ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Εφαρμογες Της Ψηφιακης Επεξεργασιας Σηματων

Μοντελοποιηση Χαμηλης Ταξης ΙδιοΦιλτρα

Διδάσκων: Αναπληρωτής Καθηγητής Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Επικουρικό έργο: Ευάγγελος Σαρτίνας, Παναγιώτης Γεωργαντόπουλος
Πάτρα Οκτώβριος 2019

Μοντελοποιηση Χαμηλης Ταξης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{u}(n)$ μήκους M που αναπαριστά μια συγκεκριμένη υλοποίηση μις στάσιμης με την ευρεία έννοια μηδενικής μέσης τιμής, στοχαστικής διαδικασίς και θέλουμε να μεταδώσουμε αυτό το διάνυσμα σε ένα κανάλι με θόρυβο χρησιμοποιώντας ένα καινούριο σύνολο P διακριτών τιμών με $P < M$.
Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι γνωρίζουμε το μητρώο συνδιασπορών της διαδικασίς:

$$C = \mathbb{E}\{\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^h(n)\} = Q\Lambda Q^H$$

όπου:

$$Q = [\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_M]$$

ένα $M \times M$ μητρώο του οποίου η στήλη $\mathbf{q}_i$ είναι το i-στό ιδιοδιανύσματα του μητρώου C, και

$$\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_M)$$

ένα $M \times M$ διαγώνιο μητρώο που περιέχει τις ιδιοτιμές λ_i , $i = 1, 2, ..., M$ του.

Τότε το αρχικό διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{u}(n) = \sum_{i=1}^{M} c_i(n)\mathbf{q}_i = Q\mathbf{c}(n)$$

και εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε όιτ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{c_i(n)\} &= 0 && (1)\\ \mathbb{E}\{|c_i(n)|^2\} &= \lambda_i && (2)\\ \mathbb{E}\{\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^h(n)\} &= Q\,\underbrace{\mathbb{E}\{\mathbf{c}(n)\mathbf{c}^h(n)\}}_{\Lambda}\,Q^T = C. && (3) \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα $\mathbf{u}(n)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί χρησιμοποιώντας τα P πρώτα ιδιοδιανύσματα του C ως

$$\hat{\mathbf{u}}(n) = \sum_{i=1}^{p} c_i(n)\mathbf{q}_i\,,\; P < M$$

με σφάλμα

$$\mathbf{e}(n) = u(n) - \hat{\mathbf{u}}(n) = \sum_{i=P+1}^{M} c_i(n)\mathbf{q}_i$$

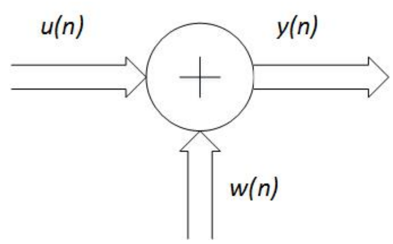
και ενέργεια ίση με την l_2 στάθμη του παραπάνω διανύσματος, δηλαδή:

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{e}(n)\|_2^2\} = \sum_{i=P+1}^{M} \lambda_i.$$

Η παραπάνω σχέση μς επιτρέπει να πούμε ότι η ανακατασκευή $\hat{\mathbf{u}}(n)$ του διανύσμαος είναι καλή, με την προϋπόθεση βέβαια ότι οι ιδιοτιμές λ_i , $i = P+1, ...M$ είναι αρκετά μικρές.

Παραδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μεταδώσουμε σε ενθόρυβο κανάλι ένα σήμα μηδενικής μέσης τιμής. Το διάνυσμα εξόδου $\mathbf{y}(n)$ ενός συστήματος δίνεται από το διάνυσμα εισόδου $\mathbf{u}(n)$, μήκους M, στο οποίο προστίθεται λευκός γκαουσιανός θόρυβος $\mathbf{w}(n)$ ισχύος $\sigma^2_{\mathcal{W}}$ όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



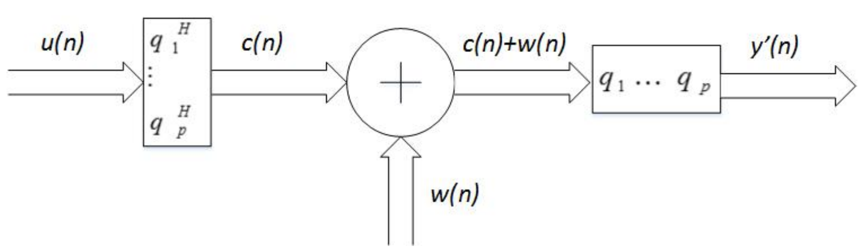
Σχήμα 1: Το προσθετικό μοντέλο θορύβου

Θεωρόντας ότι ο προσθετικός θόρυβος είναι ασυσχέτιστος με το σήμα εισόδου, μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι το μητρώο συνδιασπορών εξόδου-θορύβου είναι $C_{\mathcal{YW}} = \sigma^2 I_M$ όπου I_M το μοναδιαίο $M \times M$ μητρώο, ενώ το μητρώο συνδιασπορών εισόδου-θορύβου θα είναι $R_{\mathcal{YW}} = 0$.

Το σφάλμα μετάδοσης είναι $\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \mathbf{u}(n)$ με

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{e}(n)\|_2^2\} = \mathbb{E}\{\|\mathbf{w}(n)\|_2^2\} = M\sigma^2_{\mathcal{W}} \tag{4}$$

Κάνοντας χρήση των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα συνδιασποράς όπως φαίνεται στο παρακατω σχήμα, μειώνουμε τη διάσταση του διανύσματος που μεταδίδεται σε P.



Σχήμα 2: Μετάδοση ¨ συμπιεσμένου ¨ σήματος

Στην περίπτωση αυτή το σφάλμα μετάδοσης είναι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\|\hat{\mathbf{y}}(n)-\mathbf{u}(n)\|_2^2\} &= \mathbb{E}\{\left\|Q_P Q_P^H\mathbf{u}(n)+Q_P^H\mathbf{w}(n)-\mathbf{u}(n)\right\|_2^2\} \\ &= \sum_{i=P+1}^{M}\lambda_i + P\sigma_{\mathcal{W}}^2 \qquad (5)\end{aligned}$$

Από τις Σχέσεις (4) και (5) εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο ακόλουθς κανόνς

$$(M-P)\sigma_{\mathcal{W}}^2 \lessgtr \sum_{i=p+1}^{M}\lambda_i$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δούμε σε ποιές περιπτώσεις η αποστολή $P<M$ τιμών αποδίδει καλύτερα.

Ερωτησεις

1 Αποδείξτε τις Σχέσεις (1-3).

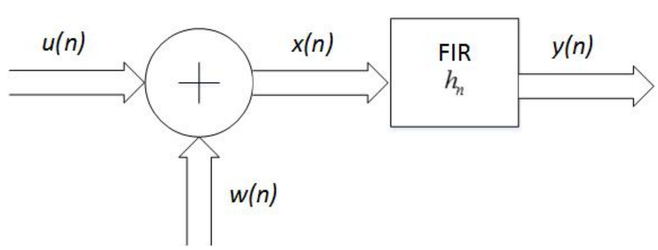
2 Αποδείξτε τις Σχέσεις (4) και (5).

3 Σε ποιές περιπτώσεις η αποστολή P τιμών αποδίδει καλύτερα; Καταγράψτε την απάντησή σας.

4 Πειραματιστείτε στο Matlab και καταγράψτε τα αποτελέσματα των πιο σημαντικών πειραμάτων σας.

Ιδιοφιλτρα (Eigenfilters)

Ας θεωρήσουμε και πάλι το προσθετικό μοντέλο θορύβου της προηγούμενης παραγράφου. Ας υποθέσουμε δηλαδή ότι το σήμα εισόδου $u(n)$, είναι μία στάσιμη δεύτερης τάξης με την ευρεία έννοια διαδικασία, με μέση τιμή μηδέν και μητρώο συνδιασπορών C, στην οποία προστίθεται λευκός γκαουσιανός θόρυβος $w(n)$ με διασπορά σ_w^2 και $\mathbb{E}\{u(n)w(n)\}=0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Γραμμικό φιλτράρισμα για την απομάκρυνση προσθετικού λευκού θορύβου

Η έξοδς του συστήματος θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) \\ &= h(n) * u(n) + h(n) * w(n) \end{aligned}$$

και η μέση ισχύς της εξόδου είναι

$$P_x = \mathbf{h}^H C\mathbf{h} + \sigma_w^2 \mathbb{I}$$

ενώ η μέση ισχύς του θορύβου είναι

$$P_0 = \mathbf{h}^H C\mathbf{h} N_0 = \sigma_{\mathcal{W}}^2 \mathbf{h}^H \mathbf{h} = \sigma_{\mathcal{W}}^2 ||\mathbf{h}||_2^2.$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το λόγο του σήματος εξόδου προς το θόρυβο δηλαδή τον λόγο:

$$SNR = P_0/N_0,$$

ή ισοδύναμα [1]:

$$\max_{\mathbf{h}} \frac{\mathbf{h}^h C\mathbf{h}}{\sigma_w^2 \mathbf{h}^h \mathbf{h}}. \tag{6}$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα ότι οι συντελεστές της κρουστικής απόκρισης του βέλτιστου φίλτρου είναι οι ακόλουθοι:

$$\mathbf{h}^* = \mathbf{q}_{max}$$

όπου $\mathbf{q}_{max}$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή λ_{max}.

Αποδειξη με χρηση πολλαπλασιαστη Lagrange

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης (6) μπορούμε να το γράψουμε ισοδύναμα ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{h}} \mathbf{h}^h C\mathbf{h} \\ \text{με συνθήκη:} \quad & ||\mathbf{h}||_2^2 = 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Ορίζοντας τώρα την ακόλουθη επαυξημένη συνάρτηση κόστους :

$$\mathcal{L}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^h C\mathbf{h} - \lambda(\|\mathbf{h}\|_2^2 - 1)$$

και μεγιστοποιώντας την ως προς τους συντελεστές της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου, καταλήγουμε στις ακόλουθες κανονικές εξισώσεις οι οποίες αποτελούν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$C\mathbf{h} - \lambda\mathbf{h} = 0,$$

[1] Ο λόγος που υπεισέρχεται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι γνωστός ως ¨λόγος του Rayleigh¨. Η γενική μορφή του λόγου Rayleigh είναι η ακόλουθη:

$$\mathcal{R}(\mathbf{h}) = \frac{\mathbf{h}^h A\mathbf{h}}{\mathbf{h}^h B\mathbf{h}},$$

όπου $A,\ B$ θετικά ημιορισμένα τετραγωνικά μητρώα.

ή ισοδύναμα:

$$C\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}.$$

Από την παραπάνω σχέση είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε ότι η βέλτιστη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης (7), είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή του μητρώου C και ότι ο πολλαπλασιαστής του Langrange ισούται με τη μέγιστη ιδιοτιμή του μητρώου.

Λογος Rayleigh - Προβληματα Βελτιστοποιησης με Συνθηκες

Ας υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές του μητρώου C που υπεισέρχεται στο λόγο του Rayleigh είναι ταξινομημένες κατά αύξουσα σειρά, δηλαδή:

$$\lambda_{min} \equiv \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_M \equiv \lambda_{max}.$$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, αν περιορίσουμε τον χώρο των λύσεων στην υπερσφαίρα:

$$\mathcal{H}_M = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M : \ ||\mathbf{h}||_2^2 = 1\},$$

ο λόγος του Rayleigh $\mathcal{R}(\mathbf{h})$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του αν επιλέξουμε ως $\mathbf{h}$ το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{q}_M$ που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του μητρώου, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} \equiv \lambda_M &= \max_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}_M} \mathcal{R}(\mathbf{h}) \equiv \mathcal{R}(\mathbf{q}_M) \\ \mathbf{q}_M &= arg \max_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}_M} \mathcal{R}(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο παραπάνω λόγος παίρνει την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει αν χρησιμοποιήσουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{q}_1$, που αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιδιοτιμή, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \lambda_{min} \equiv \lambda_1 &= \min_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}_M} \mathcal{R}(\mathbf{h}) \equiv \mathcal{R}(\mathbf{q}_1) \\ \mathbf{q}_1 &= arg \min_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}_M} \mathcal{R}(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Επομένως, οι δύο ακραίες ιδιοτιμές αποτελούν την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του λόγου και προκύπτουν από τις λύσεις των αντίστοιχων προβλημάτων βελτιστοποίησης που αναφέρθηκαν παραπάνω. Το ερώτημα που τίθεται εδώ είναι αν αποτελούν και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του μητρώου λύσεις προβλημάτων βελτιστοποίσης. Η απάντηση, όπως θα δούμε στη συνέχεια, στο παραπάνω ερώτημα είναι καταφατική. Για το σκοπό αυτό, θα περιορίσουμε περαιτέρω το χώρο αναζήτησης των λύσεων, είτε στους χώρους :

$$\mathcal{V}_{M-k+1}^i = \{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M \text{ και } Q_{k-1}^h\mathbf{h} = 0\},\ k = 2,\ 3, \cdots,\ M{-}1,\ i = 1,\ \cdots, \begin{pmatrix} M \\ M-k+1 \end{pmatrix}$$

είτε :

$$\mathcal{V}_k^i = \{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_M \text{ και } Q_{M-k}^h\mathbf{h} = 0\},\ k = 2,\ 3, \cdots,\ M-1,\ i = 1,\ \cdots, \begin{pmatrix} M \\ k-1 \end{pmatrix}$$

όπου Q_l το μητρώο που προκύπτει από το μητρώο Q αν κρατήσουμε l από τις M στήλες του και $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ είναι οι συνδυασμοί των n ανά m. Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τις παραπάνω σχέσεις, για κάθε τιμή του k, το πλήθος, για παράδειγμα των διαφορετικών χώρων $\mathcal{V}_k^i$ που μπορούμε να ορίσουμε από τις παραπάνω σχέσεις είναι $\begin{pmatrix} M \\ k-1 \end{pmatrix}$.
Τότε, η $k-\textit{στη}$ ιδιοτιμή του μητρώου Q μπορεί να χαρακτηριστεί ως η βέλτιστη τιμή των ακόλουθων προβλημάτων βελτιστοποίησης :

$$\lambda_k = \max_{\mathcal{V}_{M-k+1}} \min_{\mathbf{h}} \mathcal{R}(\mathbf{h})$$

είτε:

$$\lambda_k = \min_{\mathcal{V}_k} \max_{\mathbf{h}} \mathcal{R}(\mathbf{h}).$$