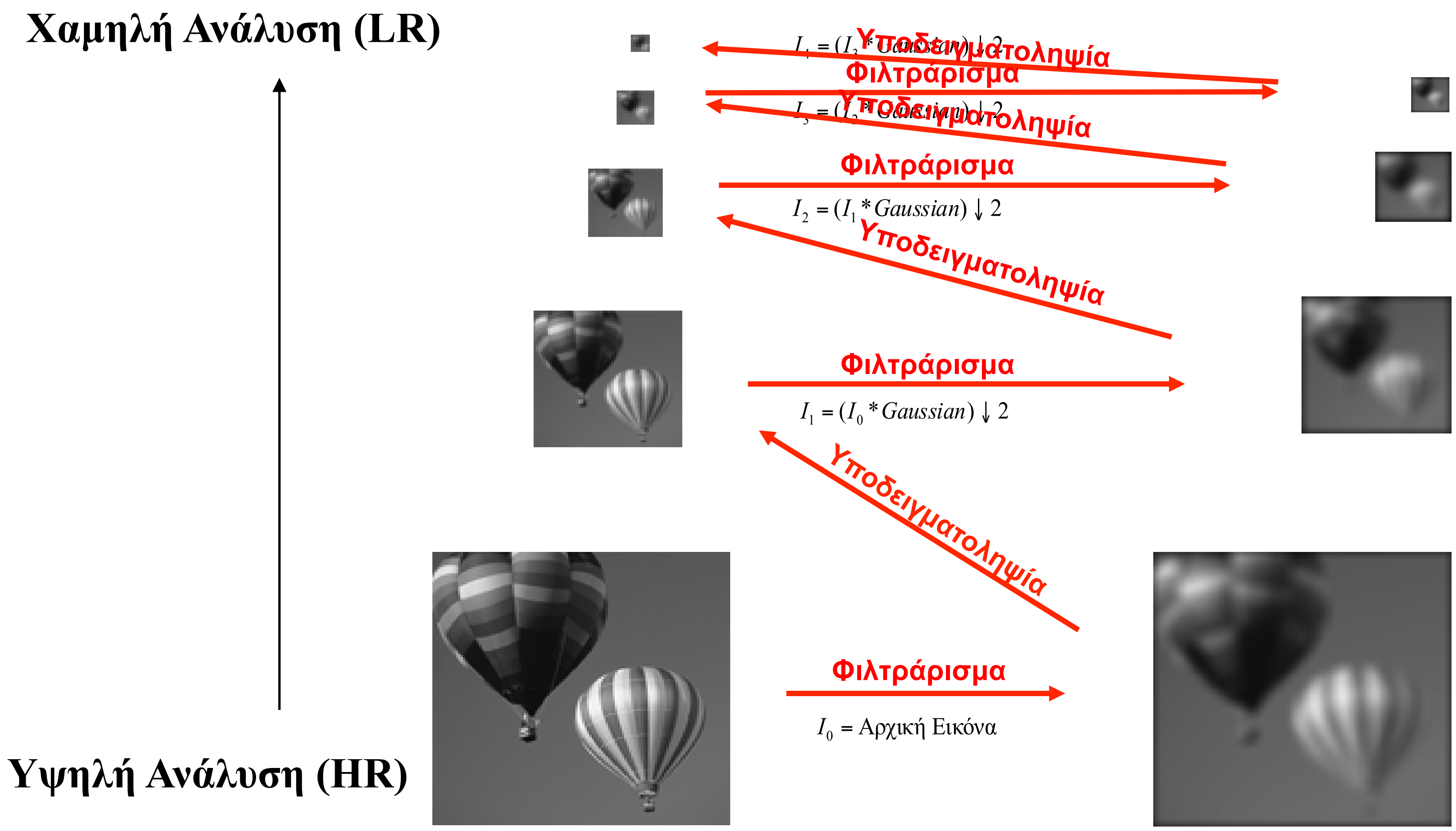
Λύσαμε το πρόβλημα, αλλά το υπολογιστικό κόστος;
Μήπως υπάρχει κάποια εναλλακτική λύση;

Υπολογιστική Όραση
Fast Pattern Matching



Υπολογιστική Όραση

Gaussian Πυραμίδα



Υπολογιστική Όραση

Laplacian Πυραμίδα

Gaussian Πυραμίδα $G_i = L_i + \text{expand}(G_{i+1})$ $L_i = G_i - \text{expand}(G_{i+1})$ **Laplacian Πυραμίδα**