ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

FIR φίλτρα: $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$

Ορίζουμε τις ποσότητες:

$$\mathbf{q}_N = [r_{\chi,\varsigma}(0)\ r_{\chi,\varsigma}(1) \cdots r_{\chi,\varsigma}(N-1)]^t$$

$$\mathbf{h}_N = [h_0\ h_1 \cdots h_{N-1}]^t$$

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(N-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{xx}(1) \\ r_{xx}(N-1) & \cdots & r_{xx}(1) & r_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

Εξισώσεις Wiener-Hopf: $\mathbf{R}_N \mathbf{h}_N = \mathbf{q}_N$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Όταν τα στοχαστικά σήματα είναι *από κοινού ασθενώς στάσιμα…*

Για την περίπτωση, για παράδειγμα, των FIR φίλτρων ο *γραμμικός εκτιμητής* θα είναι της μορφής:

$$\hat{\varsigma}_n = d_n + \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_{n-k}$$

Τι γίνεται όταν τα στοχαστικά σήματα *δεν* είναι *από κοινού ασθενώς στάσιμα*;

Για την ίδια περίπτωση ο *γραμμικός εκτιμητής* θα είναι της μορφής:

$$\hat{\varsigma}_n = d_n + \sum_{k=0}^{N-1} h_{n,k} \chi_{n-k}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Δηλαδή, η ντετερμινιστική ακολουθία $\{h_{n,k}\}$ που υπεισέρχεται στη σχέση:

$$\hat{\varsigma}_n = d_n + \sum_{k=0}^{N-1} h_{n,k}\chi_{n-k}$$

θα είναι χρονικά μεταβαλλόμενη, και η λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\min_{\{d_n\},\{h_{n,k}\}} \mathrm{E}\left\{(\varsigma_n - d_n - \sum_k h_{n,k}\chi_{n-k})^2\right\}$$

πολύ δύσκολη !!!

Προσαρμοστικά Φίλτρα

Μπορούμε να απλοποιήσουμε το πρόβλημα αν κάνουμε άρση της απαιτήσεώς μας η ακολουθία $\{h_{n,k}\}$ να ελαχιστοποιεί το ΜΤΣ κάθε χρονική στιγμή και αντ' αυτού να απαιτήσουμε οι όροι της ντετερμινιστικής ακολουθίας να ενημερώνονται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση :

$$h_{n+1,k} = h_{n,k} + \delta h_{n,k}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

όπου $\delta h_{n,k}$ η διόρθωση του k-οστού συντελεστή της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου τη χρονική στιγμή n.

Διανυσματική μορφή *Αναδρομικής σχέσης*: $\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \Delta\mathbf{h}_n$

Προσαρμοστικά Φίλτρα

Απαιτήσεις:

1. Στην περίπτωση των *από κοινού ασθενώς στάσιμων* σημάτων

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{h}_n \equiv \text{ με τη } \textit{λύση} \text{ Wiener}$$

2. Θα θέλαμε να μην είναι αναγκαία η γνώση των στατιστικών των σημάτων στον υπολογισμό των *διορθώσεων*

3. Στην περίπτωση *στασιμότητας* θα θέλαμε το φίλτρο να μπορεί να παρακολουθεί τις αλλαγές των στατιστικών των σημάτων.

Προσαρμοστικά Φίλτρα

Το φίλτρο της *απότομης κατάβασης*

$$J(\mathbf{h}_n) = \mathrm{E}\{\varepsilon_n^2\} = \mathrm{E}\{(\varsigma_n^o - \hat{\varsigma}_n^o)^2\} = \mathrm{E}\{(\varsigma_n^o - \boldsymbol{\chi}_n^{o^t}\mathbf{h}_n)^2\}$$

Θέλουμε να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min_{\mathbf{h}_n} J(\mathbf{h}_n)$$

ή ισοδύναμα: $$\nabla_{\mathbf{h}_n} J(\mathbf{h}_n) = 0$$

Προσαρμοστικά Φίλτρα

Το φίλτρο της *απότομης κατάβασης*

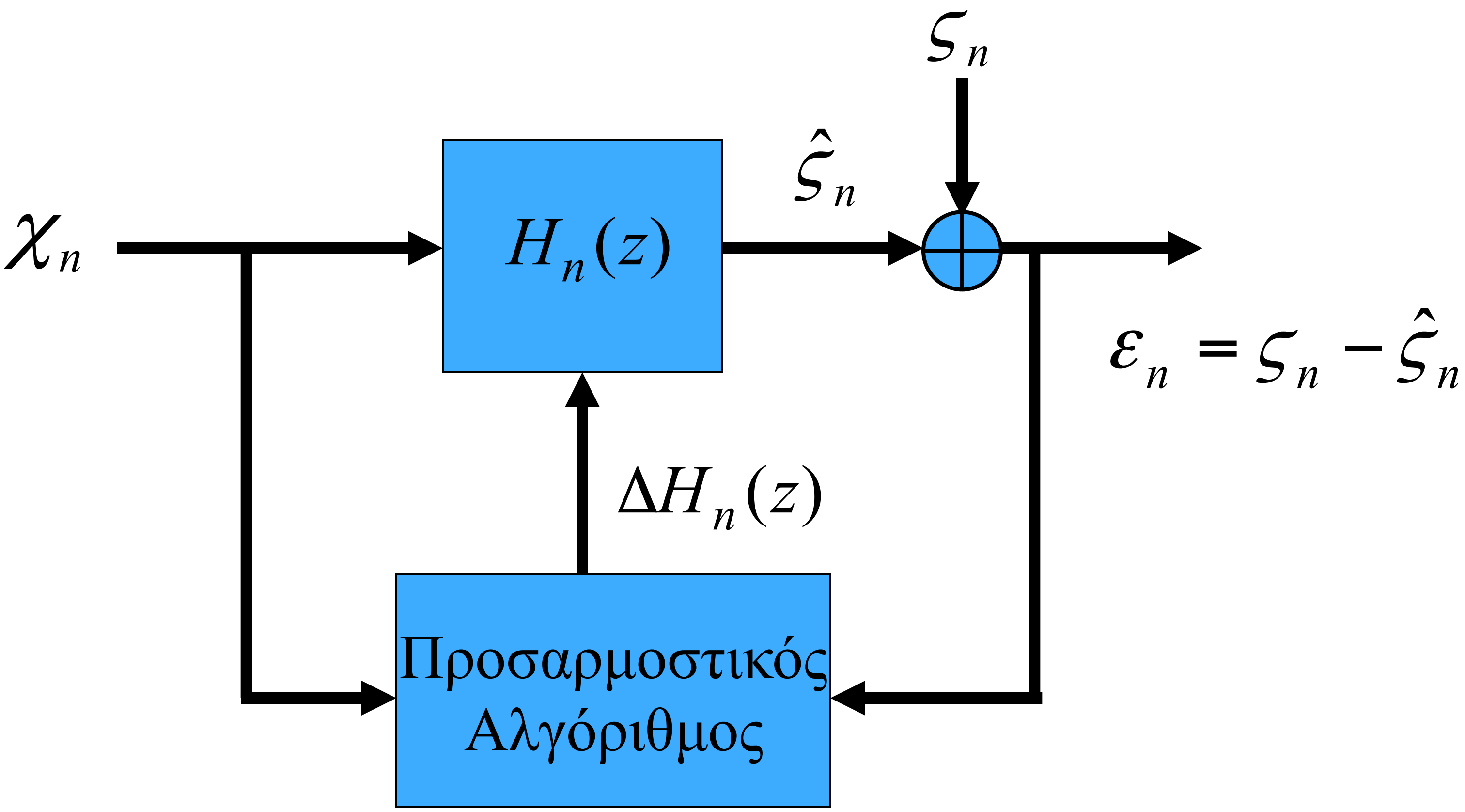
Αναδρομή: $$h_{n+1,k} = h_{n,k} - \mu \frac{\partial J(\mathbf{h}_n)}{\partial h_{n,k}}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

όπου $J(\mathbf{h}_n) = \mathrm{E}\{\varepsilon_n^2\}$

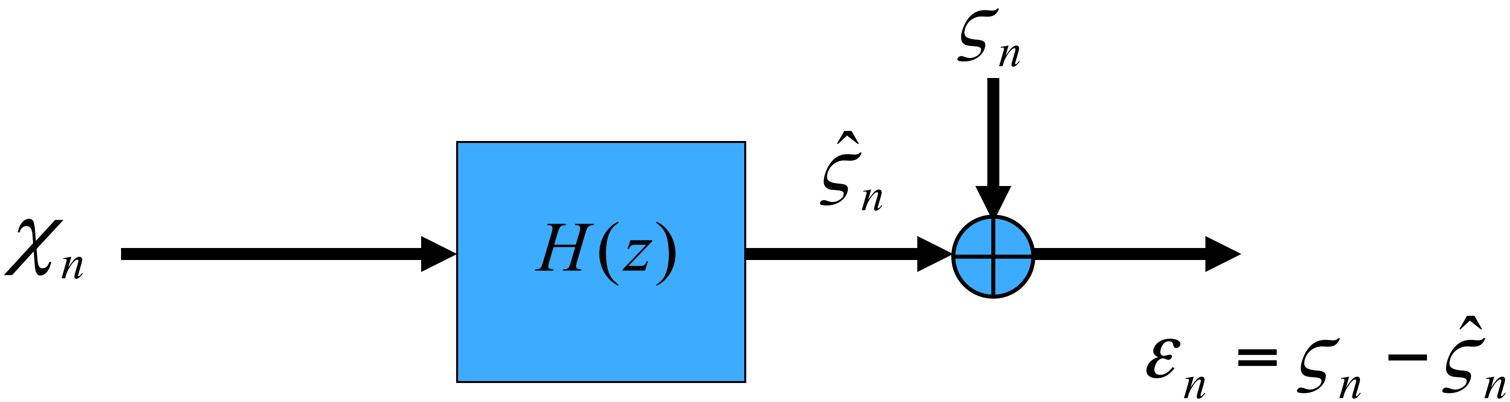
ή ισοδύναμα:

$$\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \mu \mathrm{E}\{(\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n)\mathsf{X}_n\} = \mathbf{h}_n + \mu \mathrm{E}\{\varepsilon_n \mathsf{X}_n\} = \mathbf{h}_n + \Delta\mathbf{h}_n$$

Προσαρμοστικά Φίλτρα



Προσαρμοστικά Φίλτρα



Προσαρμοστικά Φίλτρα

1. Στην περίπτωση των *από κοινού ασθενώς στάσιμων* σημάτων

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{h}_n \equiv$$ με τη *λύση* Wiener

$$\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \mu \mathrm{E}\{(\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n)\mathrm{X}_n\} = \mathbf{h}_n + \mu(r_{\chi,\varsigma} - R_{\chi\chi}\mathbf{h}_n)$$

Αναδρομικοί Αλγόριθμοι

Γενική μορφή Αναδρομικών Αλγορίθμων:

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} - \mu \mathcal{H}(\vartheta_{n-1}, \mathcal{X}_n)$$

όπου:

ϑ : Ποσότητα που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

$\mathcal{X}_n$: Δεδομένα (τυχαία).

$\mathcal{H}(.,.)$: Μη γραμμική διανυσματική συνάρτηση της ποσότητας ϑ που θέλουμε να εκτιμήσουμε και των δεδομένων.

μ : Βήμα, συνήθως μια πολύ μικρή ποσότητα.

Αναδρομικοί Αλγόριθμοι

Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min_{\vartheta} \Phi(\vartheta)$$

όπου $\Phi(.)$ γνωστή συνάρτηση.

Η λύση του προβλήματος είναι τα σημεία εκείνα στα οποία:

$$\nabla_{\vartheta} \Phi(\vartheta) = 0$$

Αναδρομικοί Αλγόριθμοι

Ας ορίσουμε τη ντετερμινιστική αναδρομική σχέση:

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} - \mu \nabla_{\vartheta} \Phi(\vartheta_{n-1})$$

όπου ϑ_n ντετερμινιστικές ποσότητες.

Αν η παραπάνω αναδρομική σχέση συγκλίνει με κάποια έννοια, τότε:

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta_n = \vartheta_\infty = \vartheta_\infty - \mu \nabla_{\vartheta} \Phi(\vartheta_\infty)$$

και επομένως $\nabla_{\vartheta} \Phi(\vartheta_\infty) = 0$. Δηλαδή, το ϑ_∞ είναι η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Αναδρομικοί Αλγόριθμοι

Ας υποθέσουμε τη ντετερμινιστική αναδρομική σχέση:

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} - \mu \Psi(\vartheta_{n-1})$$

όπου ϑ_n ντετερμινιστικές ποσότητες.

Τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να δώσουμε απάντηση είναι:

1. Ποια είναι τα πιθανά σημεία σύγκλισης;
2. Είναι ευσταθή, ολικά, τοπικά;
3. Ποια η ταχύτητα σύγκλισης της αναδρομής στα σημεία αυτά;

Αναδρομικοί Αλγόριθμοι

1. Ποια είναι τα πιθανά σημεία σύγκλισης;

Τα πιθανά σημεία σύγκλισης είναι τα σημεία ισορροπίας της συνάρτησης $\Psi(.)$, δηλαδή τα σημεία στα οποία $\Psi(\vartheta) = 0$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε απάντηση στα υπόλοιπα ερωτήματα διακρίνοντας τις ακόλουθες περιπτώσεις:

A. Η διανυσματική συνάρτηση $\Psi(.)$ είναι γραμμική συνάρτηση του ϑ.

B. Η διανυσματική συνάρτηση $\Psi(.)$ είναι μη γραμμική συνάρτηση του ϑ.

Αναδρομικοί Αλγόριθμοι

Α. Η διανυσματική συνάρτηση $\Psi(.)$ είναι γραμμική συνάρτηση του ϑ

$$\Psi(\vartheta_{n-1}) = R\vartheta_{n-1}$$

και επομένως το επιθυμητό σημείο ισορροπίας ικανοποιεί την

$$\Psi(\vartheta_{\infty}) = 0 = R\vartheta_{\infty}$$

Κάτω από ποιες προϋποθέσεις το σημείο $\vartheta_{\infty} = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας;

Κάτω από ποιες προϋποθέσεις το $\vartheta_{\infty} = 0$ δεν είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας;

Αναδρομικοί Αλγόριθμοι

Ας υποθέσουμε ότι το μητρώο R είναι αντιστρέψιμο. Στην περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρει να δούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις η αναδρομική σχέση συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας $\vartheta_\infty = 0$.

Άρα θέλουμε να δούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις:

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta_n = \lim_{n\to\infty} (I - \mu R)\vartheta_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (I - \mu R)^n \vartheta_0 = 0$$

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι το μητρώο R είναι Ερμιτιανό και θετικά ορισμένο, τότε

$$R = U \Lambda U^H$$

και επομένως θέλουμε να δούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις το:

$$\lim_{n\to\infty} (I - \mu \Lambda)^n \hat{\vartheta}_0 = 0$$

Αναδρομικοί Αλγόριθμοι

$$\lim_{n\to\infty}(I-\mu\Lambda)^n\hat{\vartheta}_0 = 0$$

Άρα θέλουμε : $\max_i |1-\mu\lambda_i| < 1$

ή ισοδύναμα: $0 < \mu < \dfrac{2}{\lambda_{\max}}$, με $\lambda_{\max} = \max_i\{\lambda_i\}$.

Ορίζουμε τώρα σαν εκθετική ταχύτητα σύγκλισης το όριο:

$$u = -\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\|\vartheta_n\|)}{n}$$

επομένως: $u_{\min} = -\ln(1-\mu\lambda_{\min})$, με $\lambda_{\min} = \min_i\{\lambda_i\}$.

Αναδρομικοί Αλγόριθμοι

B. Η διανυσματική συνάρτηση $\Psi(.)$ είναι μη γραμμική συνάρτηση του ϑ, και ας υποθέσουμε ότι:

$$\vartheta_{n-1} = \vartheta_{\infty} + \Delta_{n-1}$$

Δηλαδή βρισκόμαστε κοντά στο σημείο ισορροπίας. Τότε

$$\Psi(\vartheta_{n-1}) = \Psi(\vartheta_{\infty} + \Delta_{n-1}) = \Psi(\vartheta_{\infty}) + \nabla_{\vartheta}\Psi(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_{\infty}} \Delta_{n-1} + \ldots$$

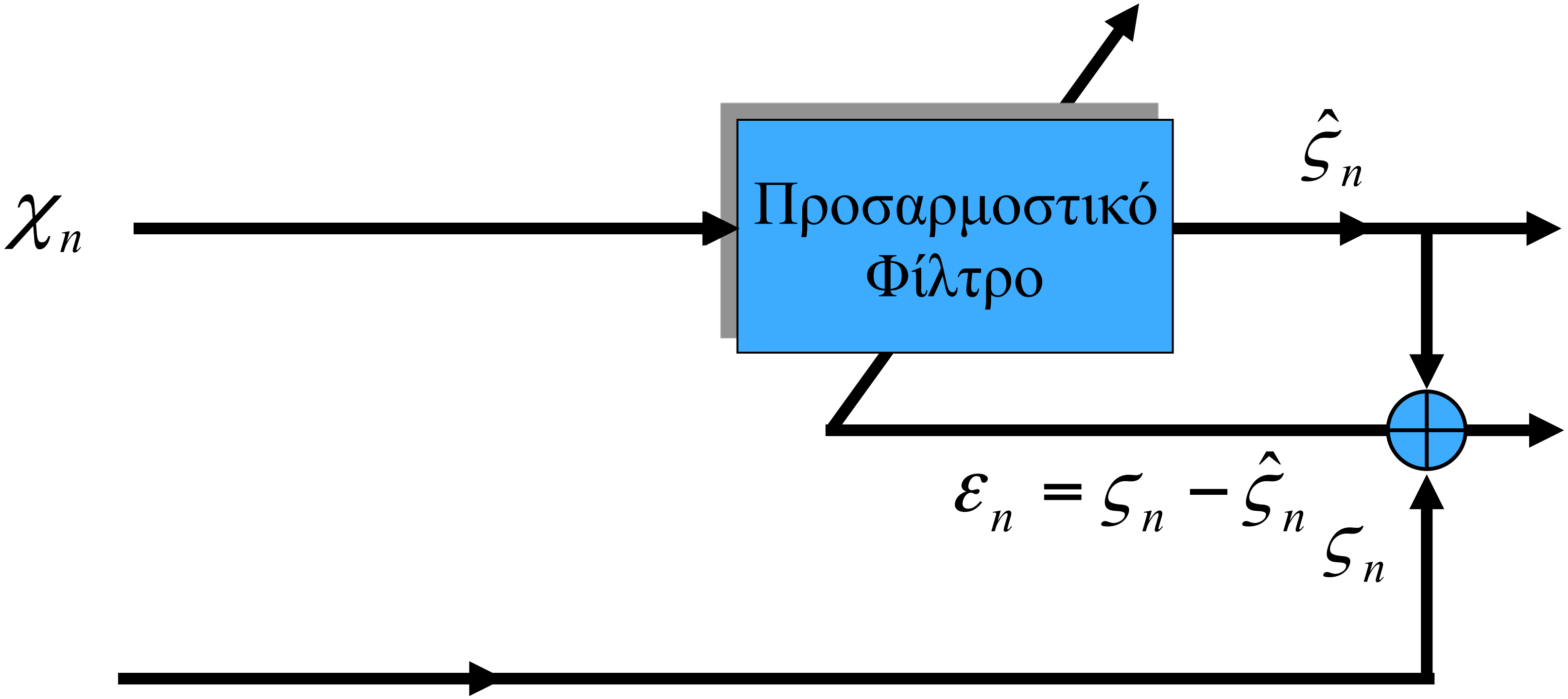
ή ισοδύναμα: $\Psi(\vartheta_{n-1}) \approx \nabla_{\vartheta}\Psi(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_{\infty}} \Delta_{n-1}$

Άρα η αναδρομική σχέση: $\vartheta_n = \vartheta_{n-1} - \mu\Psi(\vartheta_{n-1})$ γράφεται ως

$$\Delta_n = (I - \mu\hat{R})\Delta_{n-1}$$

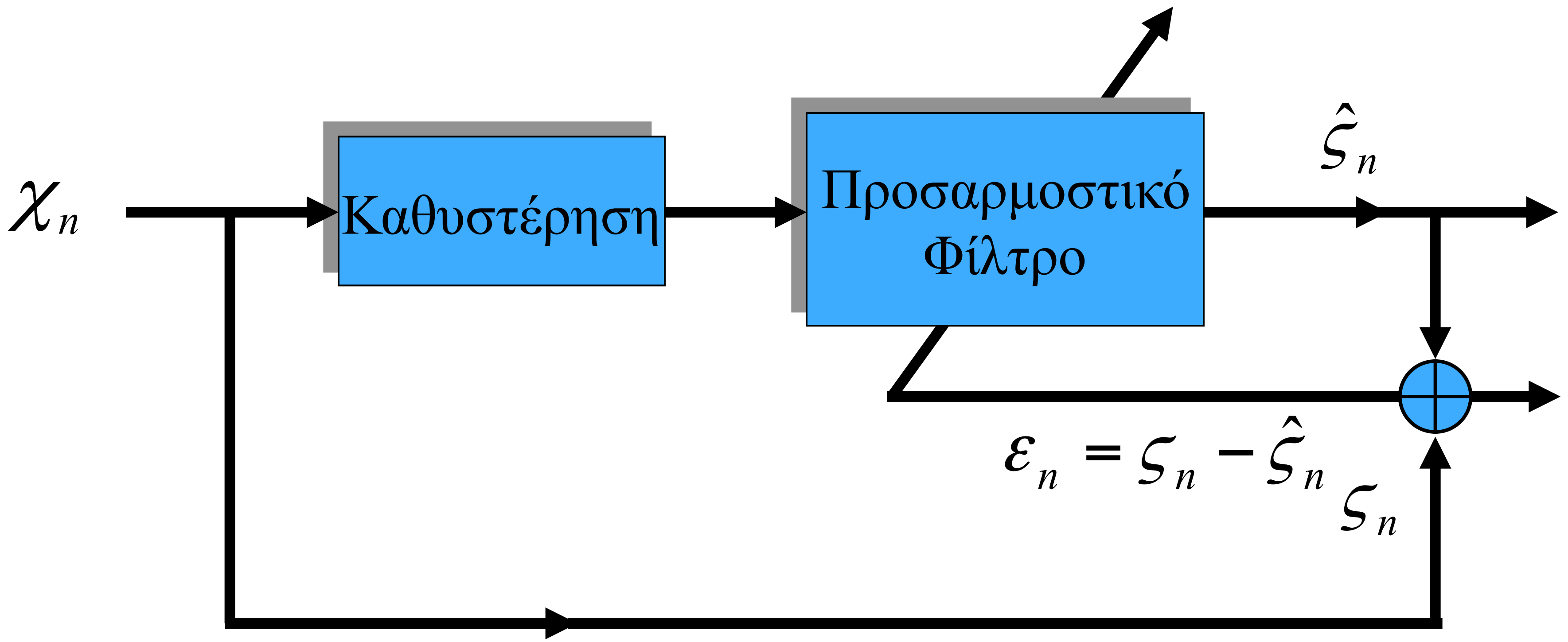
Εφαρμογές Προσαρμοστικών Αλγορίθμων

Καταστολή Παρεμβολής



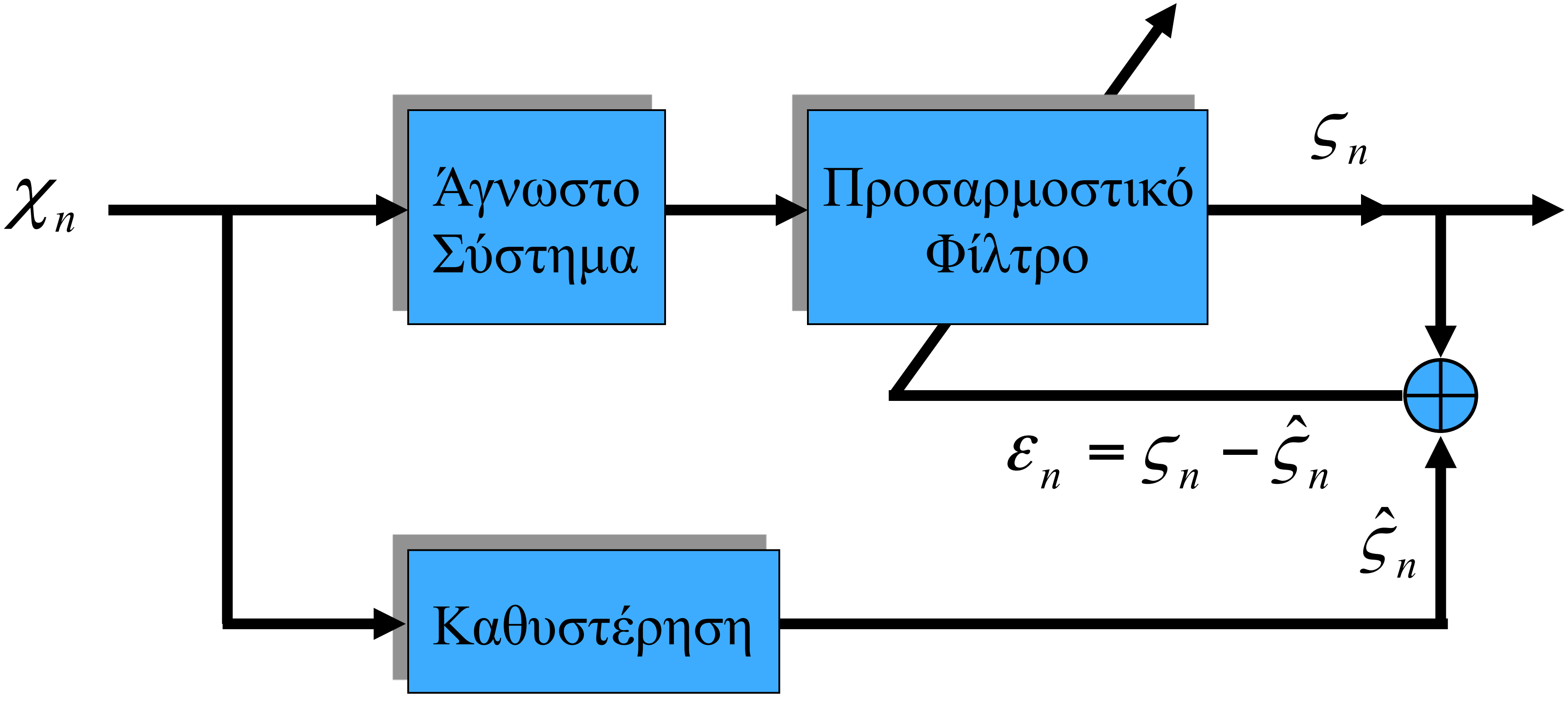
Εφαρμογές Προσαρμοστικών Αλγορίθμων

Πρόβλεψη



Εφαρμογές Προσαρμοστικών Αλγορίθμων

Αντίστροφη Μοντελοποίηση



Εφαρμογές Προσαρμοστικών Αλγορίθμων

Ταυτοποίηση Αγνώστου Συστήματος