ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Έλεγχος Υποθέσεων

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Έλεγχος Υποθέσεων

Ανταγωνιστικές Υποθέσεις

$$\mathcal{H}_0 : \mathrm{X} \sim \mathcal{N}(0,1) \ \ (\text{ή } \ \mu = 0\,)$$

$$\mathcal{H}_{1\text{v}} : \mathrm{X} \sim \mathcal{N}(1,1) \ \ (\text{ή } \ \mu = 1\,).$$

Ένα Παράδειγμα: Το πρόβλημα της ανίχνευσης στην ΨΕΣ

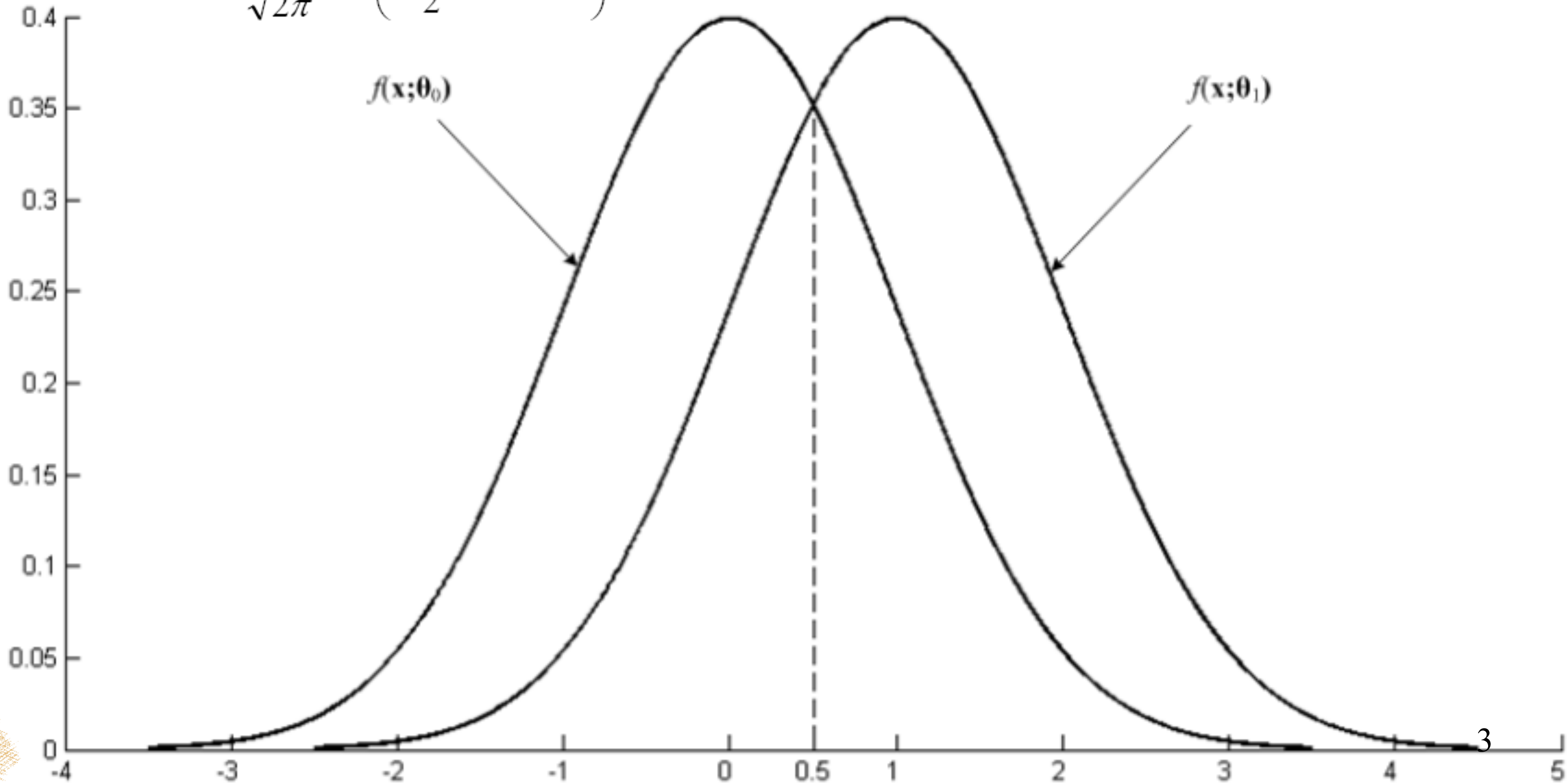
$$\mathcal{H}_0: \qquad x[0] = w[0]$$

$$\mathcal{H}_1: \qquad x[0] = s[0] + w[0]$$

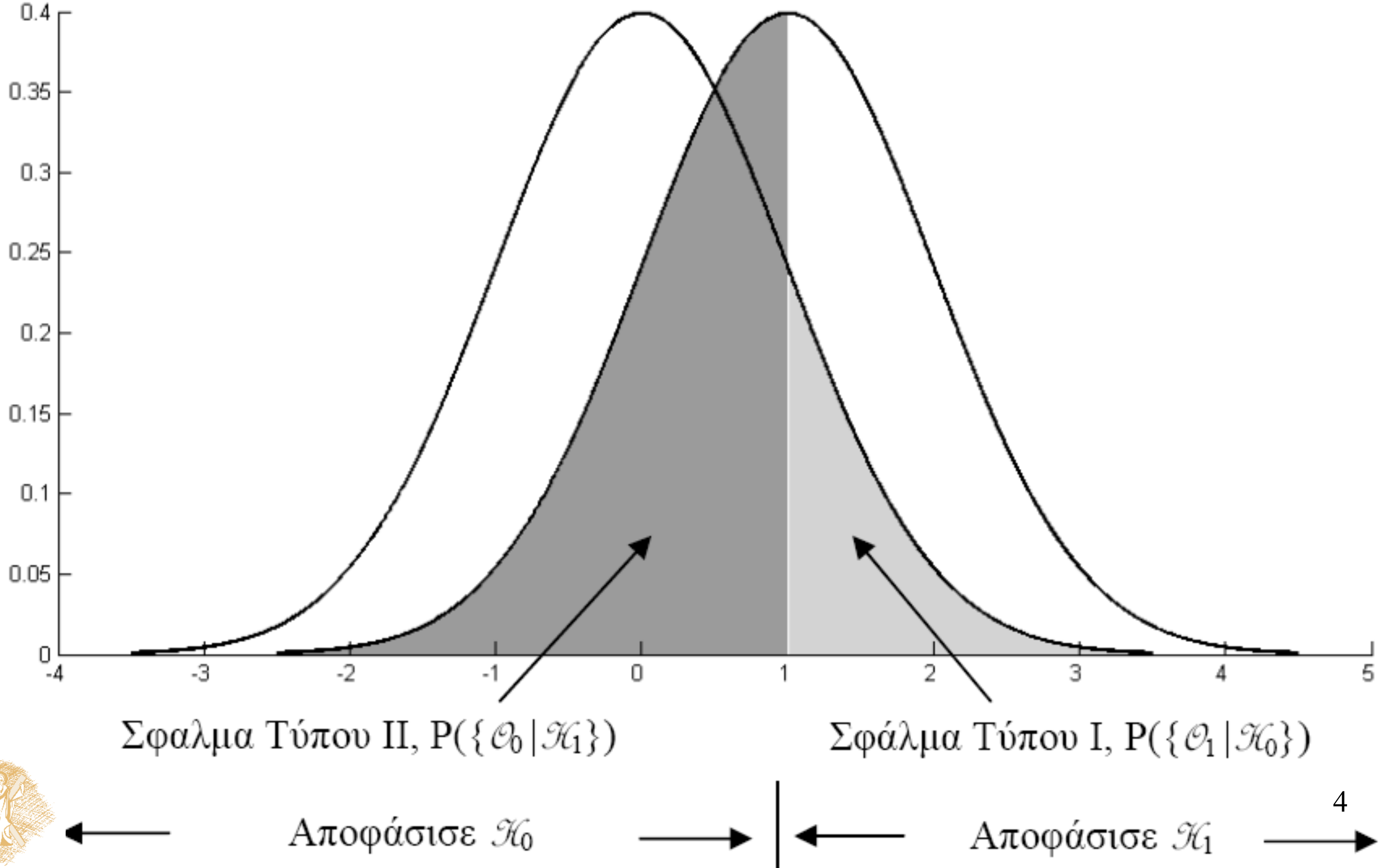
Έλεγχος Υποθέσεων

$$f(\mathrm{x};\theta_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x[0])^2\right)$$

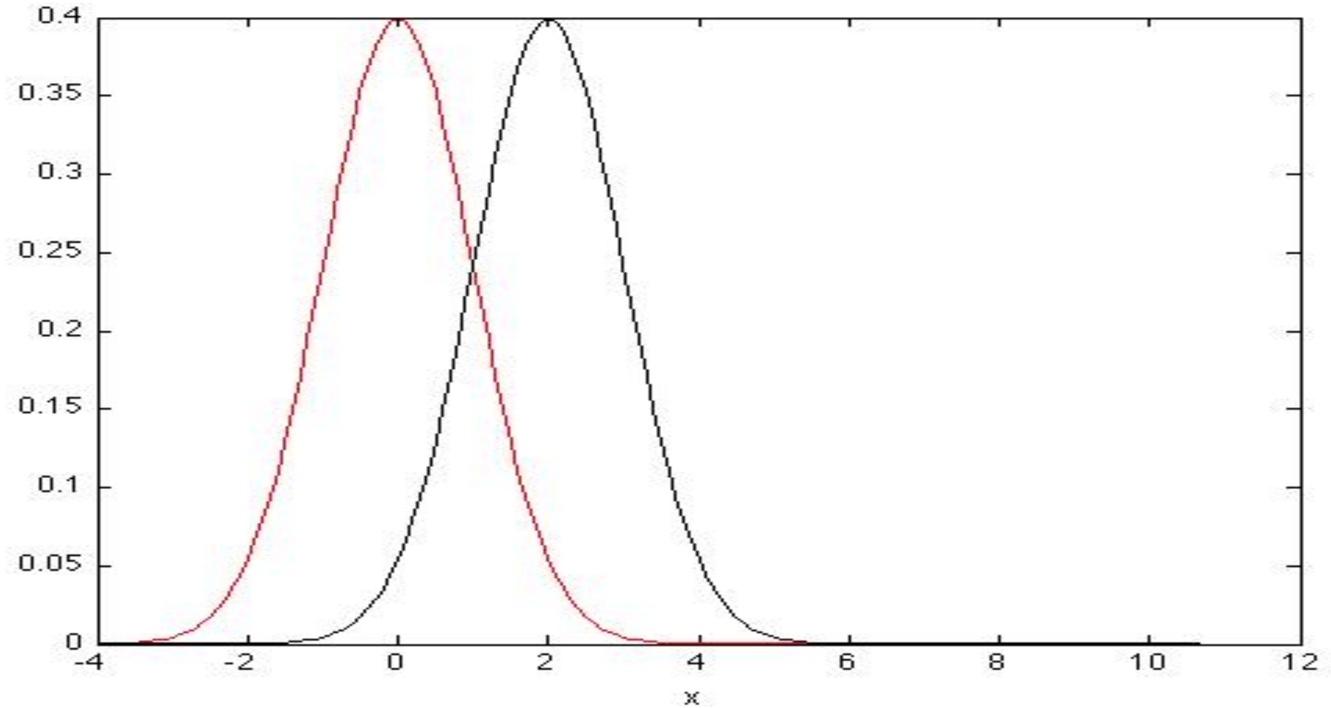
$$f(\mathrm{x};\theta_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x[0]-1)^2\right)$$



Έλεγχος Υποθέσεων



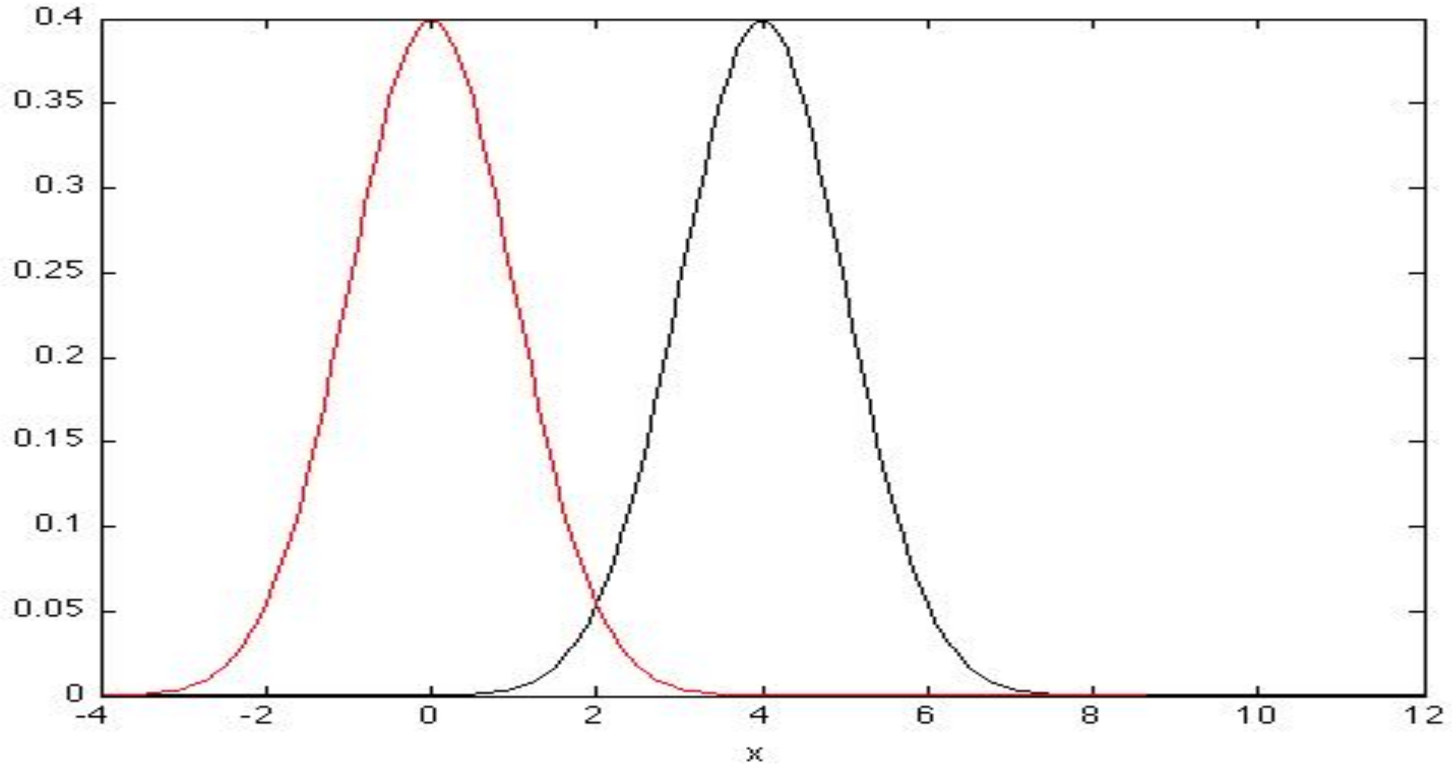
Έλεγχος Υποθέσεων



Σφαλμα Τύπου II, $P(\{\mathcal{O}_0 | \mathcal{H}_1\})$ Σφάλμα Τύπου I, $P(\{\mathcal{O}_1 | \mathcal{H}_0\})$

Αποφάσισε $\mathcal{H}_0$ | Αποφάσισε $\mathcal{H}_1$

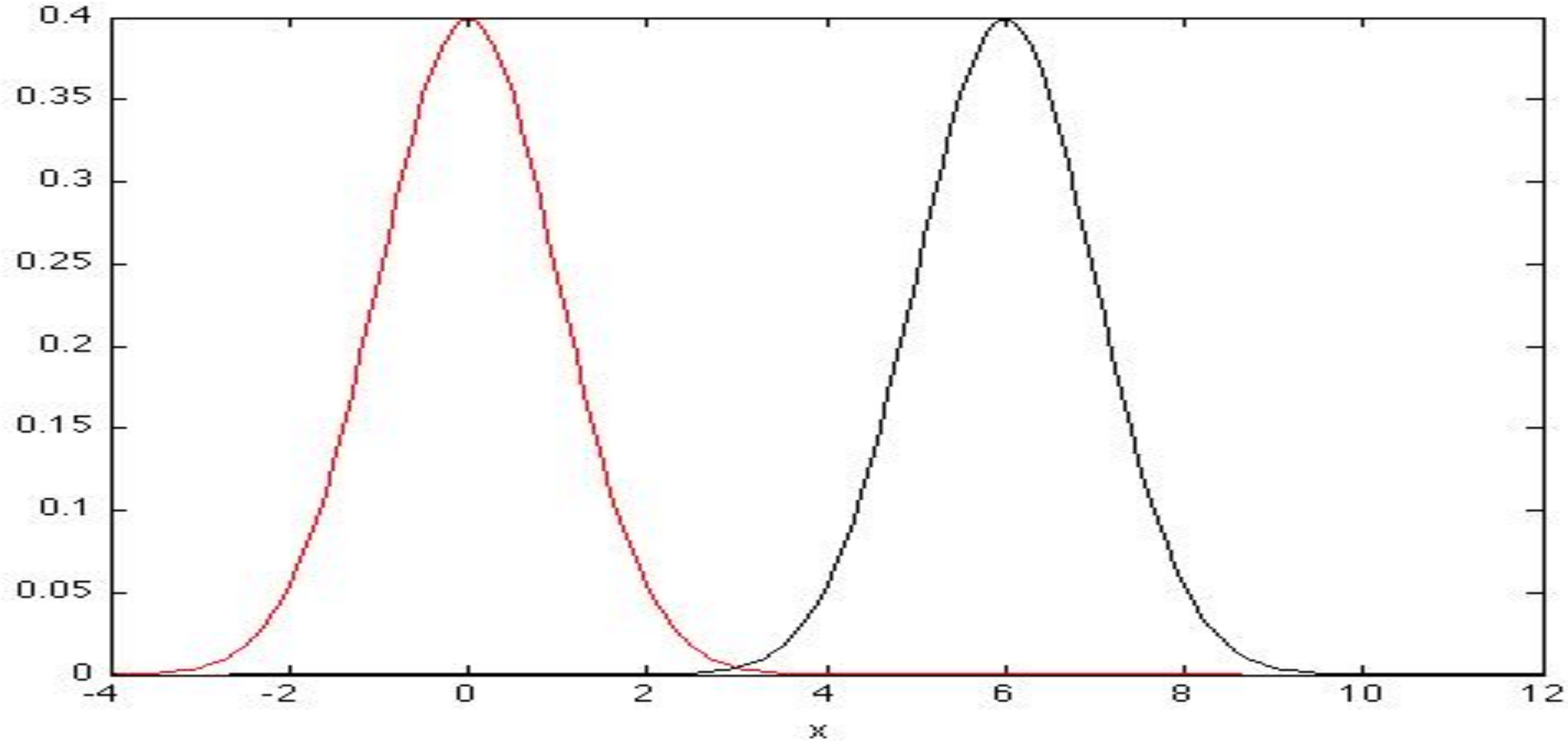
Έλεγχος Υποθέσεων



Σφαλμα Τύπου II, $P(\{\mathcal{O}_0 | \mathcal{H}_1\})$ Σφάλμα Τύπου I, $P(\{\mathcal{O}_1 | \mathcal{H}_0\})$

Αποφάσισε $\mathcal{H}_0$ | Αποφάσισε $\mathcal{H}_1$

Έλεγχος Υποθέσεων



Σφαλμα Τύπου II, $P(\{\mathcal{O}_0 | \mathcal{H}_1\})$ Σφάλμα Τύπου I, $P(\{\mathcal{O}_1 | \mathcal{H}_0\})$

← Αποφάσισε $\mathcal{H}_0$ → | ← Αποφάσισε $\mathcal{H}_1$ →

Έλεγχος Υποθέσεων

Το test:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x[0]-1)^2\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x[0])^2\right)} > \lambda$$

ή ισοδύναμα: $x[0] > \ln(\lambda) + \frac{1}{2}.$

με $T = \ln(\lambda) + 1/2$ **και**

$$\int_T^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)dt = Q(\mathrm{T}) = 0.15$$

Έλεγχος Υποθέσεων

Παραμετρικός Χώρος-Απλές Υποθέσεις

Θα ξεκινήσουμε υποθέτοντας ότι τα υποσύνολα του παραμετρικού χώρου $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}_0$ και $\mathbf{\Omega}_1$, είναι μονοσύνολα. Δηλαδή $\mathbf{\Omega}_0=\{\boldsymbol{\theta}_0\}$ και $\mathbf{\Omega}_1=\{\boldsymbol{\theta}_1\}$. Στην περίπτωση αυτή οι υποθέσεις που ορίσθηκαν στη Σχέση (1) οναμάζονται *απλές*.

$$\mathcal{H}_0: \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{\Omega}_0 \subseteq \mathbf{\Omega}$$

$$\mathcal{H}_1: \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{\Omega}_1 \subseteq \mathbf{\Omega}.$$

$$\mathcal{H}_0: \mathrm{X} \sim f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0) \quad (\text{ή } \boldsymbol{\theta}= \boldsymbol{\theta}_0)$$

$$\mathcal{H}_1: \mathrm{X} \sim f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1) \quad (\text{ή } \boldsymbol{\theta}= \boldsymbol{\theta}_1)$$

Έλεγχος Υποθέσεων

Γεγονότα:

$\{\mathcal{O}_0 \,\&\, \mathcal{H}_0\}$: Σωστή Απόφαση

$\{\mathcal{O}_1 \,\&\, \mathcal{H}_0\}$: Λάθος Απόφαση

$\{\mathcal{O}_1 \,\&\, \mathcal{H}_1\}$: Σωστή Απόφαση

$\{\mathcal{O}_0 \,\&\, \mathcal{H}_1\}$: Λάθος Απόφαση.

Συνάρτηση Διακυνδίνευσης: $\mathrm{R}(\boldsymbol{\delta}) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} L_{ij} \mathrm{P}(\{\mathcal{O}_i \,\&\, \mathcal{H}_j\})$.

όπου $\mathrm{P}(\{\mathcal{O}_i \,\&\, \mathcal{H}_j\}) = \mathrm{P}(\{\mathcal{O}_i \,|\, \mathcal{H}_j\})\, \mathrm{P}(\mathcal{H}_j)$

Πώς μπορούμε να συνεχίσουμε;

Έλεγχος Υποθέσεων κατά Bayes

Συνάρτηση Διακυνδίνευσης:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}(\boldsymbol{\delta}) &= \int \delta_0(\mathbf{x})\,[L_{00}\,\mathrm{P}(\mathscr{H}_0)\,f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0) + L_{01}\,\mathrm{P}(\mathscr{H}_1)\,f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)]\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad + \int \delta_1(\mathbf{x})\,[L_{10}\,\mathrm{P}(\mathscr{H}_0)\,f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0) + L_{11}\,\mathrm{P}(\mathscr{H}_1)\,f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)]\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int (\delta_0(\mathbf{x})\,c_0(\mathbf{x}) + \delta_1(\mathbf{x})\,c_1(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

όπου

$$c_0(\mathbf{x}) = L_{00}\,\mathrm{P}(\mathscr{H}_0)\,f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0) + L_{01}\,\mathrm{P}(\mathscr{H}_1)\,f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)$$

$$c_1(\mathbf{x}) = L_{10}\,\mathrm{P}(\mathscr{H}_0)\,f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0) + L_{11}\,\mathrm{P}(\mathscr{H}_1)\,f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1).$$

Έλεγχος Υποθέσεων κατά Bayes

Συνάρτηση Διακυνδίνευσης:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\delta}) = \int (\delta_0(\mathbf{x})\, c_0(\mathbf{x}) + \delta_1(\mathbf{x})\, c_1(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$\geq \int \min_{i=0,1}\, c_i(\mathbf{x})(\delta_0(\mathbf{x}) + \delta_1(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$= \int \min_{i=0,1}\, c_i(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Ορίζουμε τώρα τα ακόλουθα σύνολα του παραμετρικού χώρου

$$\mathbb{S}_0 = \{\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}}\colon c_0(\mathbf{x}) < c_1(\mathbf{x}) \}$$
$$\mathbb{S}_1 = \{\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}}\colon c_0(\mathbf{x}) > c_1(\mathbf{x}) \}$$
$$\mathbb{S}_{01} = \{\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}}\colon c_0(\mathbf{x}) = c_1(\mathbf{x}) \}.$$

Έλεγχος Υποθέσεων κατά Bayes

Συνάρτηση Διακυνδίνευσης:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\delta}) \geq \int \min_{i=0,1}\ c_i(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \int_{\boldsymbol{S_0}} c_0(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\boldsymbol{S_1}} c_1(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\boldsymbol{S_{01}}} (\gamma_0 c_0(\mathbf{x}) + \gamma_1 c_1(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \int (c_0(\mathbf{x})(\mathbf{1}_{\mathbb{S}_0}(\mathbf{x}) + \gamma_0(\mathbf{x})\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{01}}(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x} + \int (c_1(\mathbf{x})(\mathbf{1}_{\mathbb{S}_1}(\mathbf{x}) + \gamma_1(\mathbf{x})\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{01}}(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x},$$

με $\gamma_0(\mathbf{x}) + \gamma_1(\mathbf{x}) = 1.$

Ορίζουμε τις σσ $\delta_i(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\mathbb{S}_i}(\mathbf{x}) + \gamma_i(\mathbf{x})\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{01}}(\mathbf{x}),\ i=0,\ 1.$

Έλεγχος Υποθέσεων κατά Bayes

και καταλήγουμε στο ακόλουθο βέλτιστο test

$$\mathscr{H}_1 \qquad\qquad \text{όταν } \mathscr{L}(\mathbf{x}) > \frac{(L_{10}-L_{11})}{(L_{01}-L_{00})}(\mathrm{P}(\mathscr{H}_0)/\ \mathrm{P}(\mathscr{H}_1))$$

$$\mathscr{H}_1 \quad \text{με πιθανότητα } \gamma_1(\mathbf{x}) \quad \text{όταν } \mathscr{L}(\mathbf{x}) = \frac{(L_{10}-L_{11})}{(L_{01}-L_{00})}(\mathrm{P}(\mathscr{H}_0)/\ \mathrm{P}(\mathscr{H}_1))$$

$$\mathscr{H}_0 \qquad\qquad \text{όταν } \mathscr{L}(\mathbf{x}) < \frac{(L_{10}-L_{11})}{(L_{01}-L_{00})}(\mathrm{P}(\mathscr{H}_0)/\ \mathrm{P}(\mathscr{H}_1))$$

$$\mathscr{H}_0 \quad \text{με πιθανότητα } \gamma_0(\mathbf{x}) \quad \text{όταν } \mathscr{L}(\mathbf{x}) = \frac{(L_{10}-L_{11})}{(L_{01}-L_{00})}(\mathrm{P}(\mathscr{H}_0)/\ \mathrm{P}(\mathscr{H}_1)),$$

όπου $\mathscr{L}(\mathbf{x})$ ο λόγος πιθανοφάνειας,

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)/\ f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0).$$

Έλεγχος Υποθέσεων κατά Bayes

Ειδική , αλλά πολύ χρήσιμη περίπτωση: $L_{00} = L_{11} = 0$ και $L_{01} = L_{10} = 1$

Συνάρτηση Διακυνδίνευσης: $R(\boldsymbol{\delta}) = P(\{\mathcal{O}_0 \,\&\, \mathcal{H}_1\}) + P(\{\mathcal{O}_1 \,\&\, \mathcal{H}_0\})$,

Βέλτιστο test:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{H}_1 & & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x}) > P(\mathcal{H}_0)/\, P(\mathcal{H}_1) \\
\mathcal{H}_1 & \text{με πιθανότητα } \gamma_1(\mathbf{x}) & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x}) = P(\mathcal{H}_0)/\, P(\mathcal{H}_1) \\
\mathcal{H}_0 & & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x}) < P(\mathcal{H}_0)/\, P(\mathcal{H}_1) \\
\mathcal{H}_0 & \text{με πιθανότητα } \gamma_0(\mathbf{x}) & \text{όταν } \mathcal{L}(\mathbf{x}) = P(\mathcal{H}_0)/\, P(\mathcal{H}_1).
\end{array}
$$

Έλεγχος Υποθέσεων κατά Bayes

Ετεροβαρείς (μη συμμετρικές υποθέσεις)

Πιθανότητα Ανίχνευσης (Detection): $P_{\mathcal{D}} = P(\{\mathcal{O}_1 \,|\, \mathcal{H}_1\})$

Πιθανότητα Λανθασμένου Συναγερμού (False Alarm): $P_{\mathfrak{FA}} = P(\{\mathcal{O}_1 \,|\, \mathcal{H}_0\})$

Πιθανότητα Απώλειας (Miss): $P_{\mathfrak{M}} = P(\{\mathcal{O}_0 \,|\, \mathcal{H}_1\})$,

Πρόβλημα Βελτιστοποίησης:

$$\max_{\delta} P_{\mathcal{D}}$$

με περιορισμό

$$P_{\mathfrak{FA}} \leq \alpha,$$

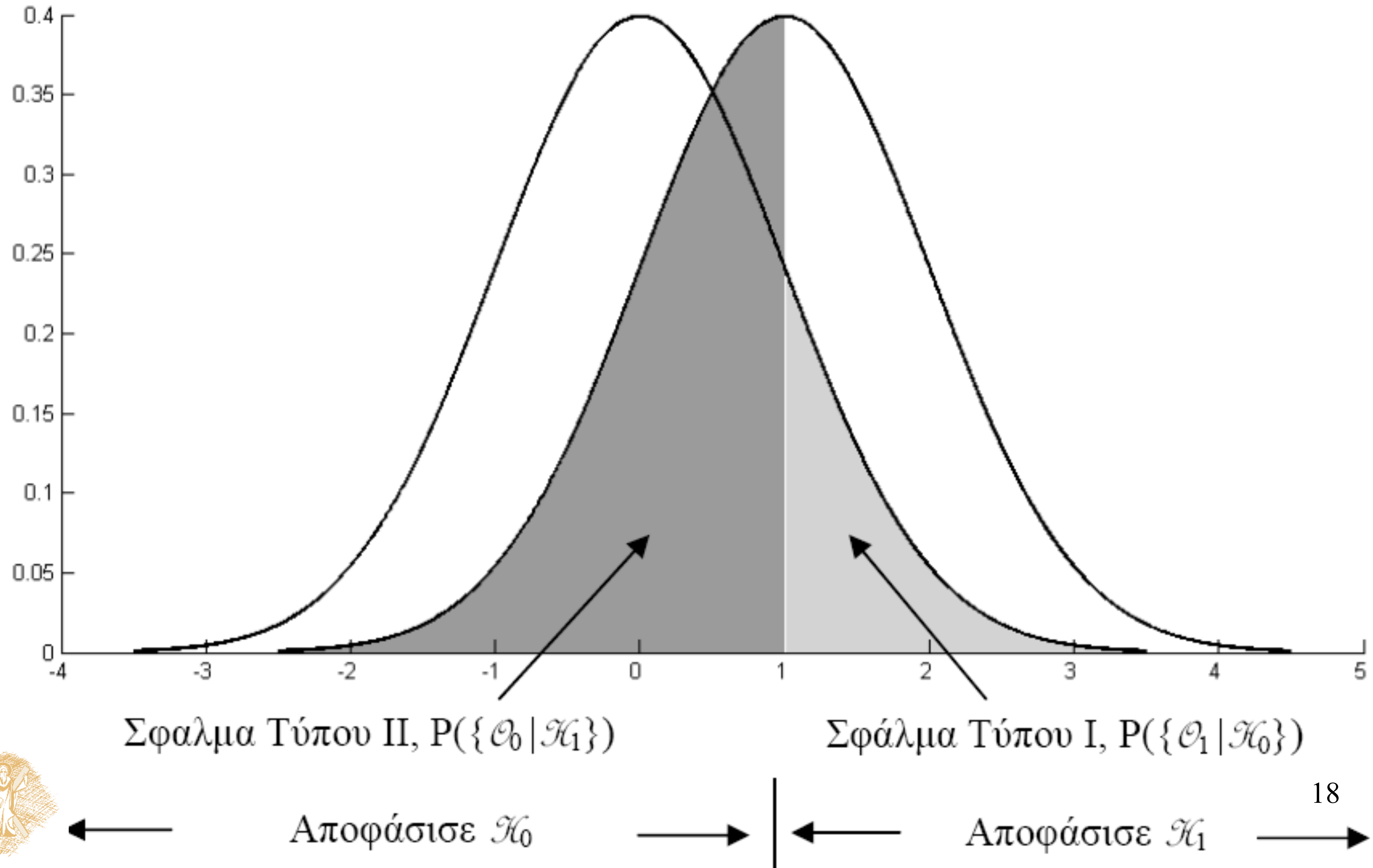
Έλεγχος Υποθέσεων κατά Neyman Pearson

Συνάρτηση Κόστους: $P_{\mathfrak{D}}(\delta) = P(\{\mathcal{O}_0 \mid \mathcal{H}_1\}) = \int \delta_0(\mathbf{x}) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)\,d\mathbf{x}$ **(Σφάλμα Τύπου Ι)**

Συνθήκη: $P_{\mathfrak{FA}}(\delta) = P(\{\mathcal{O}_1 \mid \mathcal{H}_0\}) = \int \delta_1^{\,1}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0)\,d\mathbf{x}$ **(Σφάλμα Τύπου ΙΙ)**

Επαυξημένη Συνάρτηση κόστους: $P(\delta) = \int \delta_1(\mathbf{x}) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1)\,d\mathbf{x} - \lambda \int \delta_1(\mathbf{x}) f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0)\,d\mathbf{x},$

Έλεγχος Υποθέσεων κατά Neyman Pearson



Έλεγχος Υποθέσεων κατά Neyman Pearson

Ορίζουμε τώρα τα ακόλουθα σύνολα του παραμετρικού χώρου

$$\mathbb{S}_0=\{\ \mathbf{x}\in\mathcal{R}^N:\ \mathcal{L}(\mathbf{x})<\lambda\}$$

$$\mathbb{S}_1=\{\ \mathbf{x}\in\mathcal{R}^N:\ \mathcal{L}(\mathbf{x})>\lambda\}$$

$$\mathbb{S}_{01}=\{\ \mathbf{x}\in\mathcal{R}^N:\ \mathcal{L}(\mathbf{x})=\lambda\},$$

και καταλήγουμε στο ακόλουθο βέλτιστο test:

$\mathcal{H}_1$		όταν $\mathcal{L}(\mathbf{x})>\lambda$
$\mathcal{H}_1$	με πιθανότητα $\gamma_1(\mathbf{x})$	όταν $\mathcal{L}(\mathbf{x})=\lambda$
$\mathcal{H}_0$		όταν $\mathcal{L}(\mathbf{x})<\lambda$
$\mathcal{H}_0$	με πιθανότητα $\gamma_0(\mathbf{x})$	όταν $\mathcal{L}(\mathbf{x})=\lambda$

Έλεγχος Υποθέσεων κατά Neyman Pearson

Συνέχεια του παραδείγματος...

Το test: $$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x[0]-1)^2\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x[0])^2\right)} > \lambda$$

ή ισοδύναμα: $x[0] > \ln(\lambda) + \frac{1}{2}.$

με $T = \ln(\lambda) + 1/2$ **και**

$$\int_T^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)dt = Q(\mathrm{T}) = 0.15$$