



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

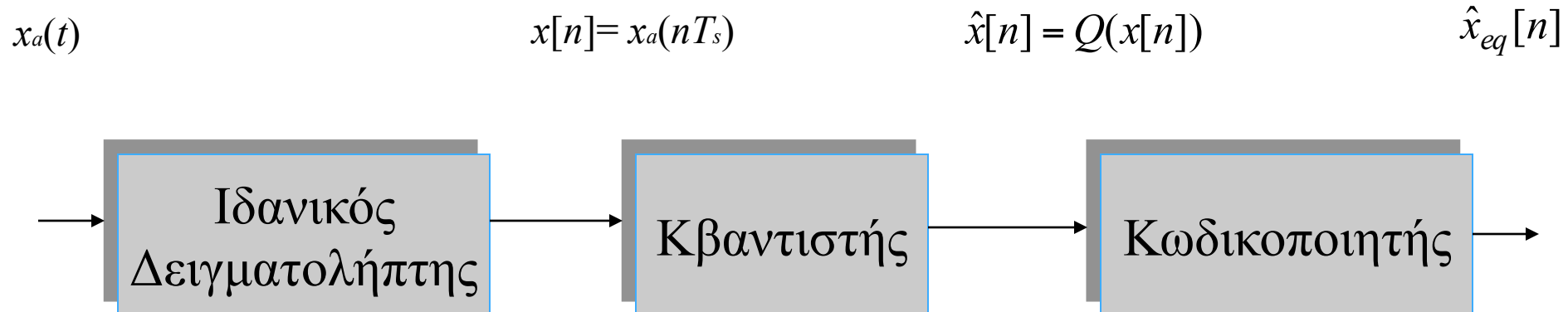
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

- © Μετατροπείς A/D-Διαμόρφωση Δ
Μετατροπείς Σ-Δ

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Μετατροπή A/D

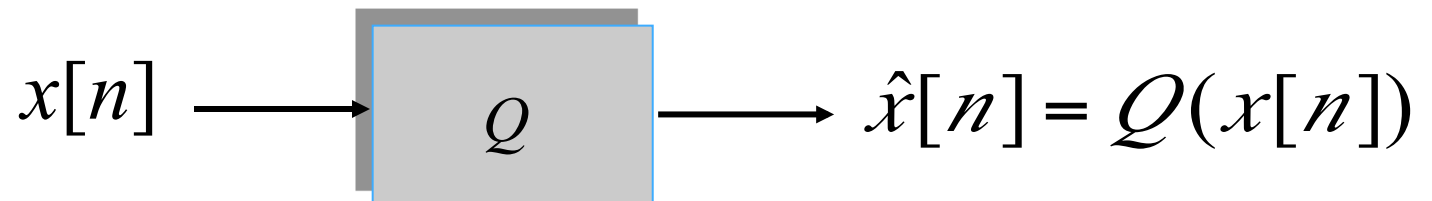
Μοντέλο Μετατροπέα A/D



Κβάντιση

$(b+1)$ -bit αναπαράσταση σταθερής υποδιαστολής

S	α_{-1}	α_{-2}	...	α_{-b}
	2^{-1}	2^{-2}	...	2^{-b}



Μετατροπή A/D

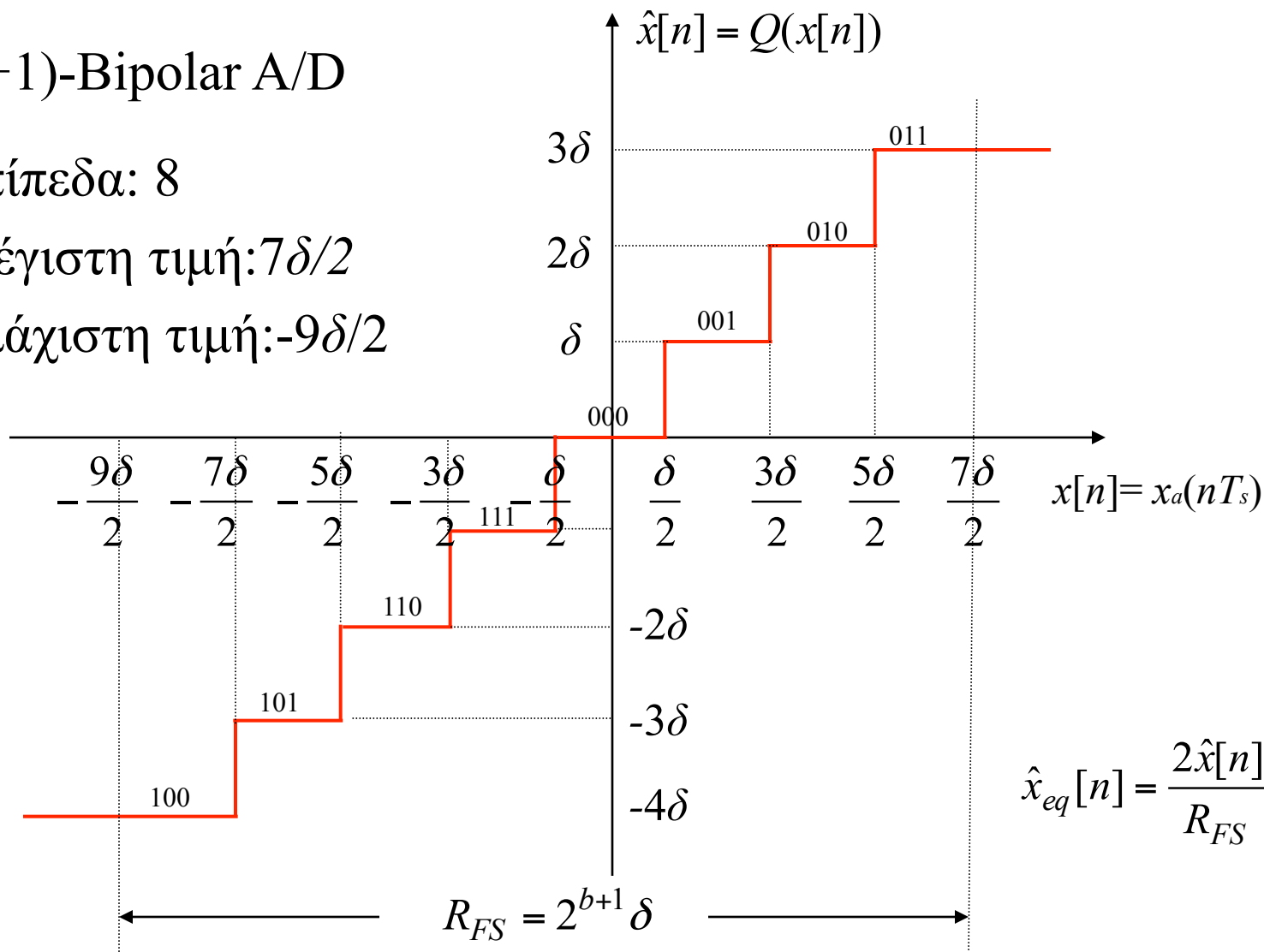
Χαρακτηριστική Εισόδου-Εξόδου

$(b+1)$ -Bipolar A/D

Επίπεδα: 8

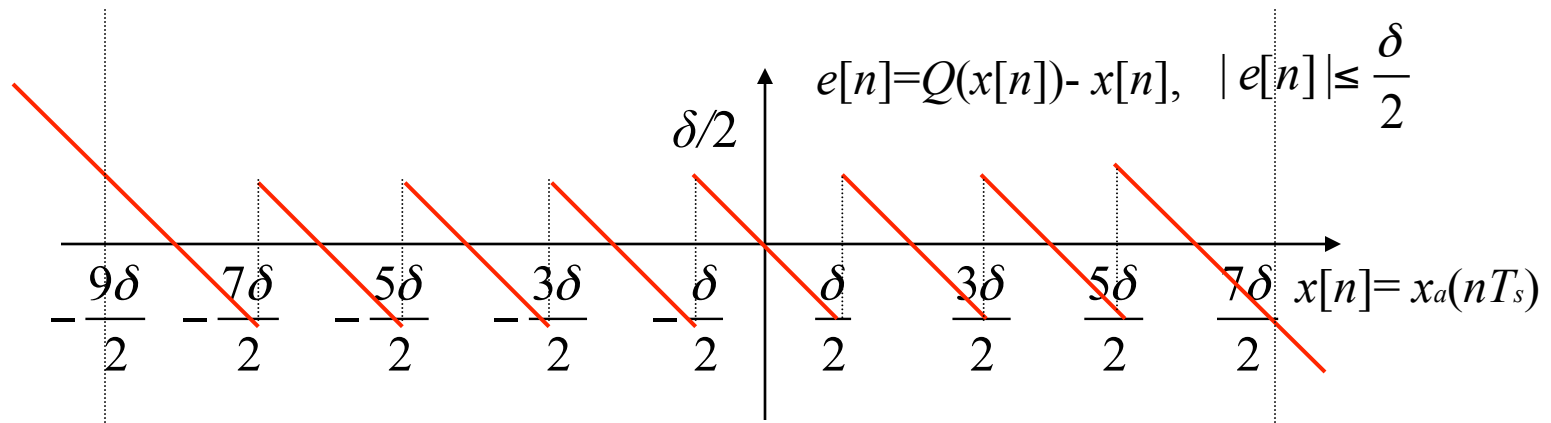
Μέγιστη τιμή: $7\delta/2$

Ελάχιστη τιμή: $-9\delta/2$



Μετατροπή Α/D

Σφάλμα Κβάντισης: $-(2^{b+1} + 1) \frac{\delta}{2} \leq x_a(nT_s) \leq (2^{b+1} - 1) \frac{\delta}{2}$

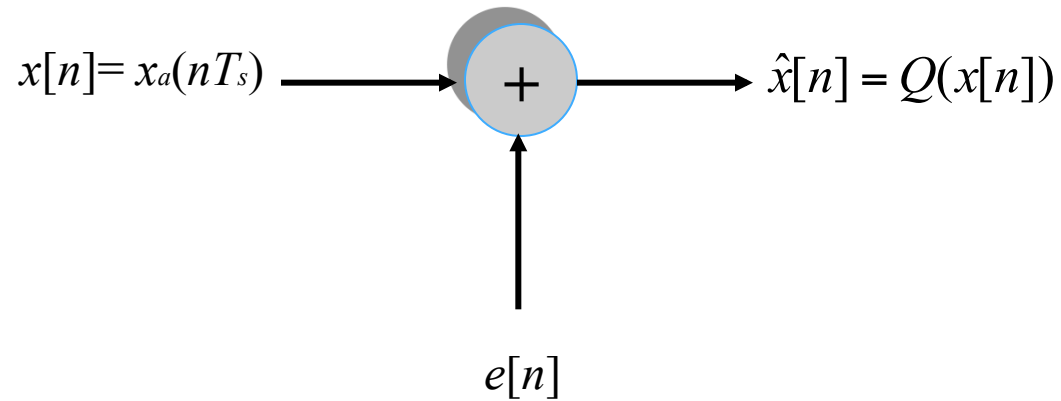


Σφάλμα Κόρου – Saturation error (Overload noise of A/D)



Μετατροπή A/D

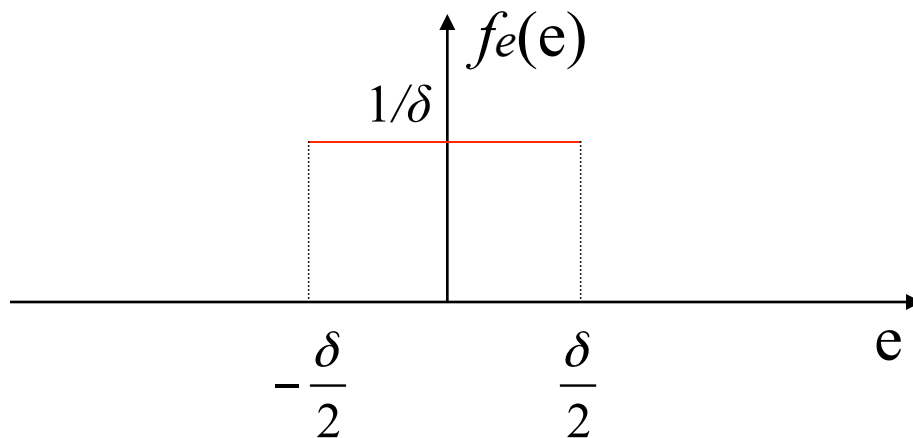
Στατιστικό Μοντέλο Κβαντιστή



Μετατροπή A/D

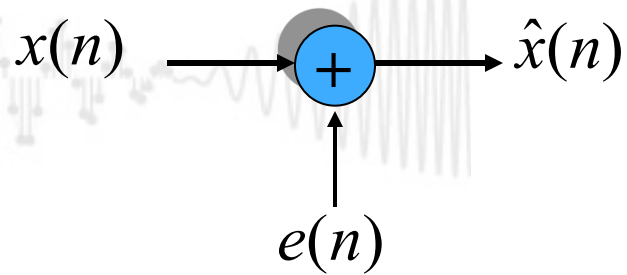
Υποθέσεις:

- Η ακολουθία εισόδου $\{x[n]\}$ είναι στάσιμη (με την ευρεία έννοια).
- Οι ακολουθίες εισόδου $\{x[n]\}$ και σφαλμάτων $\{e[n]\}$ είναι ασυσχέτιστες.
- Η ακολουθία σφαλμάτων $\{e[n]\}$ είναι στάσιμη (με την ευρεία έννοια) με PDF $f_e(e)$



Μετατροπή A/D Θόρυβος Κβάντισης

Στατιστικό Μοντέλο Κβαντιστή



Λόγος Σήματος προς Θόρυβο Κβαντισμού.

$$SNR_{A/D} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right)$$

Όπου σ_x^2 η ισχύς του σήματος εισόδου και σ_e^2 η ισχύς του θορύβου κβάντισης.

$$\text{Όμως: } \sigma_e^2 = \frac{\delta^2}{12} = \frac{2^{-2b} R_{FS}^2}{48}$$

$$\text{Άρα: } SNR_{A/D} = 6.0206b + 16.81 - 20 \log_{10} \left(\frac{R_{FS}}{\sigma_x} \right)$$

Μετατροπή A/D Θόρυβος Κβάντισης

Στατιστικό Μοντέλο Κβαντιστή

$$SNR_{A/D} = 6.0206b + 16.81 - 20 \log_{10} \left(\frac{R_{FS}}{\sigma_x} \right)$$

Υποθέστε ότι σας διατίθεται ένα αναλογικό σήμα $x(t) \sim \mathbf{G} (0, \sigma_x^2)$

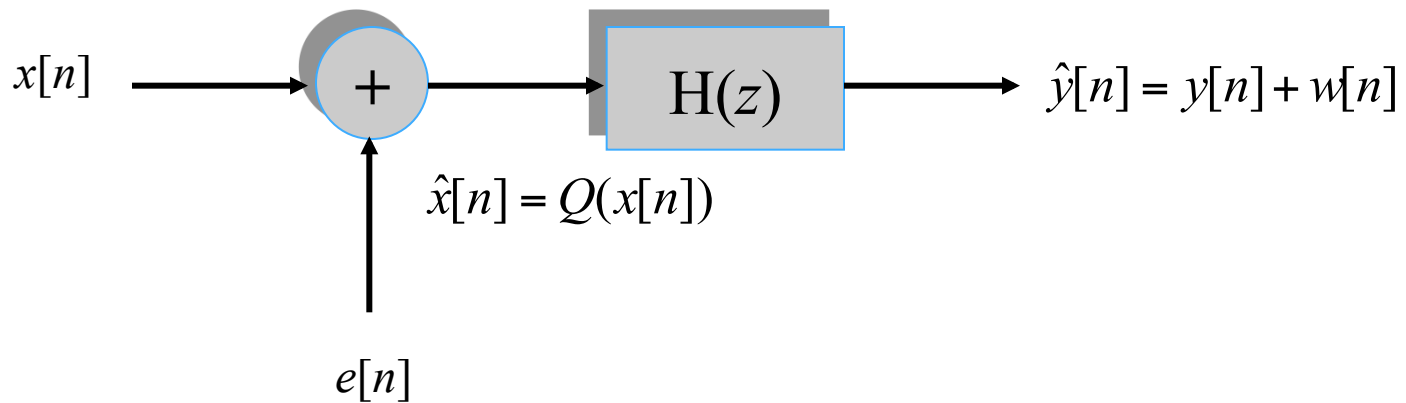
Υπολογίστε:

- το Λόγο Σήματος προς Θόρυβο Κβαντισμού, στο ψηφιακό ισοδύναμο του αναλογικού σήματος, αν χρησιμοποιήσουμε ένα $(b+1)$ -bit A/D μετατροπέα ο οποίος έχει $R_{FS} = k\sigma_x$.
- την πιθανότητα τα δείγματα του αναλογικού σήματος να βρίσκονται στο R_{FS} του A/D.

Η Επίδραση της Κλιμάκωσης του σήματος Εισόδου στο SNR.

Μετάδοση του Θορύβου Κβάντισης

Μοντέλο Ανάλυσης:



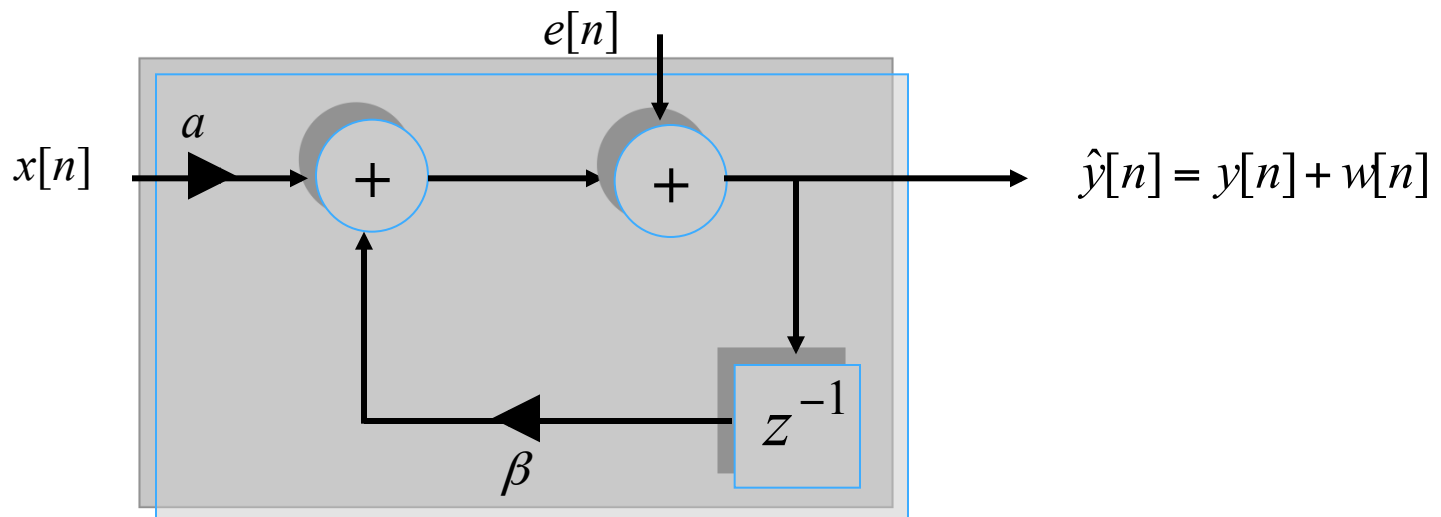
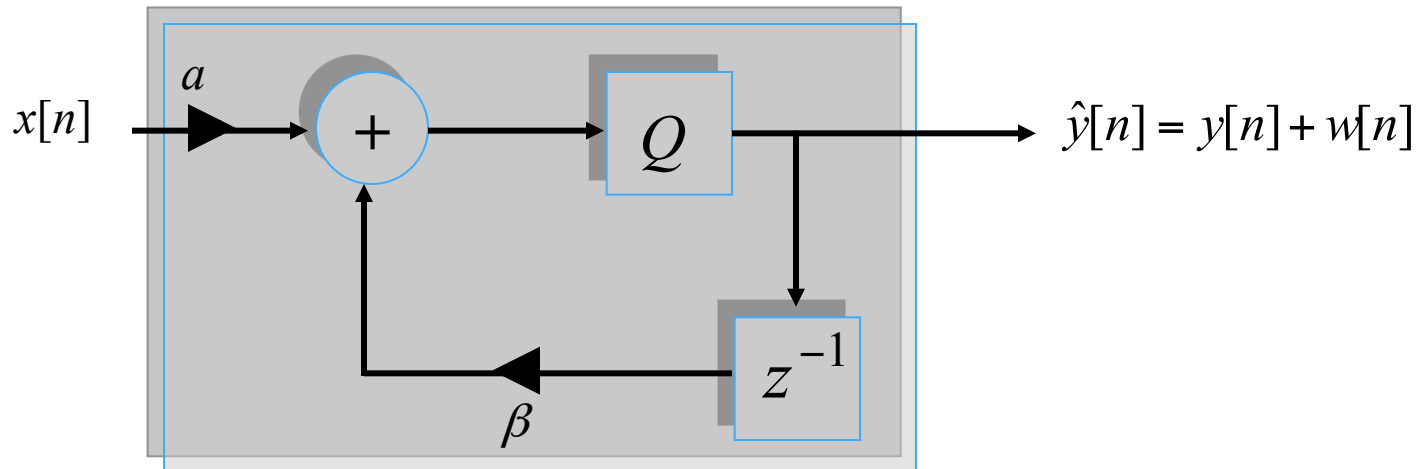
$$\hat{y}[n] = \hat{x}[n] * h[n] = (x[n] + e[n]) * h[n] = y[n] + w[n]$$

$$w[n] = e[n] * h[n] \Rightarrow \mu_w = \mu_e \sum_n h[n] = \mu_e H(1) = 0$$

$$w[n] = e[n] * h[n] \Rightarrow \sigma_w^2 = \sigma_e^2 \sum_n |h[n]|^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$



Μετάδοση του Θορύβου Κβάντισης



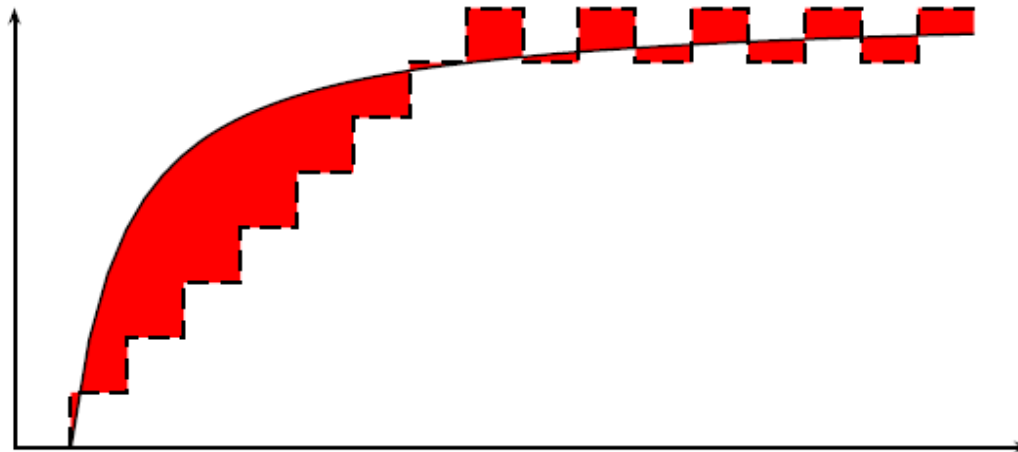
Διαμόρφωση Δέλτα

Γειτονικά δείγματα που προκύπτουν από την δειγματοληψία των σημάτων ομιλίας, εικόνας ή video εμφανίζουν υψηλή συσχέτιση. Δηλαδή, κατά μέσο όρο, οι τιμές του σήματος δεν μεταβάλλονται απότομα από δείγμα σε δείγμα, με αποτέλεσμα η διαφορά των τιμών γειτονικών δειγμάτων να έχει διασπορά πολύ μικρότερη από την διασπορά των τιμών του σήματος.



Διαμόρφωση Δέλτα

Υπερφόρτωση κλίσης & Κοκκώδης θόρυβος



Διαμόρφωση Δέλτα

Υποθέστε ότι έχουμε στην διάθεση μας ένα στάσιμο σήμα $m(n)$ μηδενικής μέσης τιμής με ακολουθία αυτοσυσχέτισης $r_m(k)$.

Θεωρήστε ότι επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα πρόβλεψης τιμών του σήματος, πρώτης τάξης.

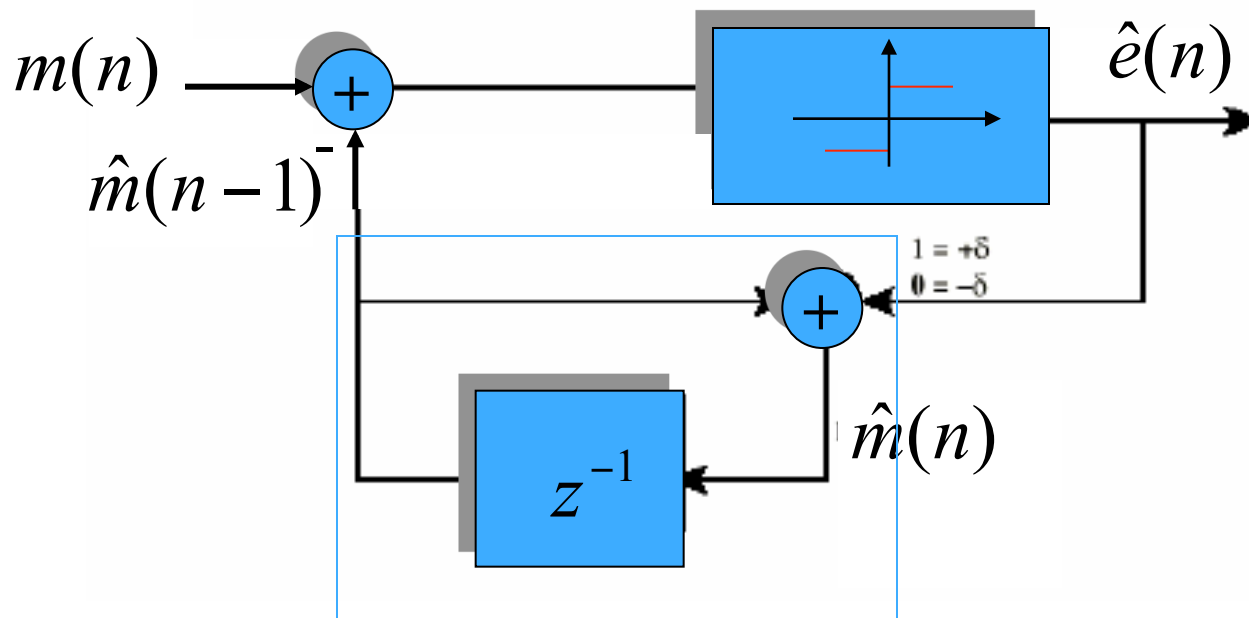
Υπολογίστε τη διασπορά του σφάλματος πρόβλεψης. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις η διασπορά του σφάλματος είναι μικρότερη από τη διασπορά του σήματος;

Ελαχιστοποιείστε την διασπορά του σφάλματος πρόβλεψης, ως προς τις παραμέτρους του συστήματος, και βρείτε την ελάχιστη τιμή της.



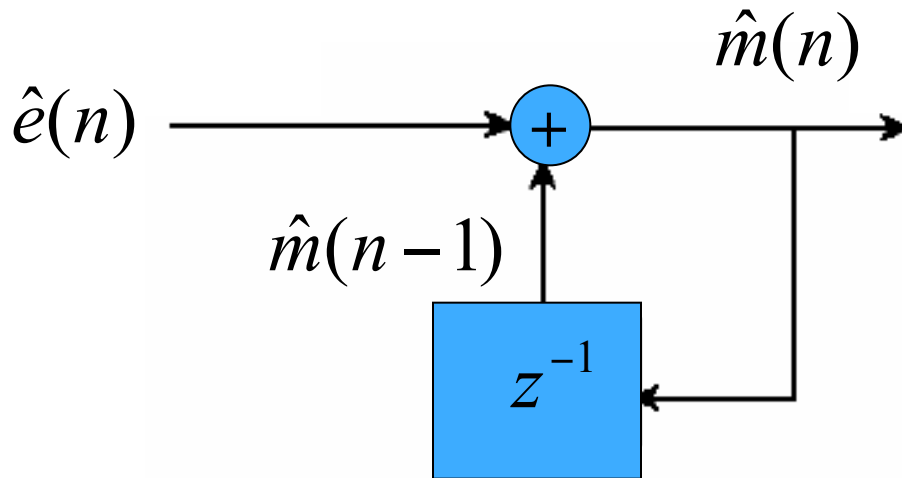
Διαμόρφωση Δέλτα

Διαμορφωτής



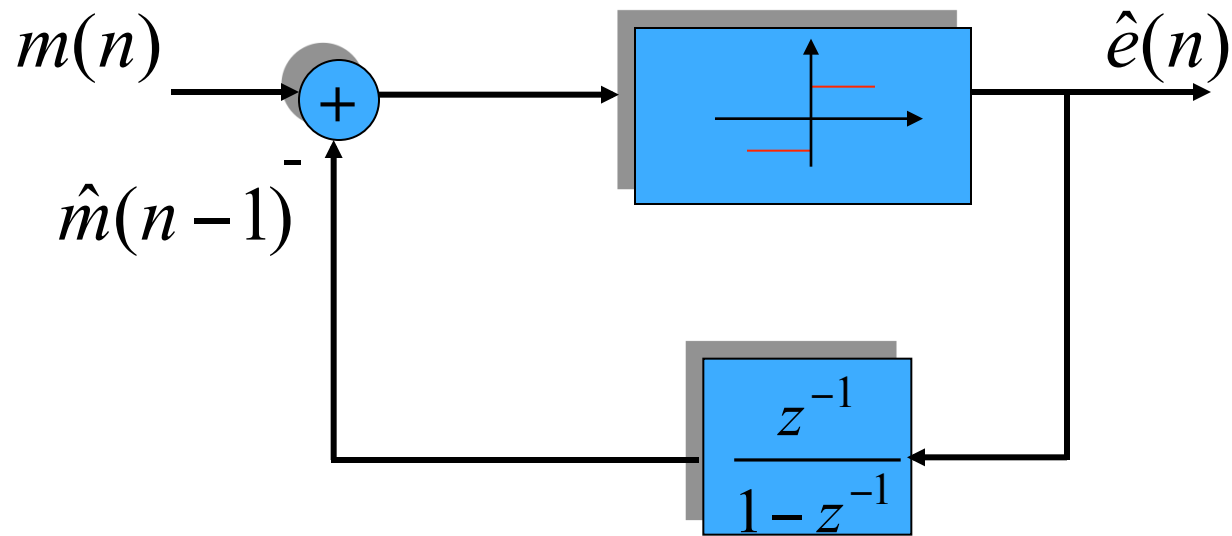
Διαμόρφωση Δέλτα

Αποδιαμορφωτής



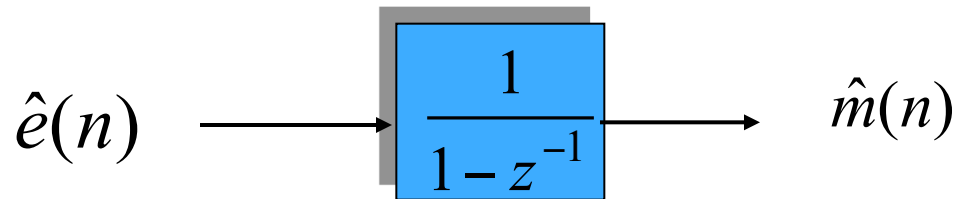
Διαμόρφωση Δέλτα

Απλοποιημένος Διαμορφωτής



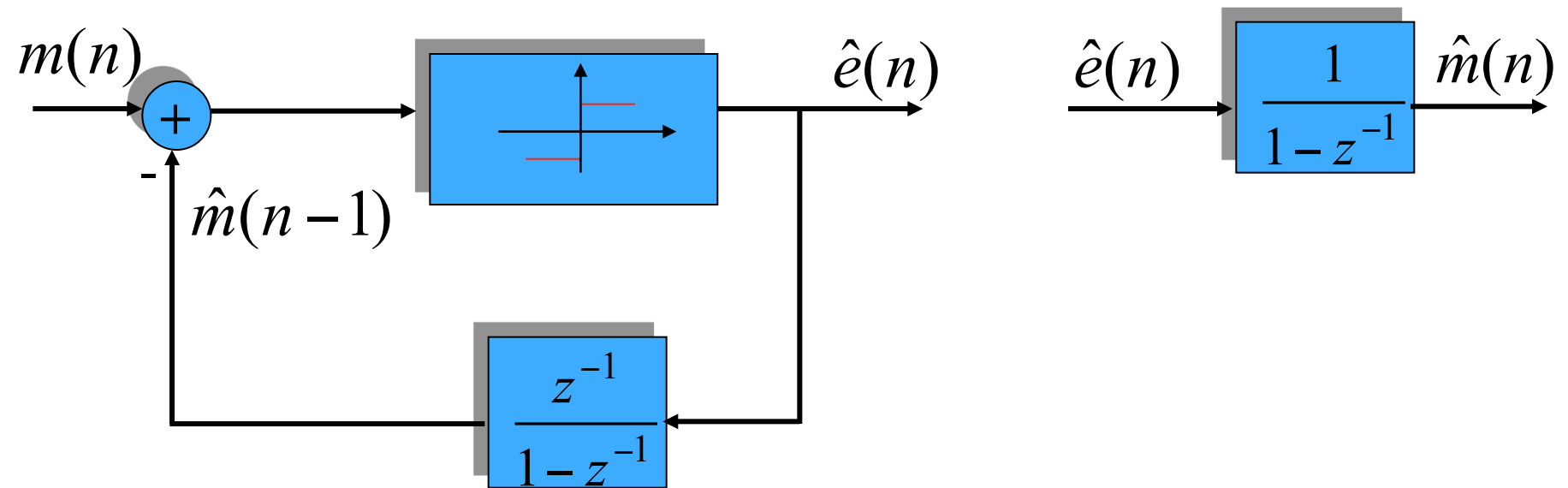
Διαμόρφωση Δέλτα

Απλοποιημένος Αποδιαμορφωτής



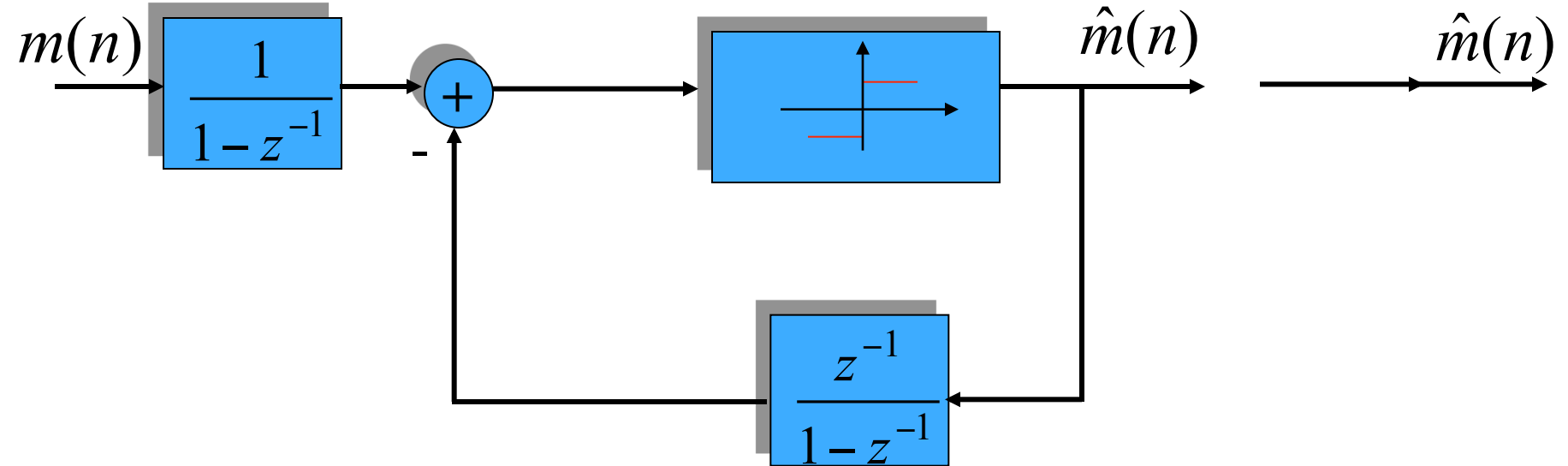
Διαμόρφωση Δέλτα

Συνολικό Σύστημα Δ-Δ



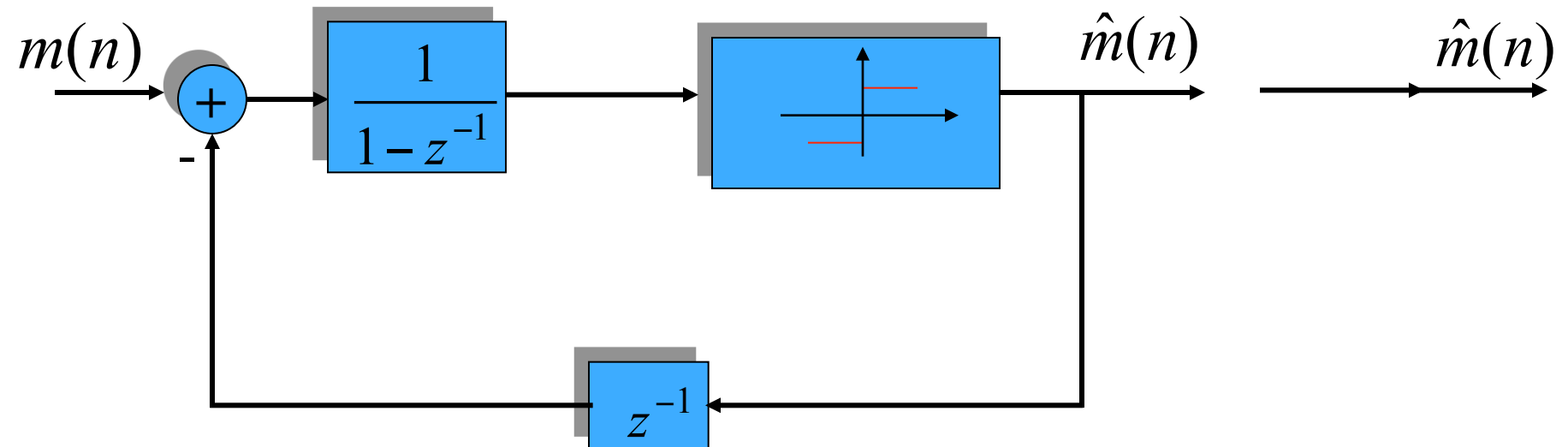
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Ισοδύναμο Σύστημα



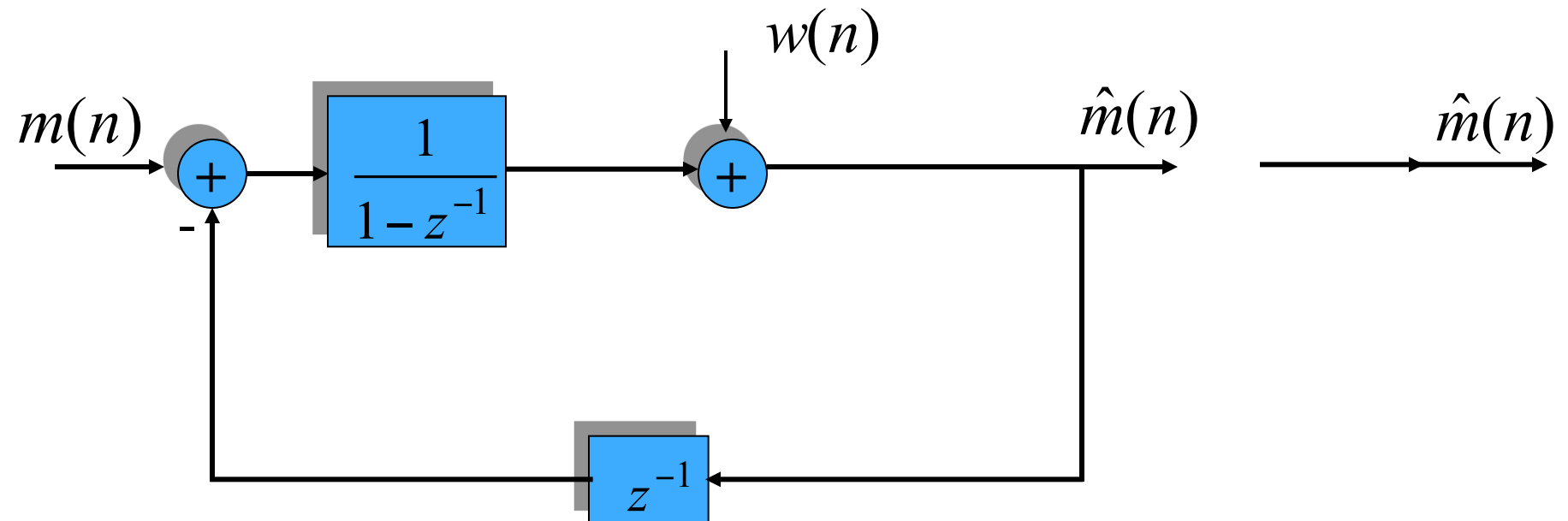
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Ισοδύναμο Σύστημα - Noise Shaping



Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Ισοδύναμο σύστημα - Noise Shaping



Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

$$\hat{M}(z) = M(z) \frac{I(z)}{1 + z^{-1}I(z)} + W(z) \frac{1}{1 + z^{-1}I(z)}$$

$$I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Άρα:

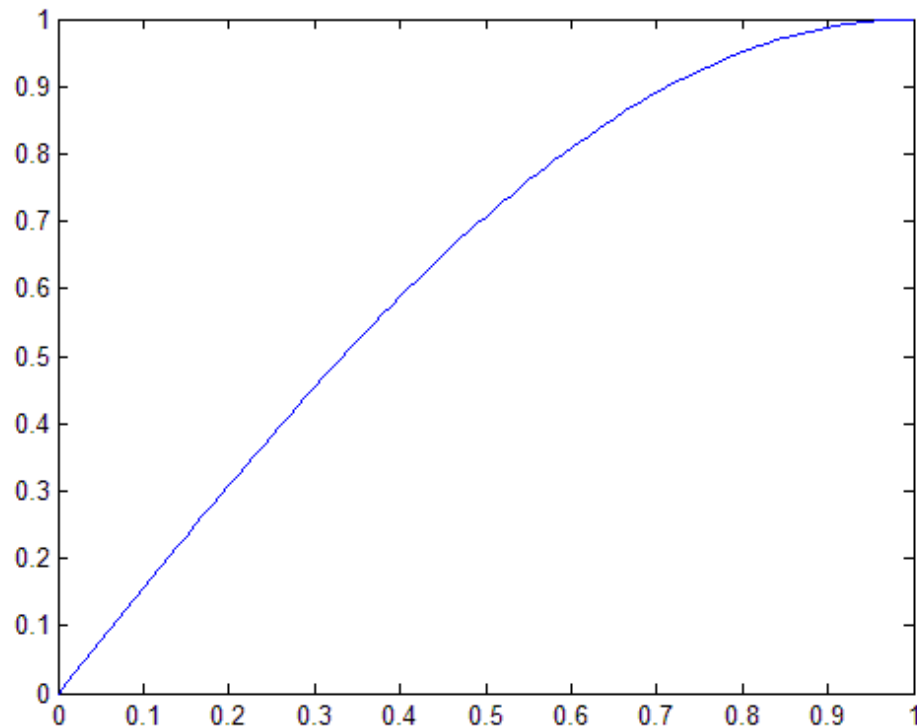
$$\hat{M}(z) = M(z) + (1 - z^{-1})W(z)$$



Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

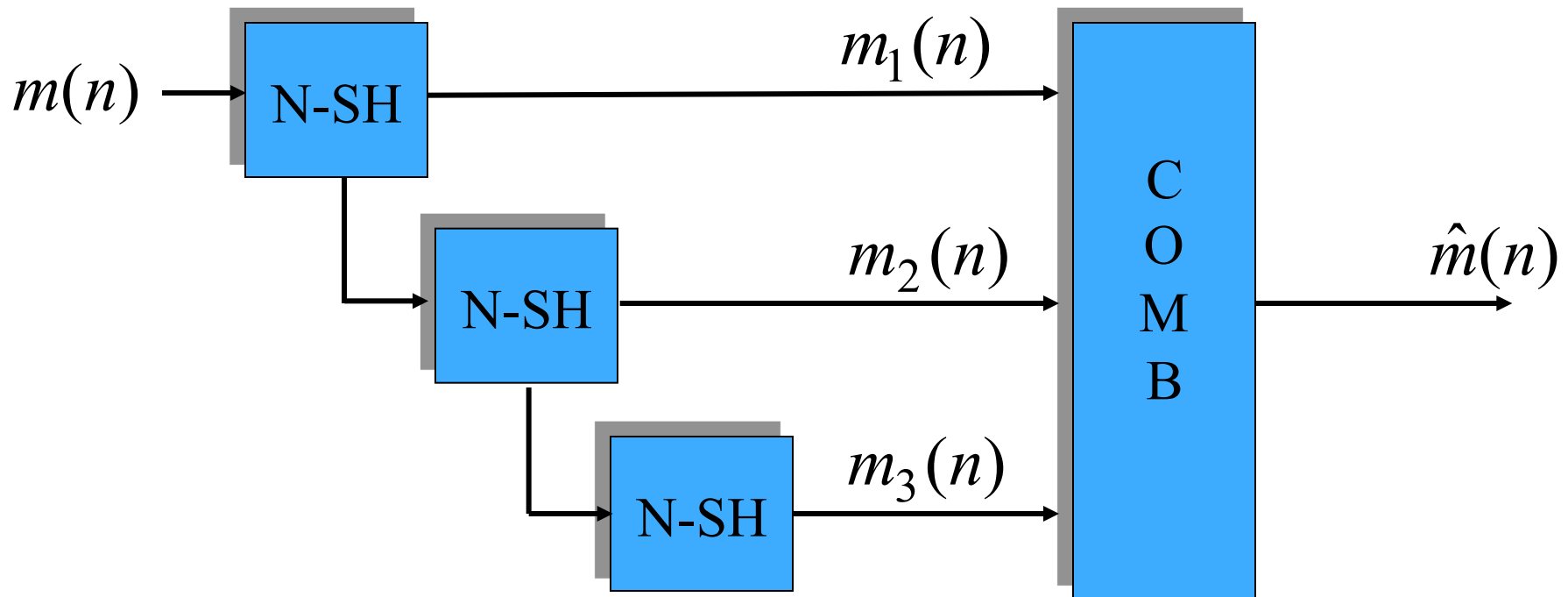
Noise Shaping

$$\hat{M}(z) = M(z) + (1 - z^{-1})W(z)$$



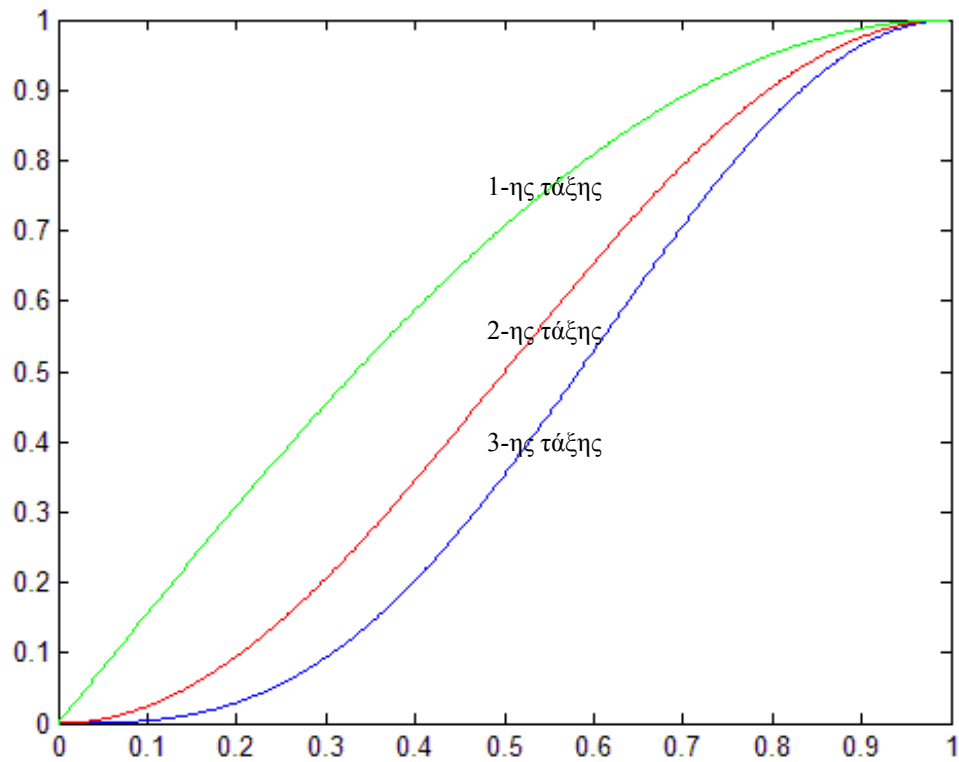
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Υψηλότερης τάξης διαμορφωτές Σ - Δ



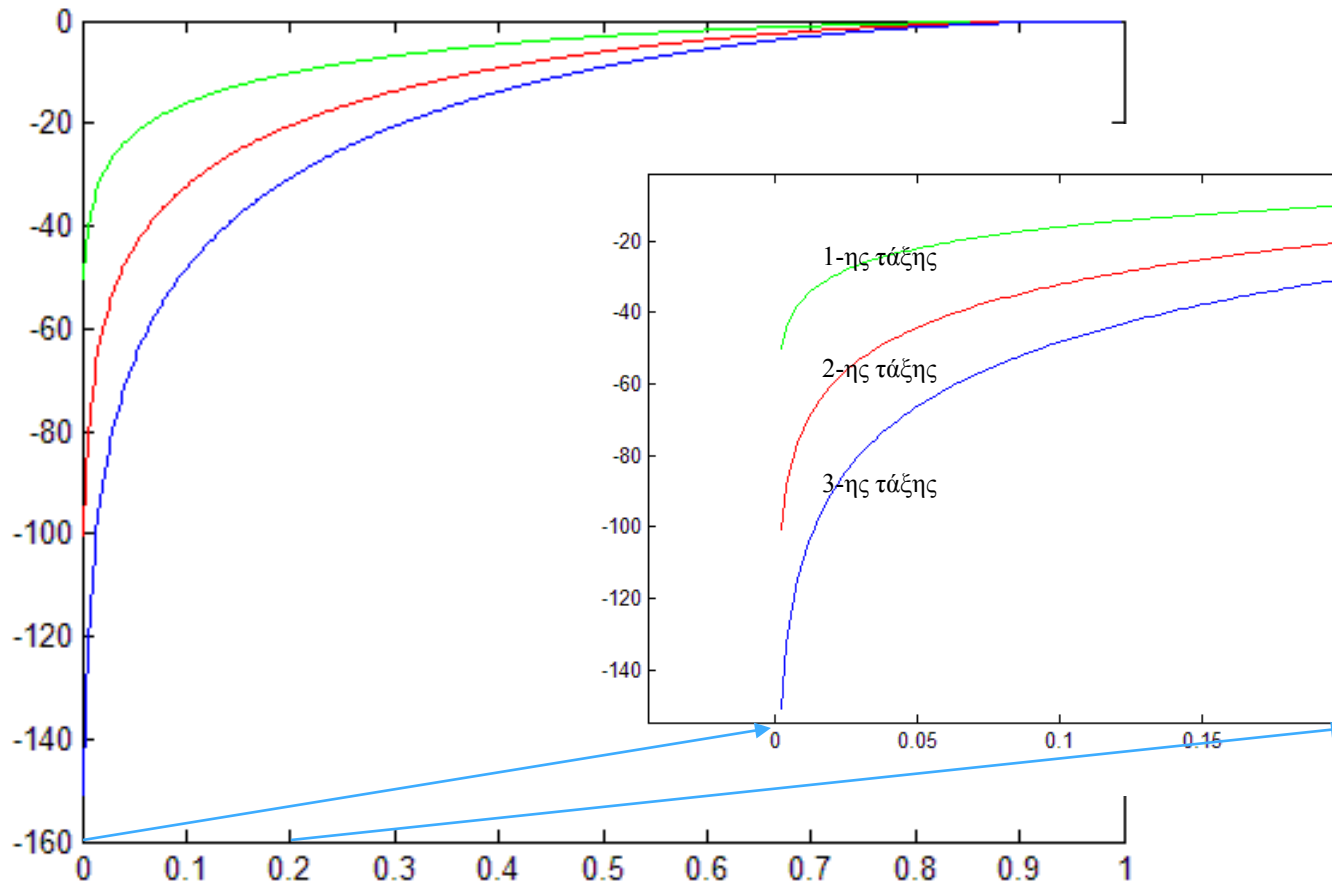
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Noise Shaping (Κανονικοποιημένες Αποκρίσεις)



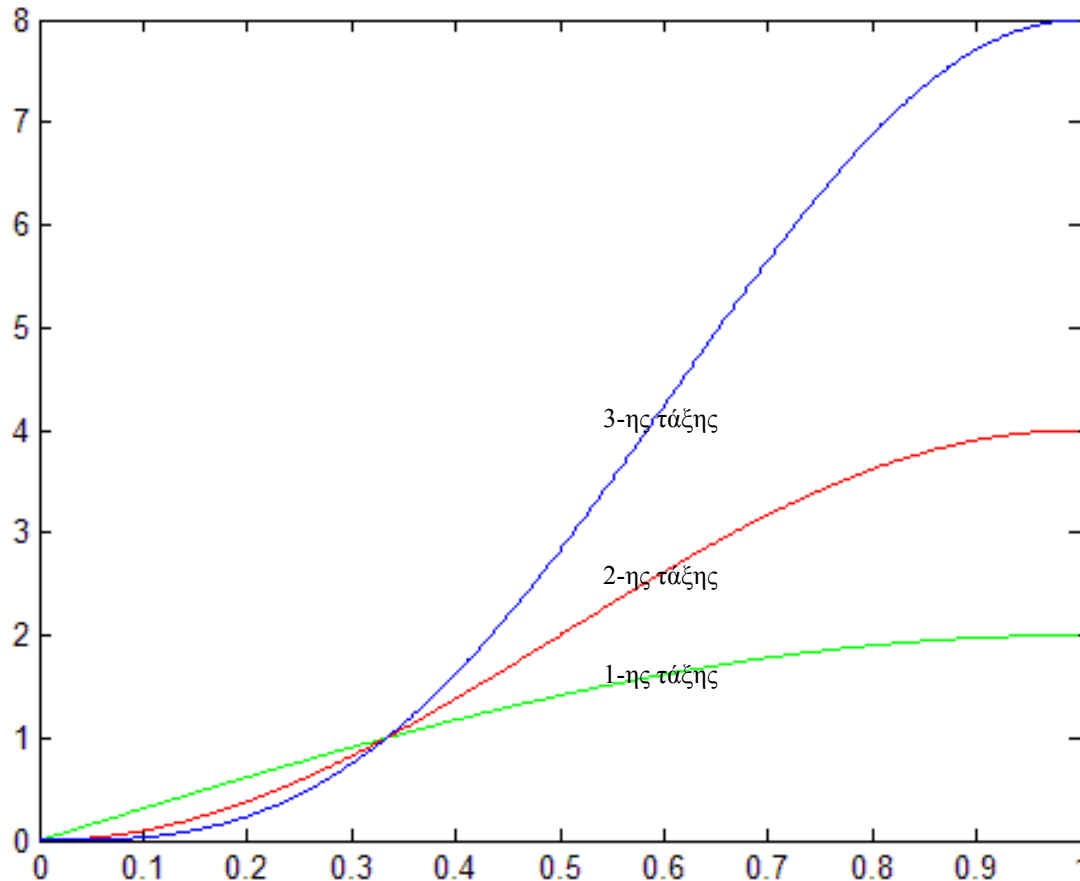
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Noise Shaping (Κανονικοποιημένες Αποκρίσεις σε dB)



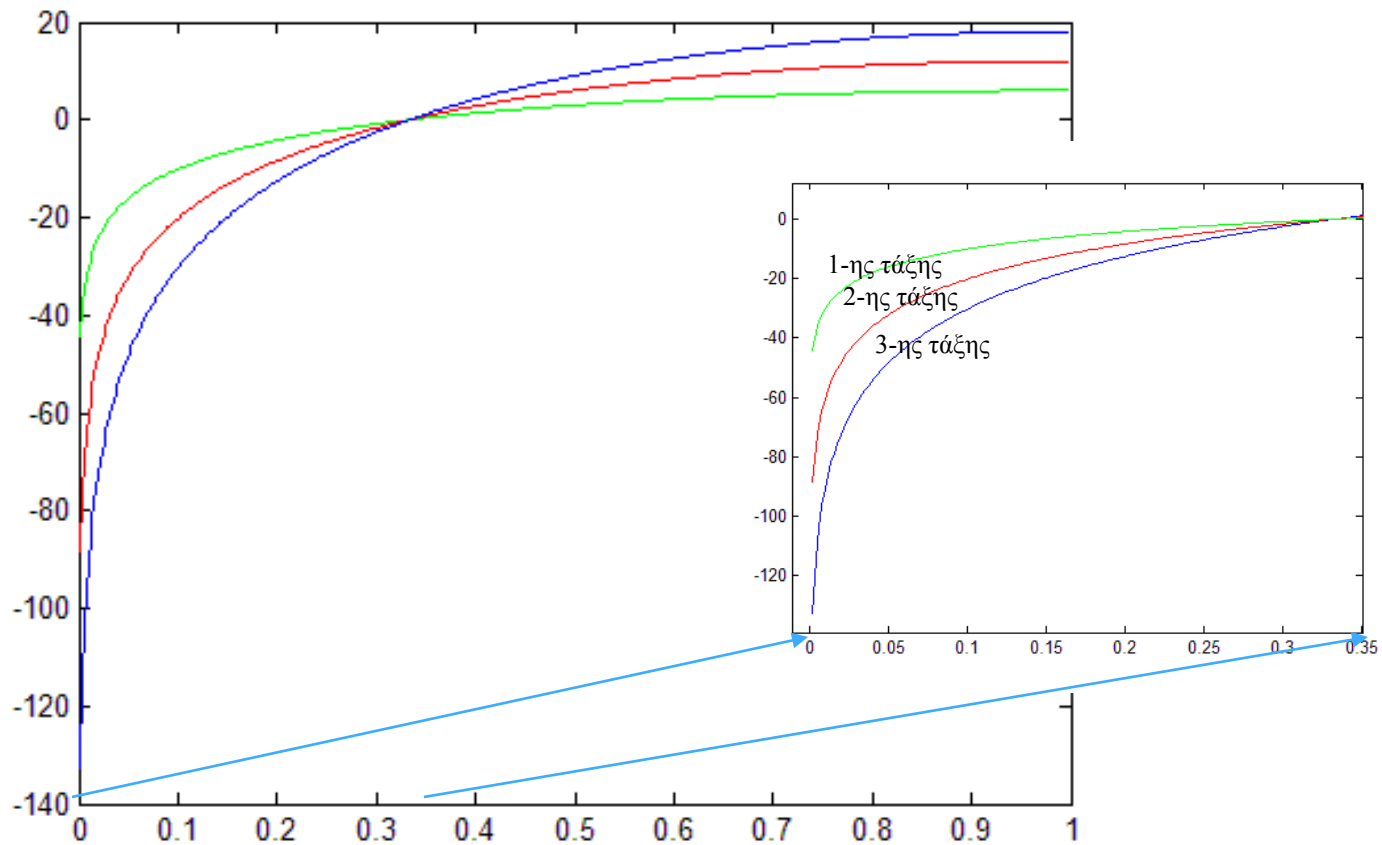
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Noise Shaping (Μη-κανονικοποιημένες Αποκρίσεις)



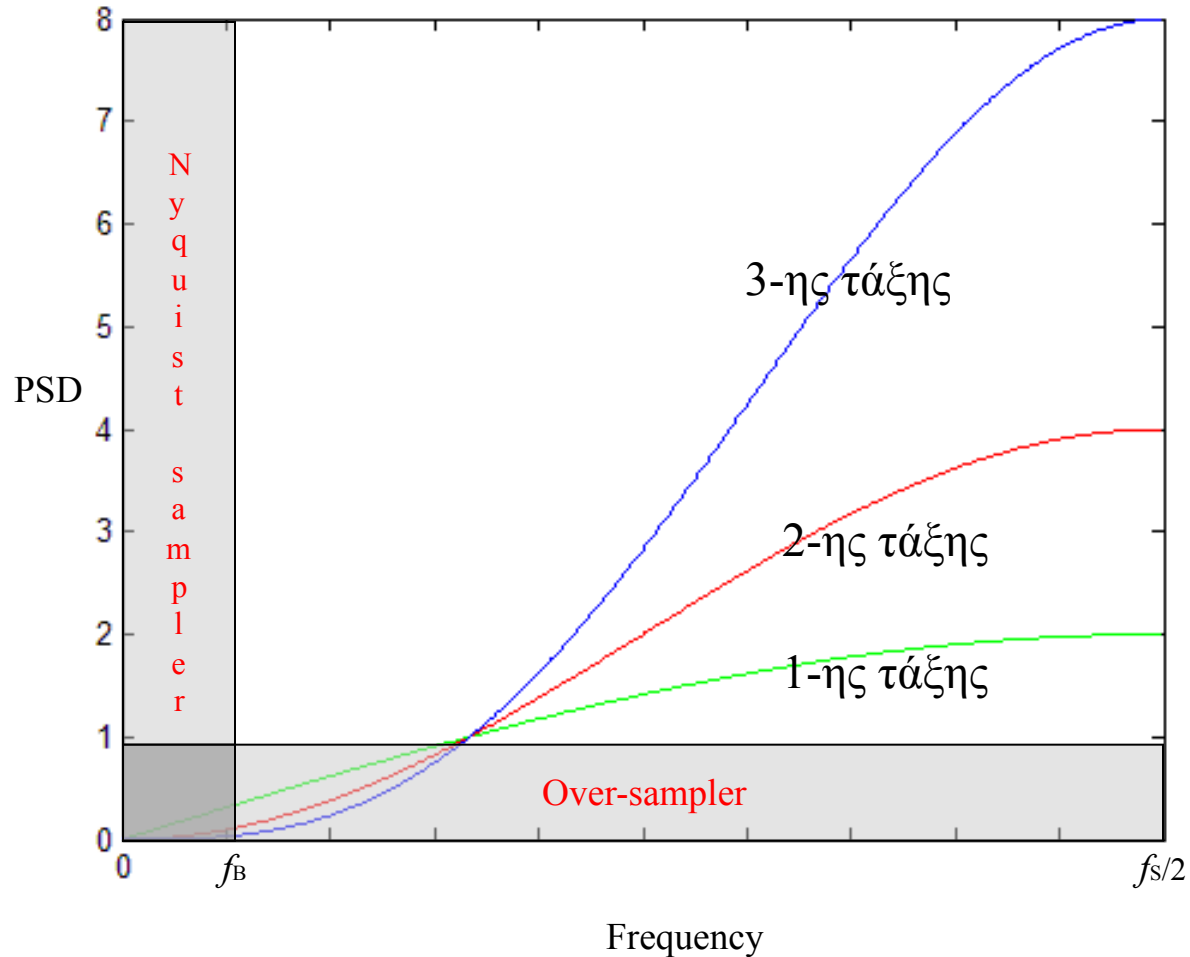
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Noise Shaping (Μη-κανονικοποιημένες Αποκρίσεις σε dB)

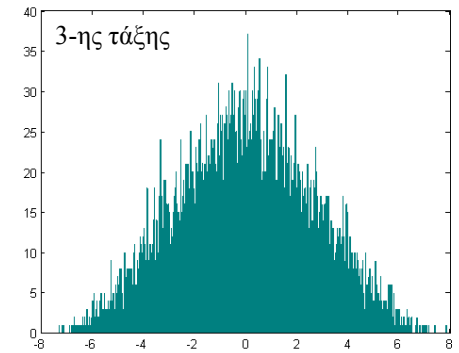
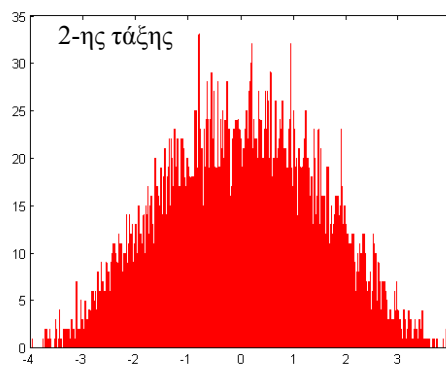
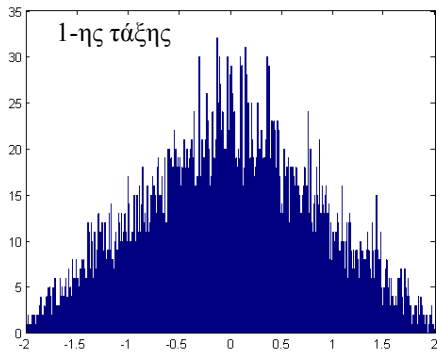
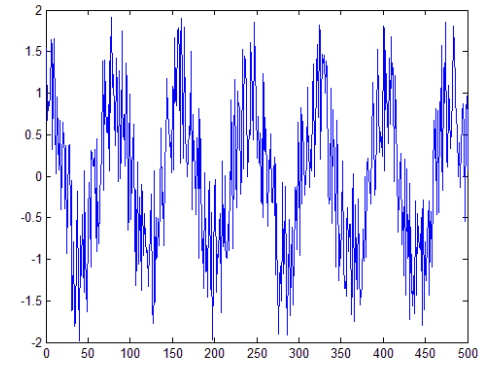
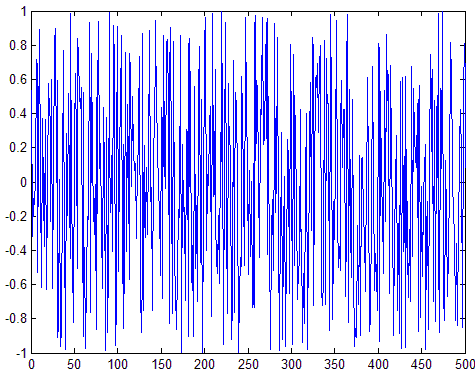
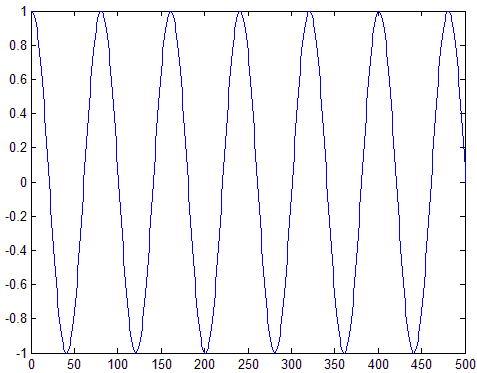


Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Η Ιδέα της Υπερδειγματοληψίας

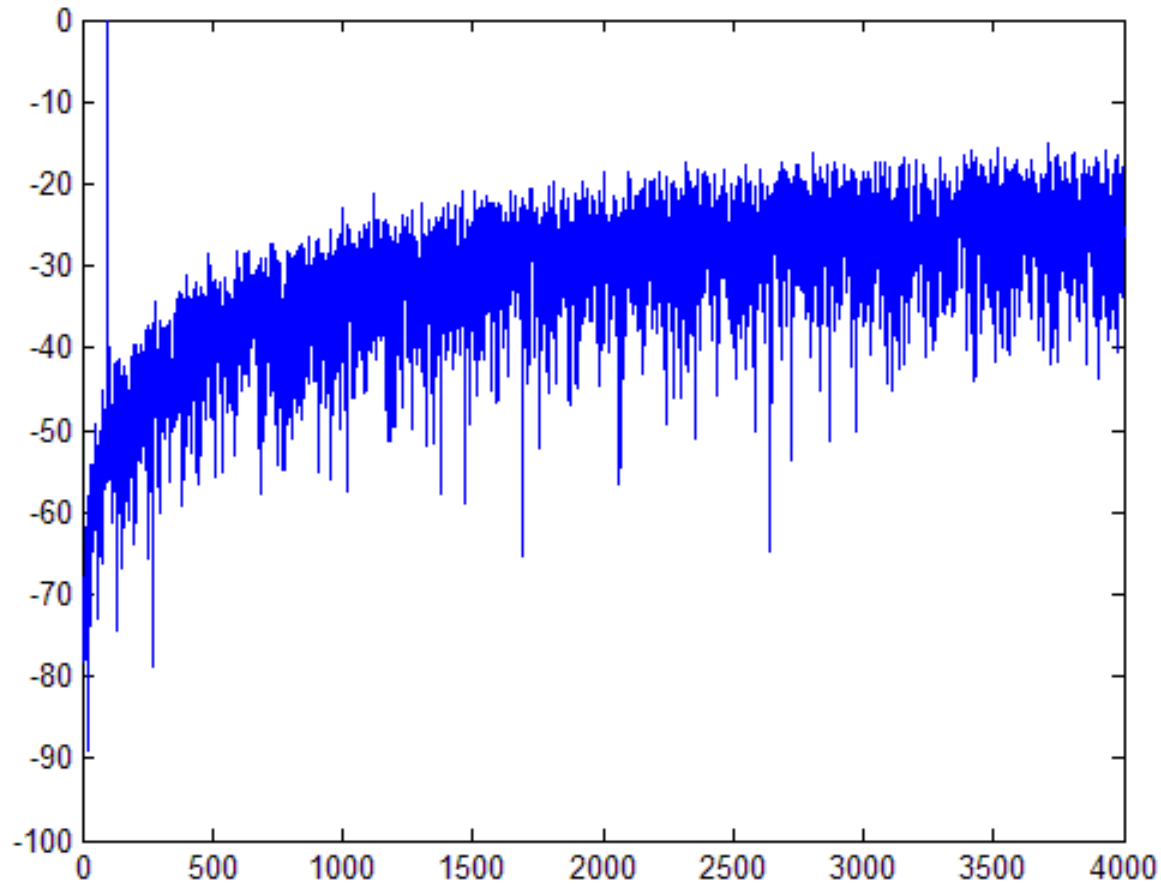


Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα



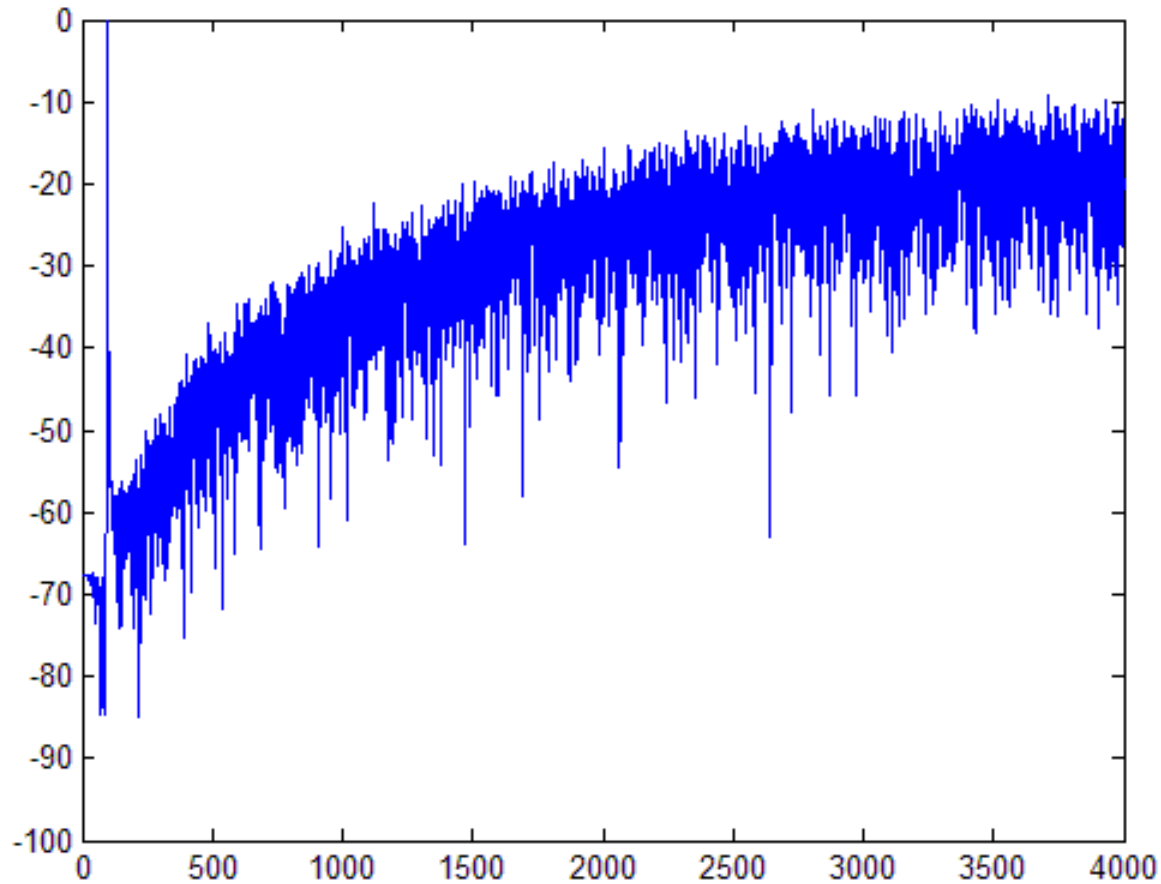
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

N-SH: 1-ης Τάξης



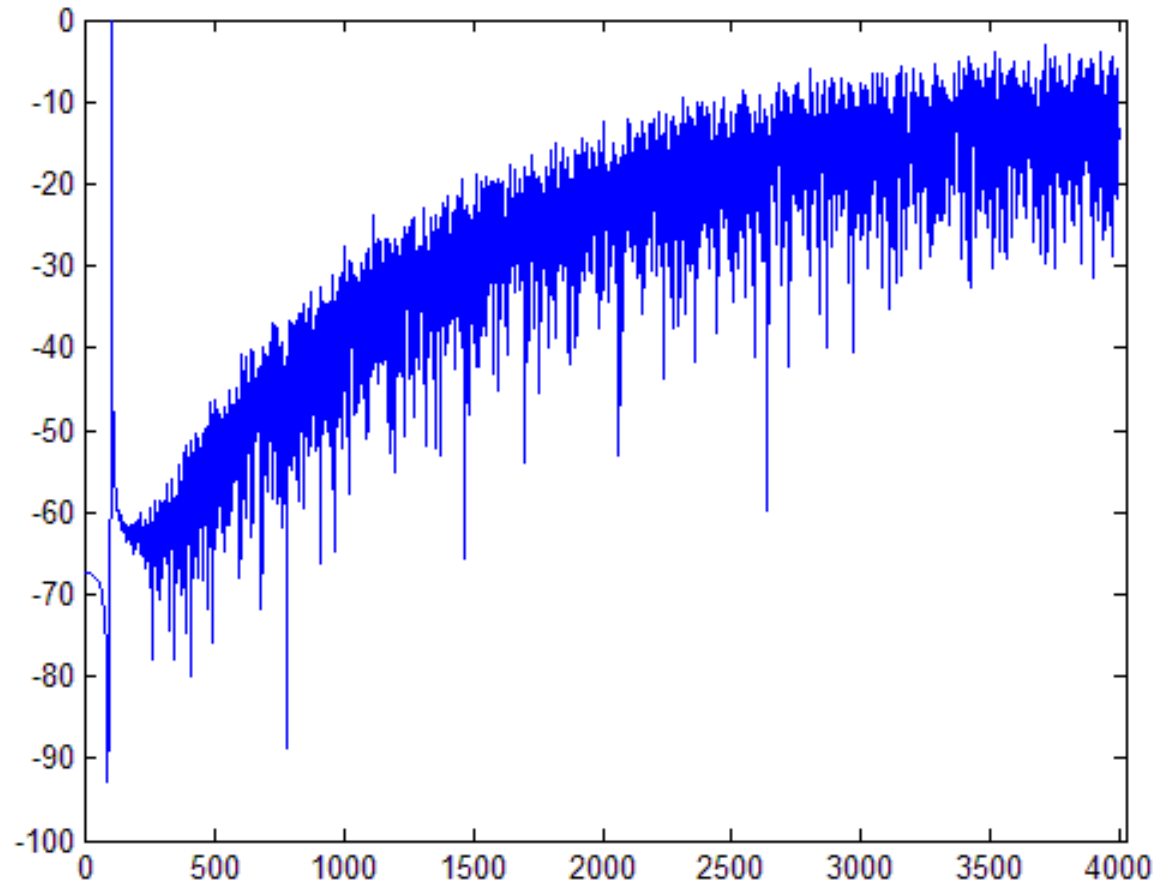
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

N-SH: 2-ης Τάξης

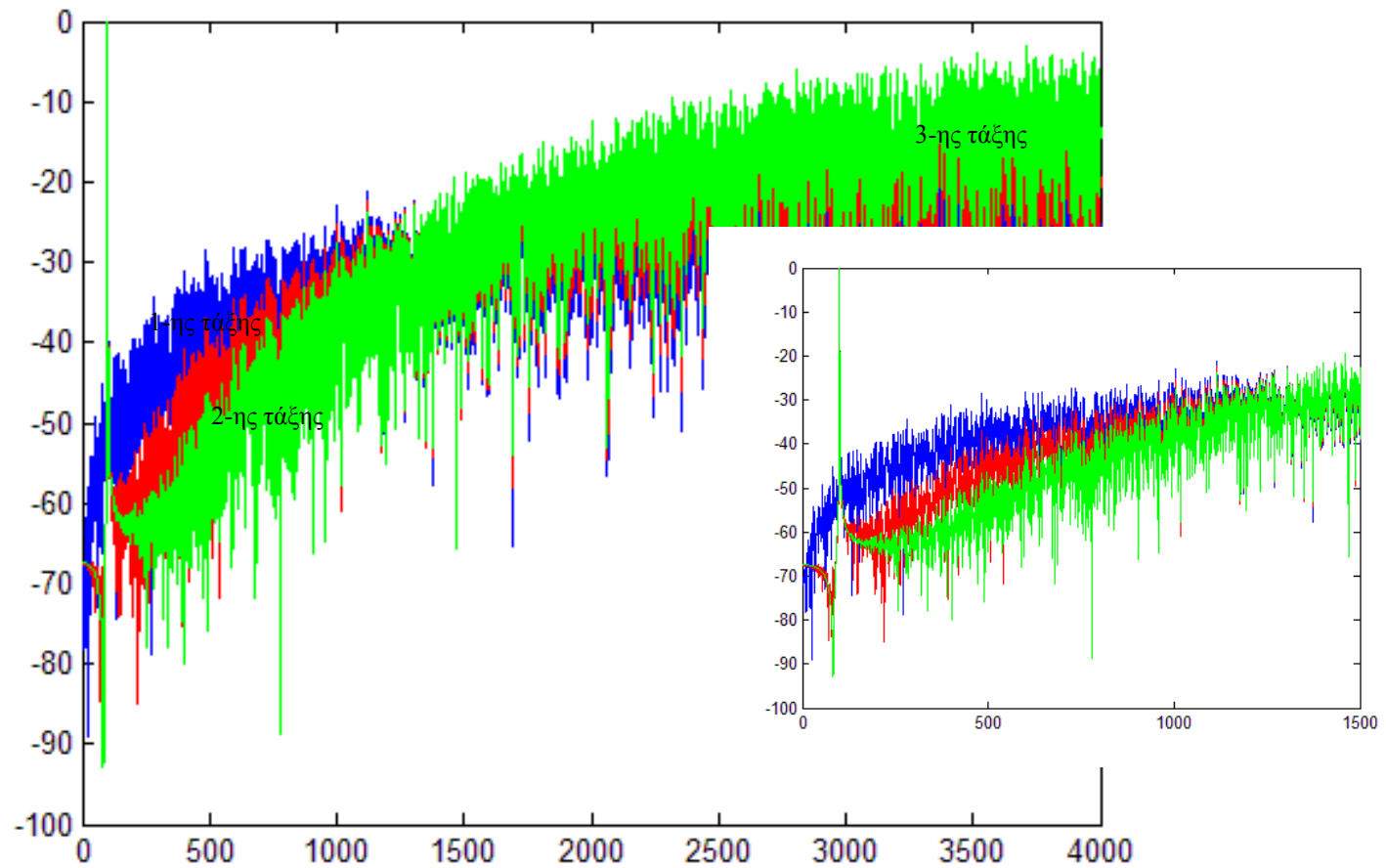


Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

N-SH: 3-ης Τάξης



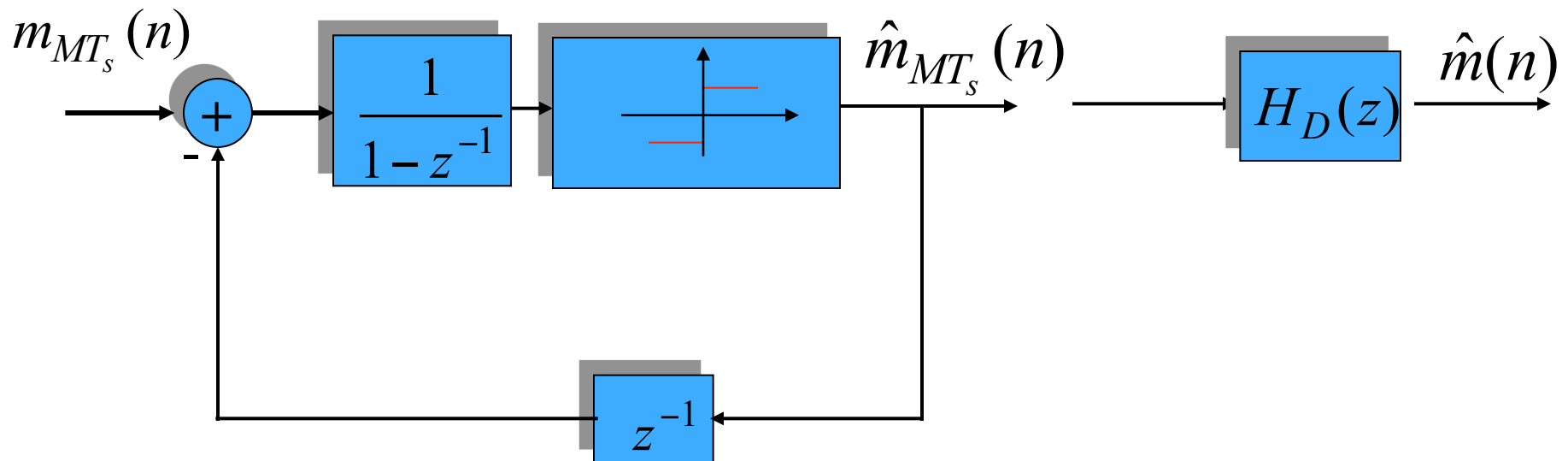
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα



Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα

Υπερδειγματοληψία

Υποδειγματοληψία

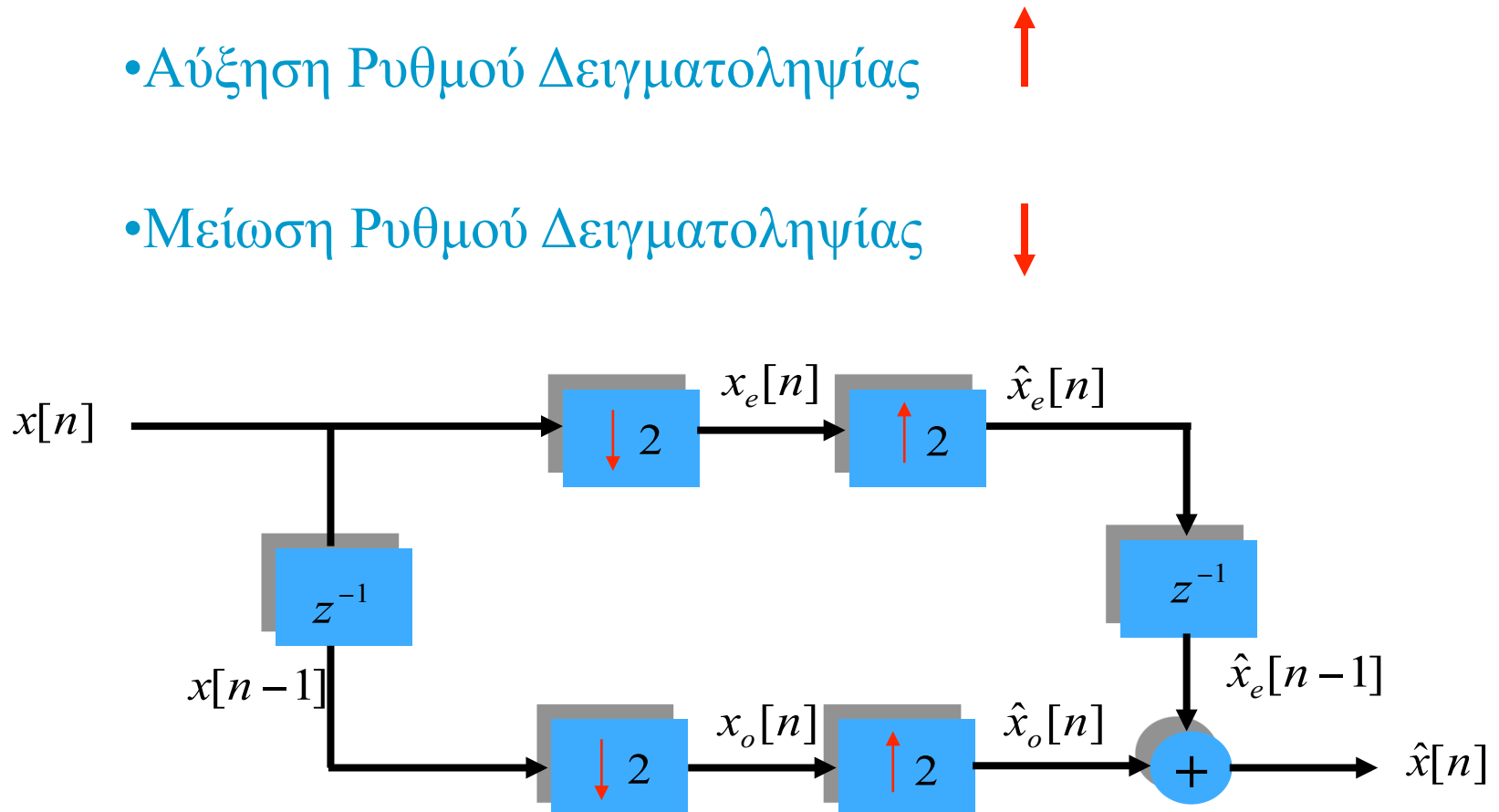


Πολυρυθμική Επεξεργασία

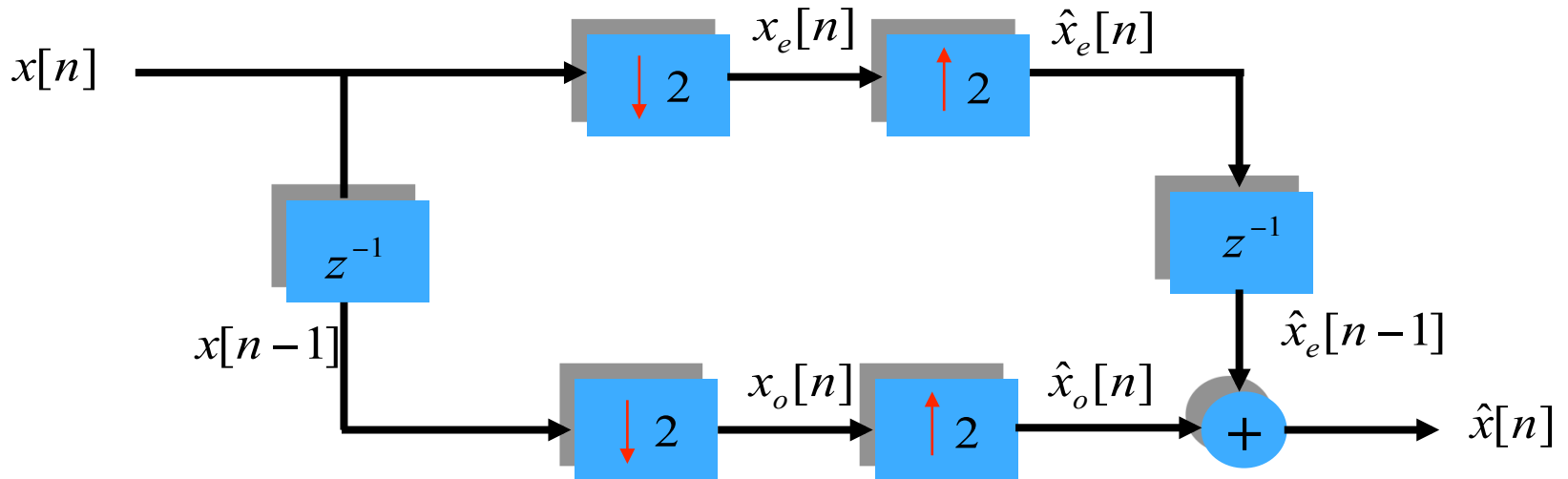
Συστήματα Αλλαγής Ρυθμού Δειγματοληψίας

• Αύξηση Ρυθμού Δειγματοληψίας 

• Μείωση Ρυθμού Δειγματοληψίας 



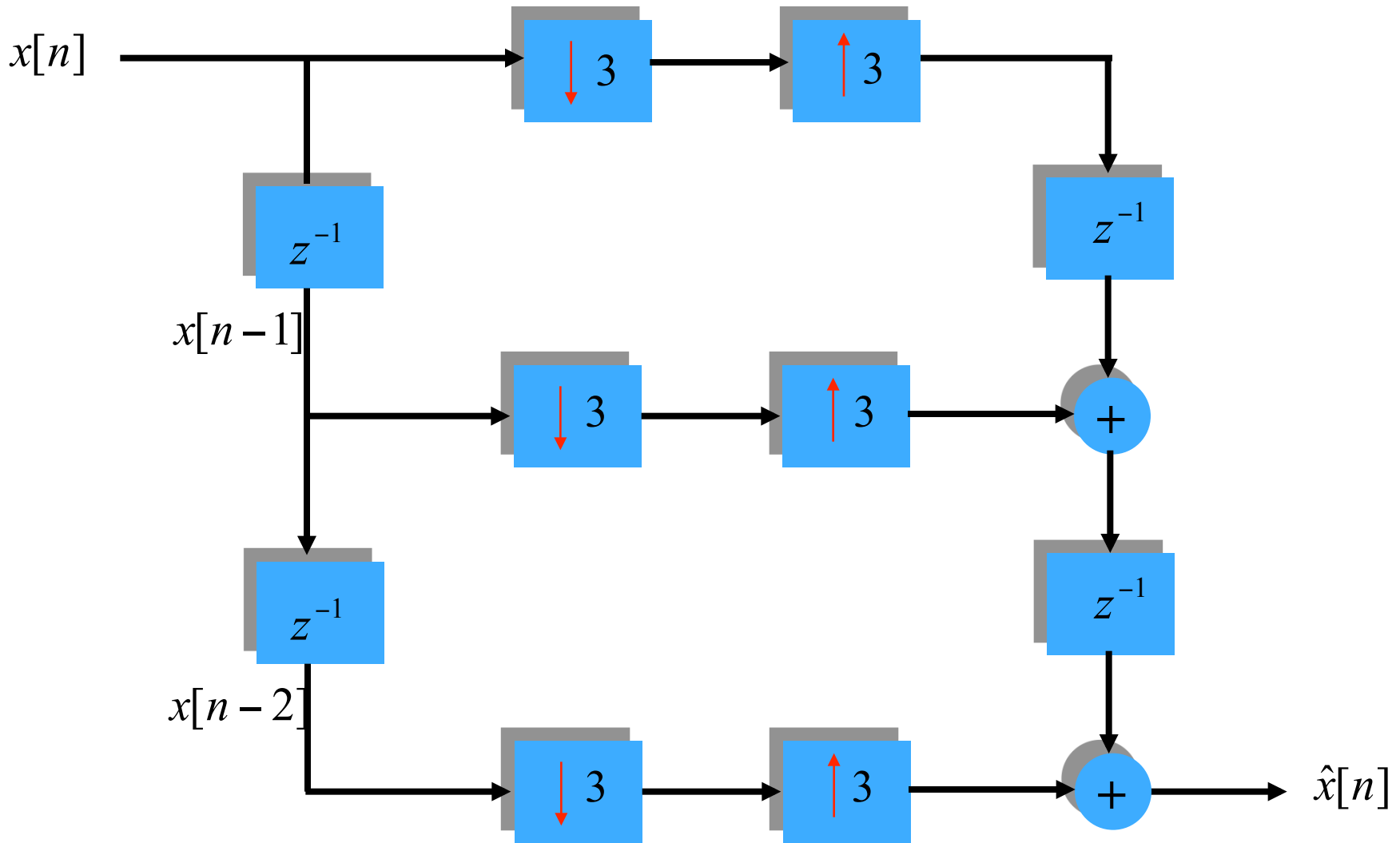
Πολυρυθμική Επεξεργασία



$x[n]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	$x[7]$	$x[8]$	
$x[n-1]$	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	$x[7]$	
$x_o[n]$	$x[-1]$	$x[1]$	$x[3]$	$x[5]$	$x[7]$	$x[9]$	$x[11]$	$x[13]$	$x[15]$	
$\hat{x}_o[n]$	$x[-1]$	0	$x[1]$	0	$x[3]$	0	$x[5]$	0	$x[7]$	
$x_e[n]$	$x[0]$	$x[2]$	$x[4]$	$x[6]$	$x[8]$	$x[10]$	$x[12]$	$x[14]$	$x[16]$	
$\hat{x}_e[n]$	$x[0]$	0	$x[2]$	0	$x[4]$	0	$x[6]$	0	$x[8]$	
$\hat{x}_e[n-1]$	0	$x[0]$	0	$x[2]$	0	$x[4]$	0	$x[6]$	0	
$\hat{x}[n]$	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	$x[7]$	$= x[n-1]$



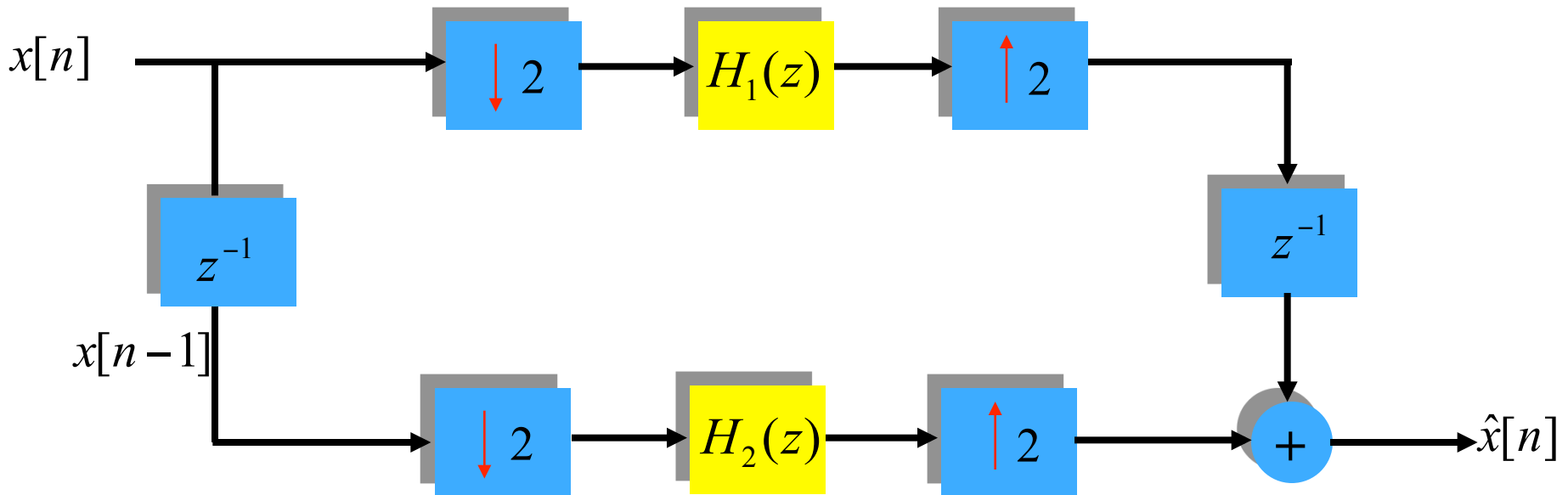
Πολυρυθμική Επεξεργασία



Ποια είναι η σχέση μεταξύ των $\hat{x}[n]$ και $x[n]$ και πώς γενικεύεται;

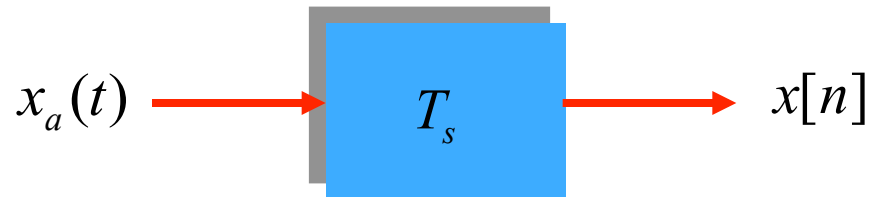


Πολυρυθμική Επεξεργασία

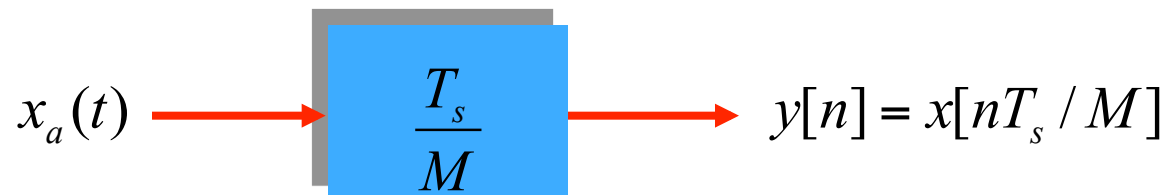


Πολυρυθμική Επεξεργασία

Κρίσιμη Δειγματοληψία: $T_s : f_s = 2f_{\max}$



Υπερδειγματοληψία: $T'_s = \frac{T_s}{M}, M > 1$

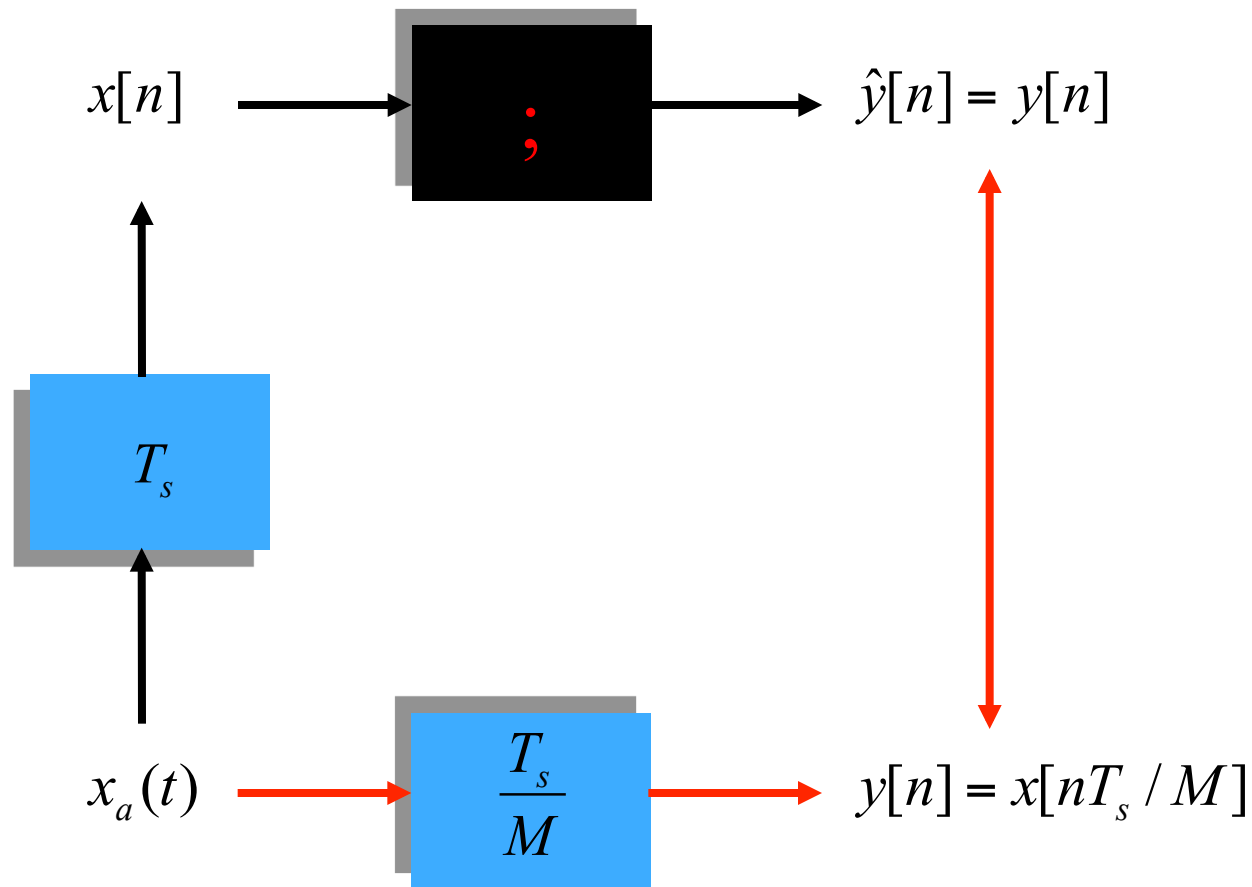


Μπορούμε από την $x[n]$ να υπολογίσουμε την $y[n] = x[nT_s / M]$;



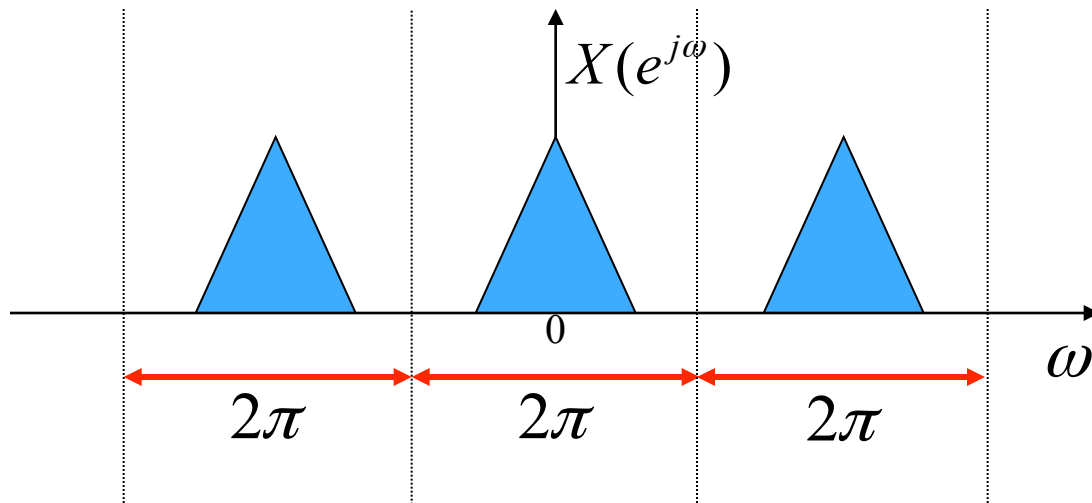
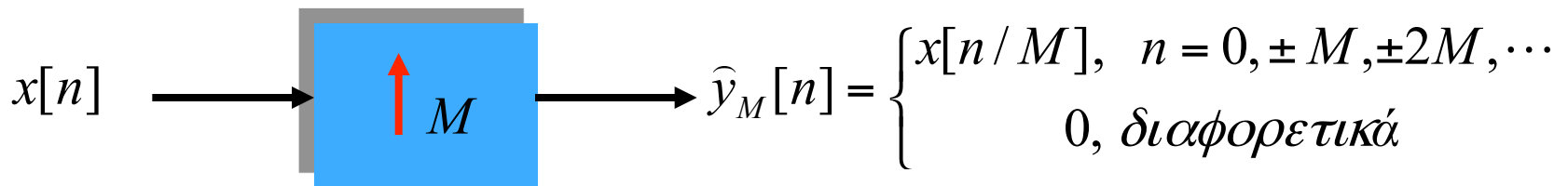
Πολυρυθμική Επεξεργασία

Υπερδειγματοληψία



Πολυρυθμική Επεξεργασία

Παρεμβολέας ή Υπερδειγματολήπτης κατά παράγοντα M



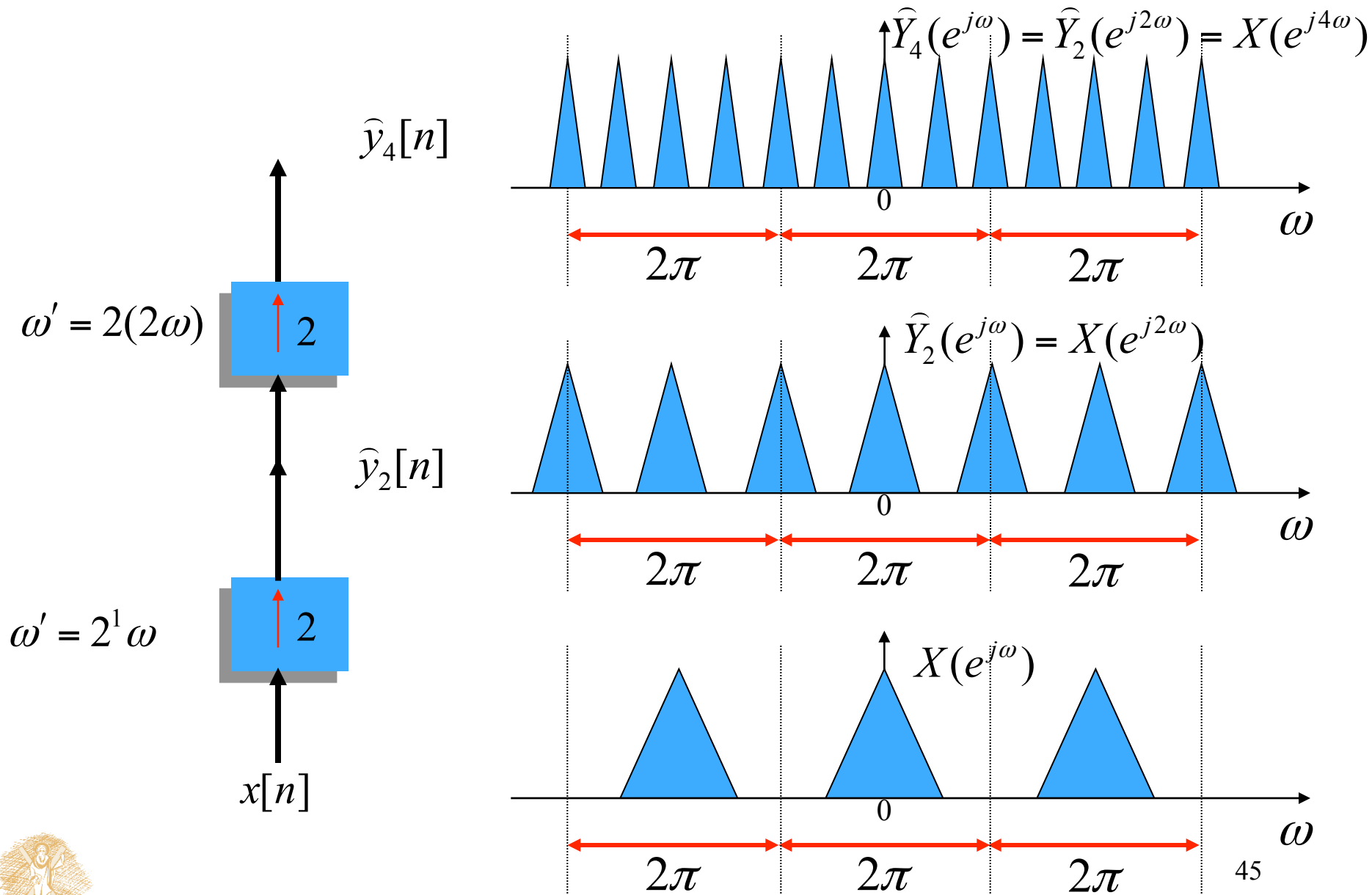
Υπάρχει Σχέση

$$X(e^{j\omega}) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} \hat{Y}_M(e^{j\omega})$$

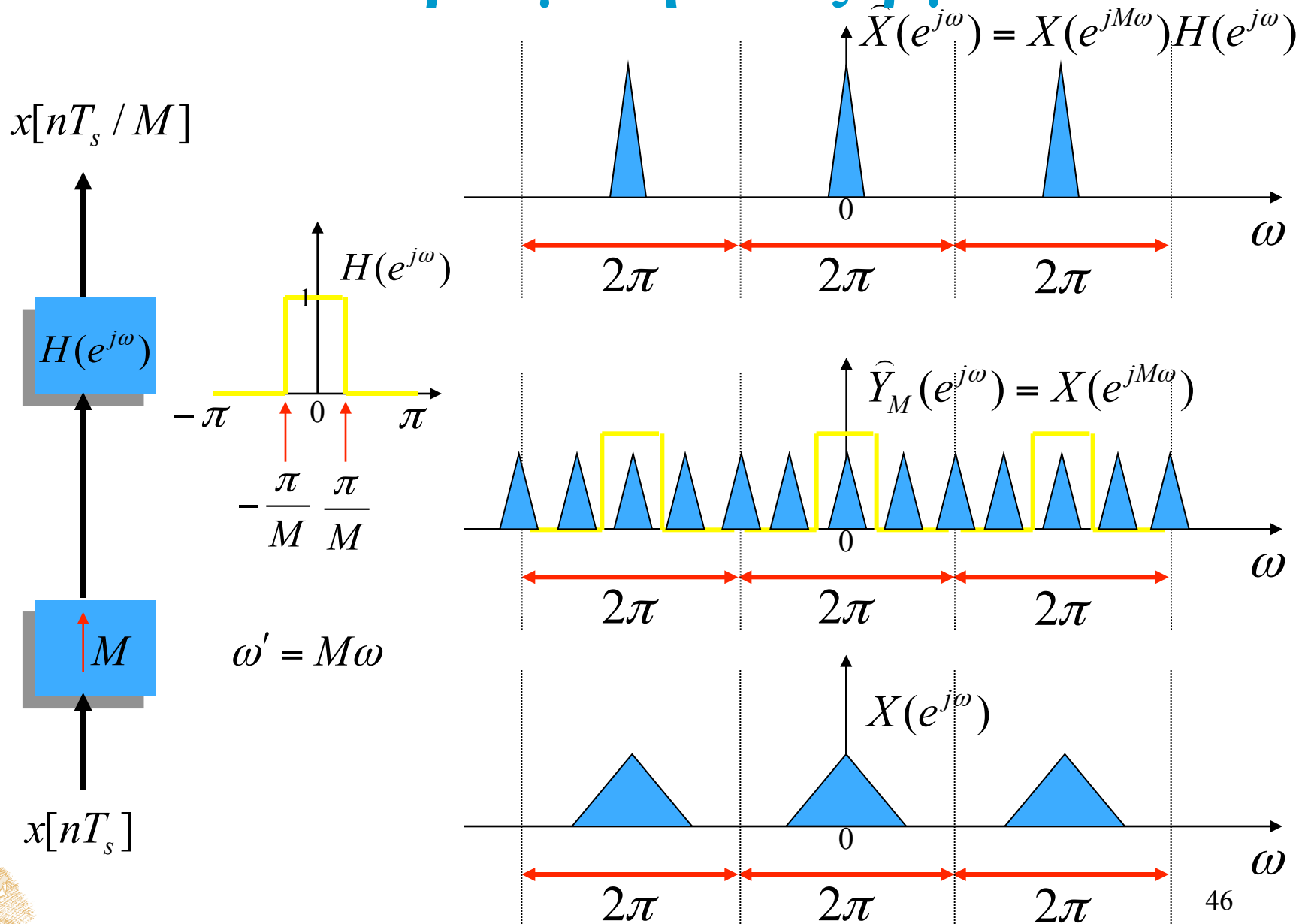
και ποιιά;



Πολυρυθμική Επεξεργασία

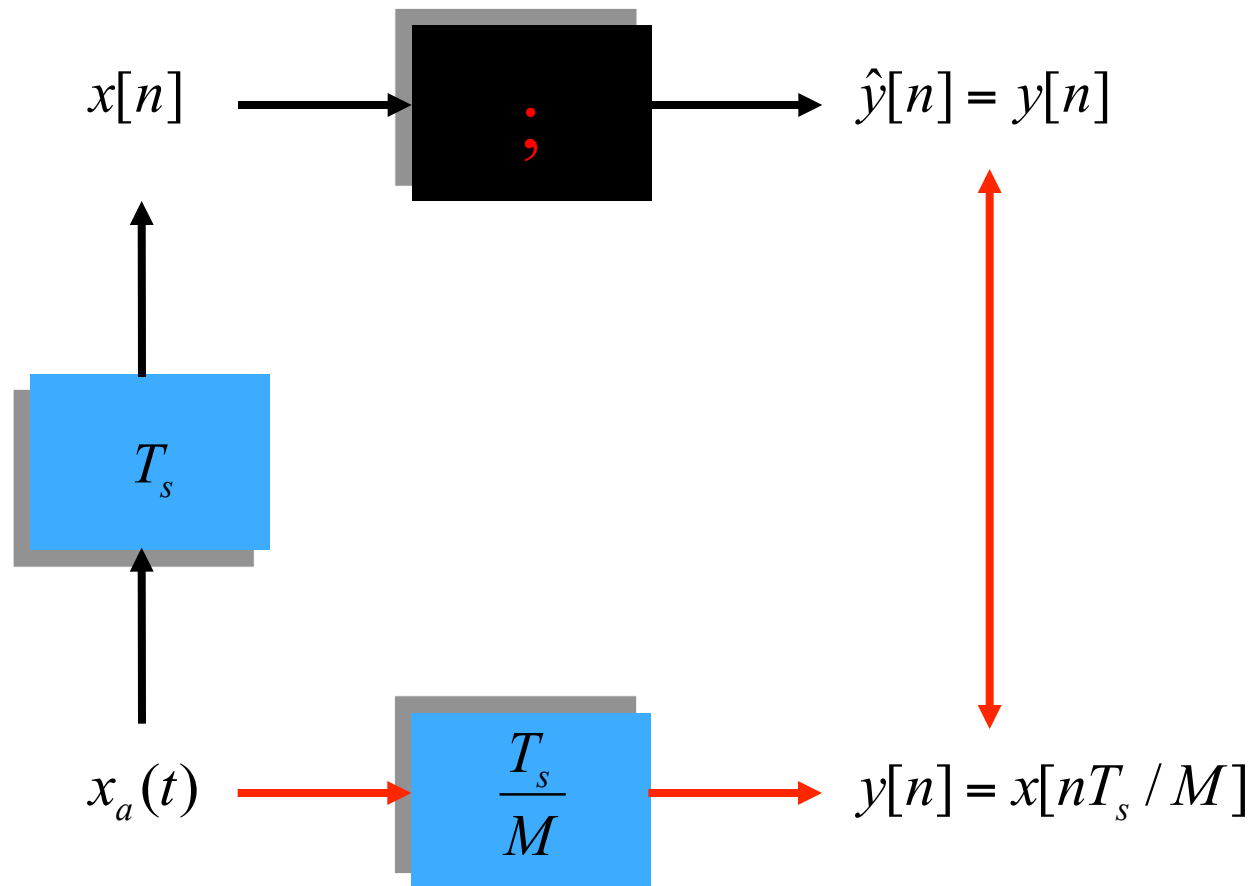


Πολυρυθμική Επεξεργασία

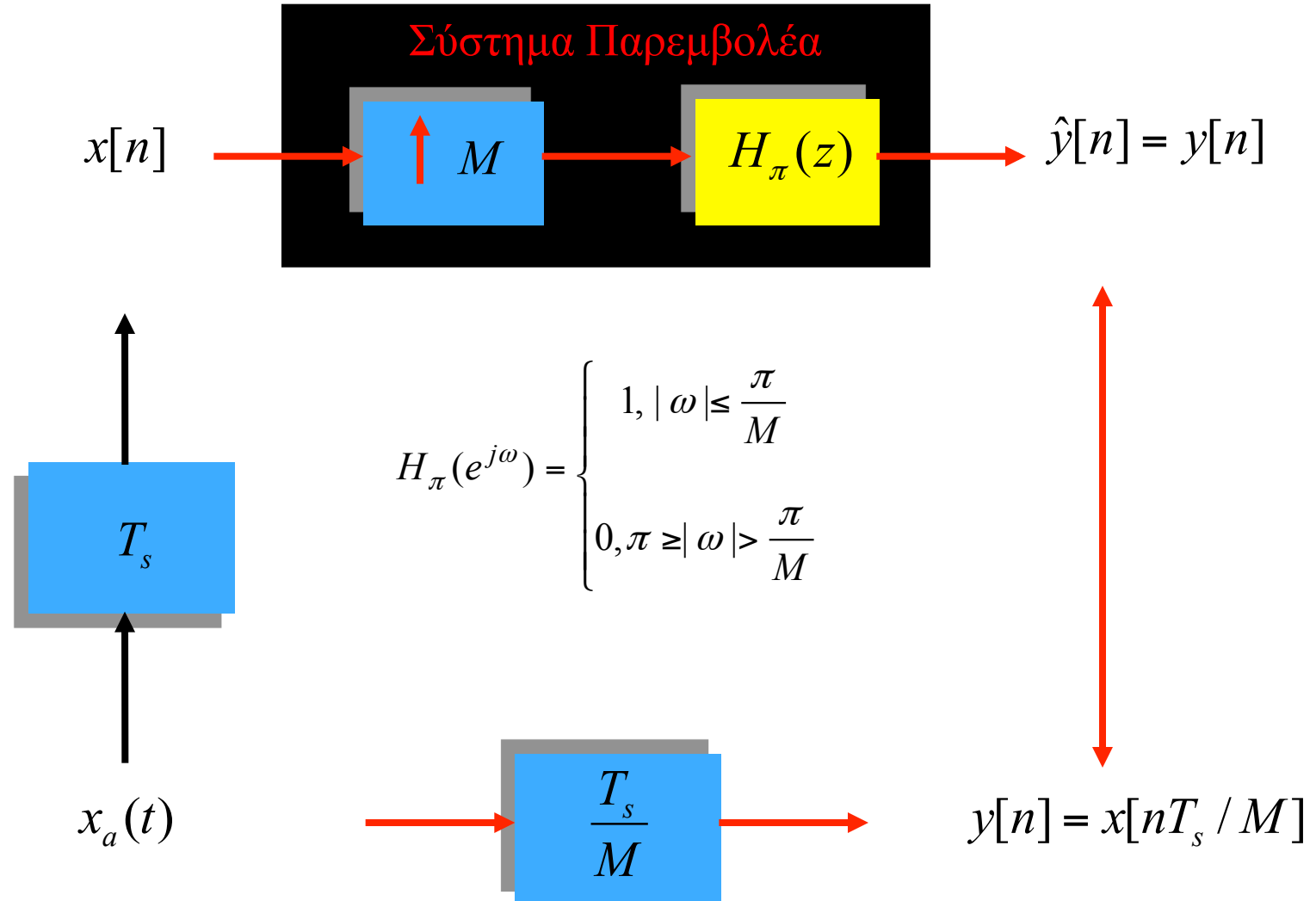


Πολυρυθμική Επεξεργασία

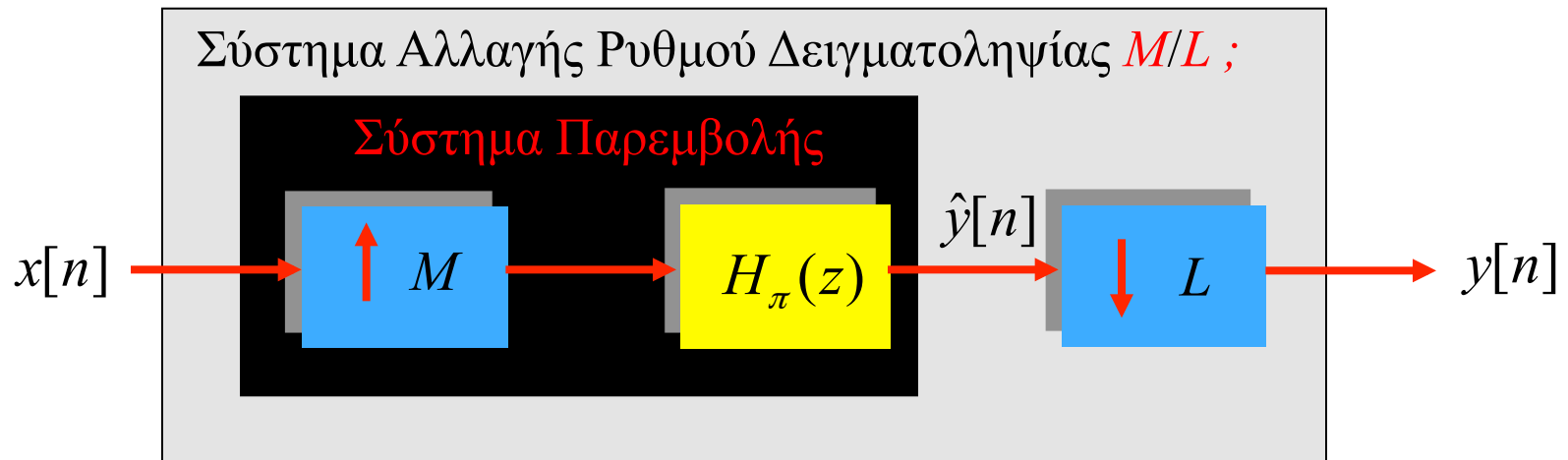
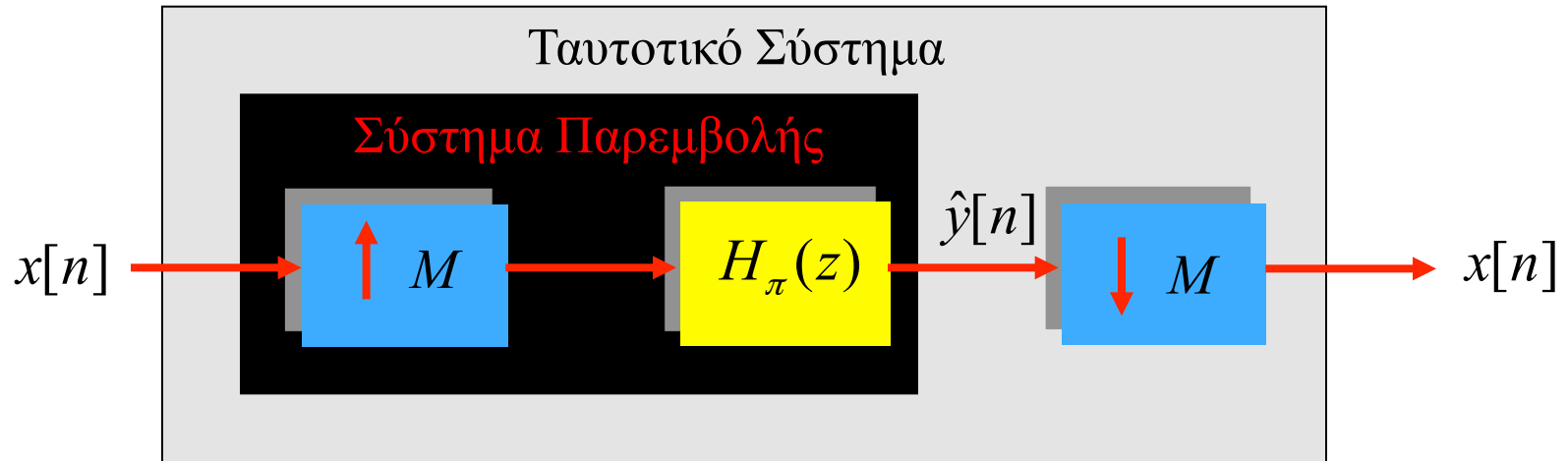
Υπερδειγματοληψία



Πολυρυθμική Επεξεργασία

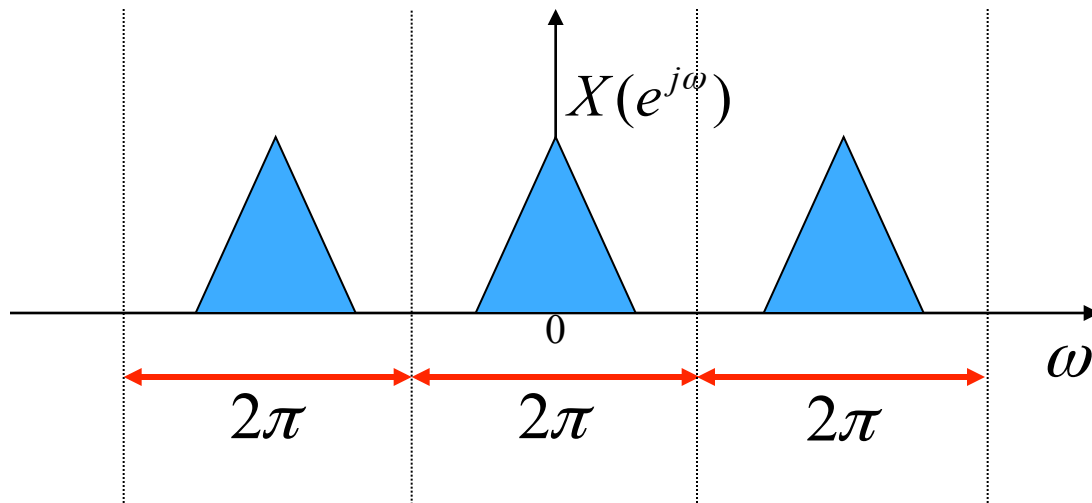
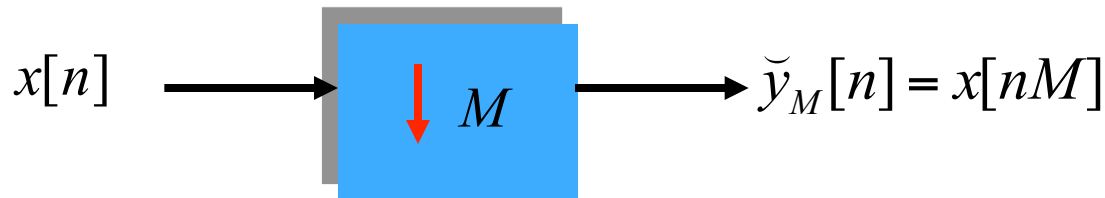


Πολυρυθμική Επεξεργασία



Πολυρυθμική Επεξεργασία

Αποδεκατιστής ή Υποδειγματολήπτης κατά παράγοντα M



Υπάρχει Σχέση

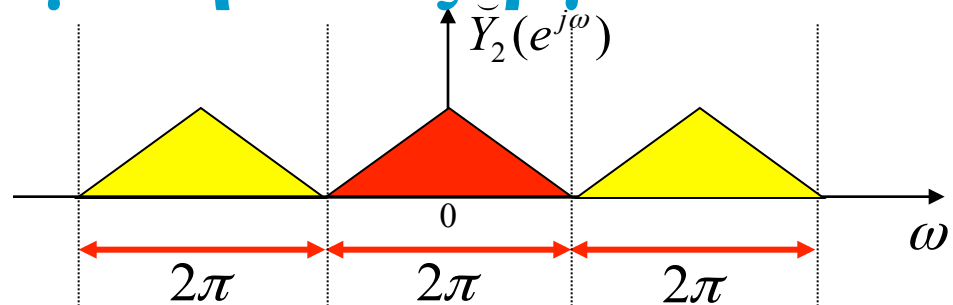
$$X(e^{j\omega}) \stackrel{;}{\leftrightarrow} \check{Y}_M(e^{j\omega})$$

και ποιά;

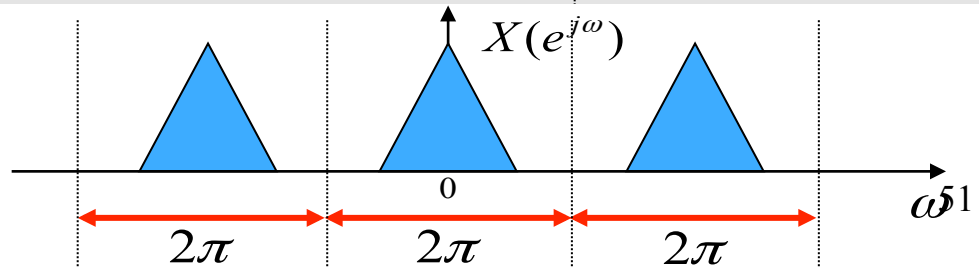
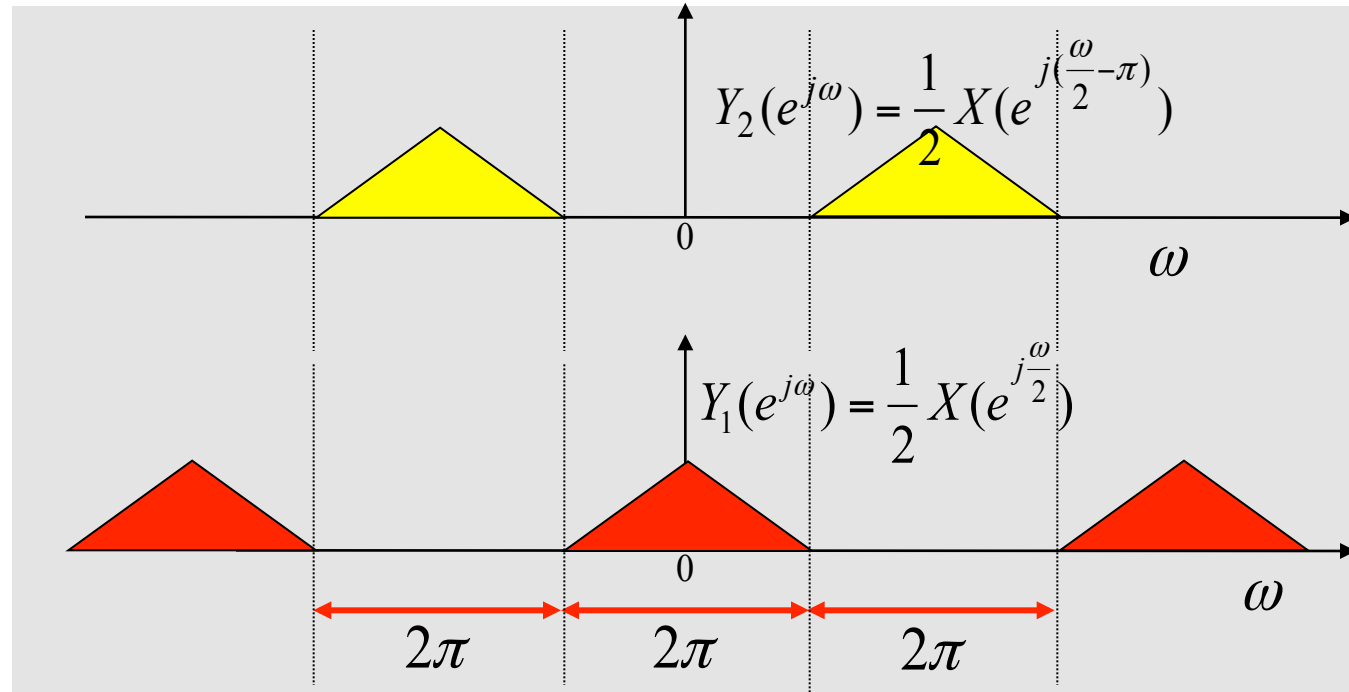
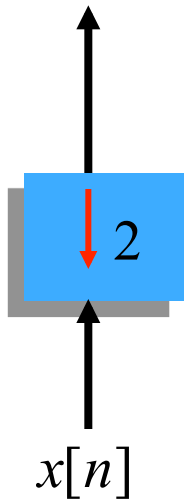


Πολυρυθμική Επεξεργασία

$$\tilde{Y}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j\omega/M} e^{-j2\pi k/M})$$

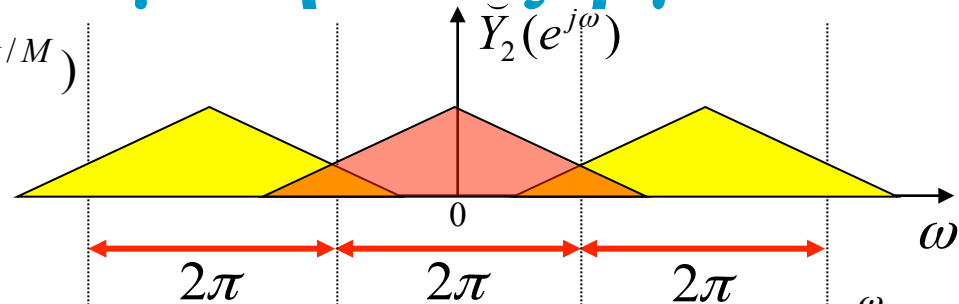


$$\tilde{y}_2[n] = x[2n]$$

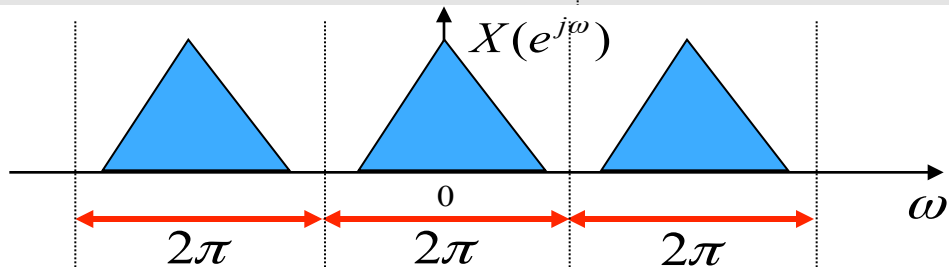
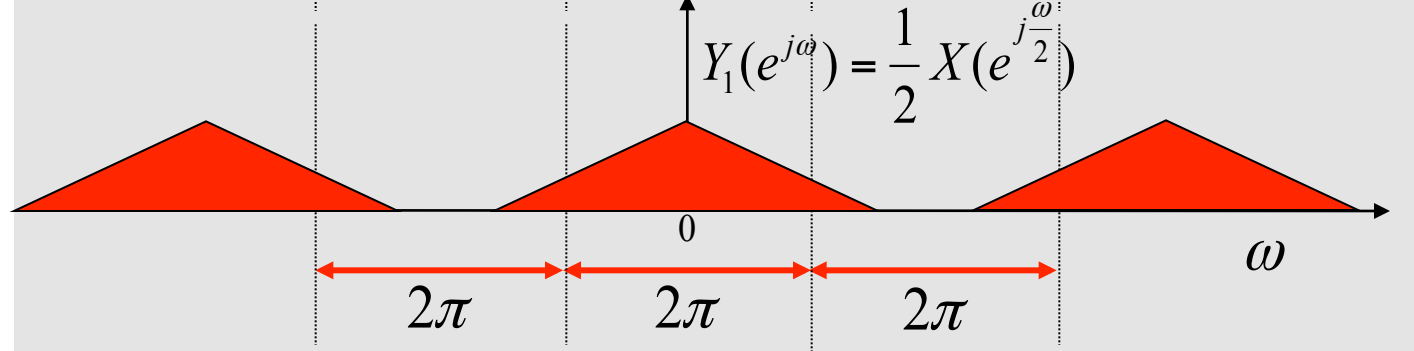
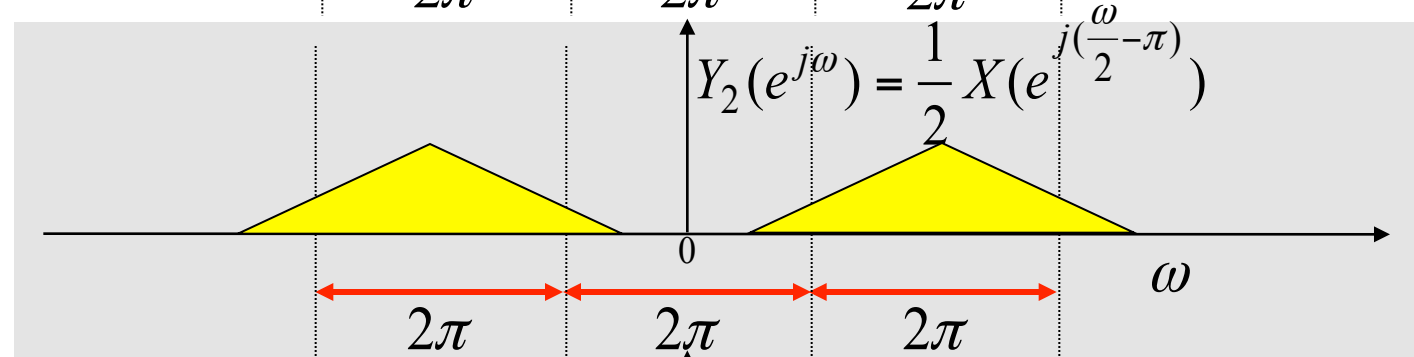
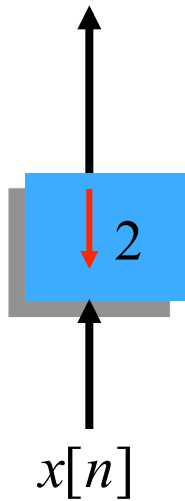


Πολυρυθμική Επεξεργασία

$$\tilde{Y}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j\omega/M} e^{-j2\pi k/M})$$



$$\tilde{y}_2[n] = x[2n]$$

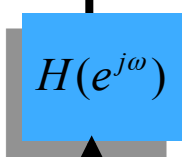
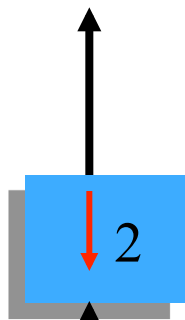


Πολυρυθμική Επεξεργασία

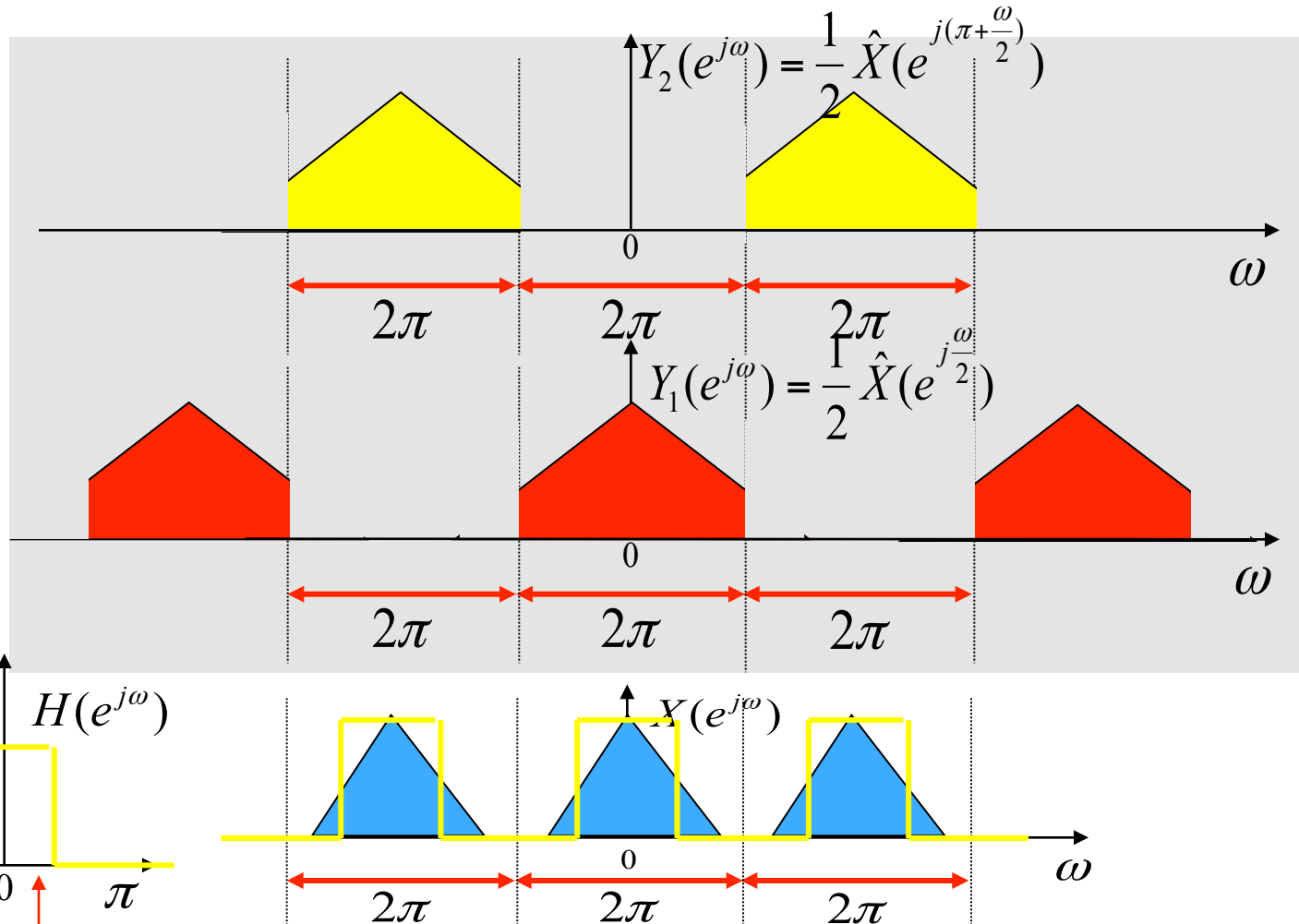
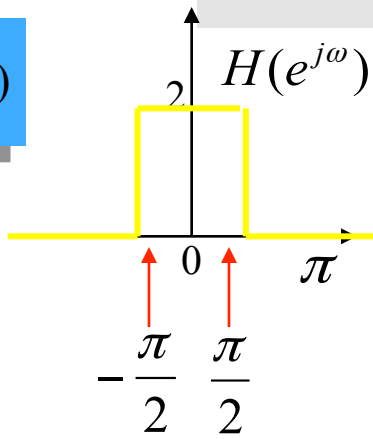
$$\check{Y}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{X}(e^{j\omega/M} e^{j2\pi k/M})$$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

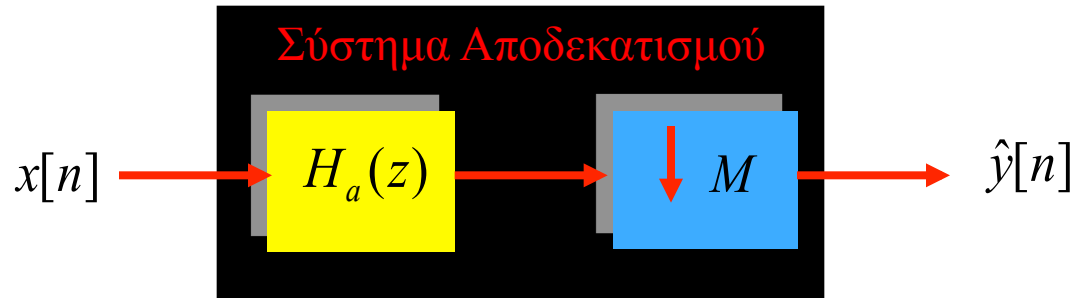
$$\check{y}_2[n] = \hat{x}[2n]$$



$x[n]$



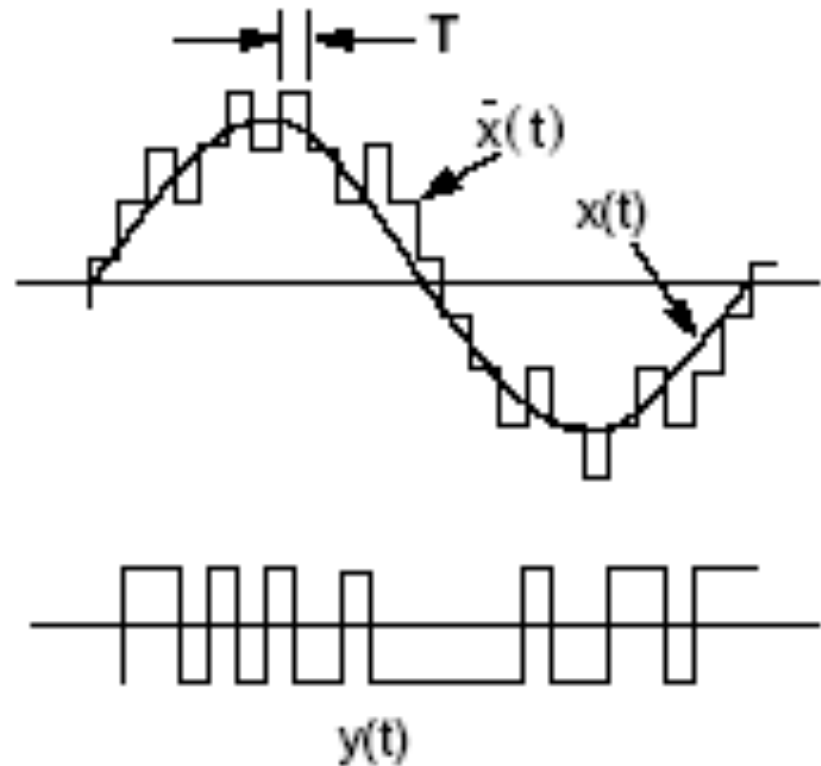
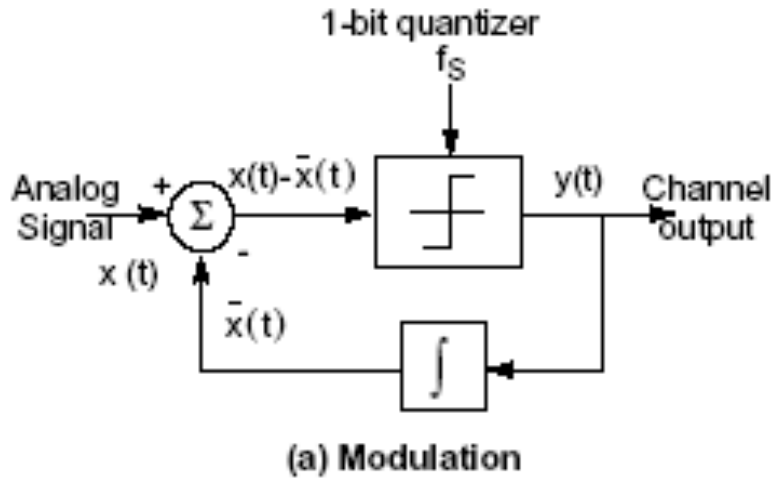
Πολυρυθμική Επεξεργασία



$$H_a(e^{j\omega}) = \begin{cases} M, & |\omega| \leq \frac{\pi}{M} \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \frac{\pi}{M} \end{cases}$$



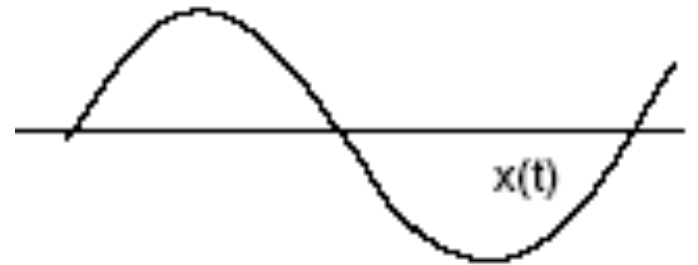
Διαμόρφωση Δέλτα



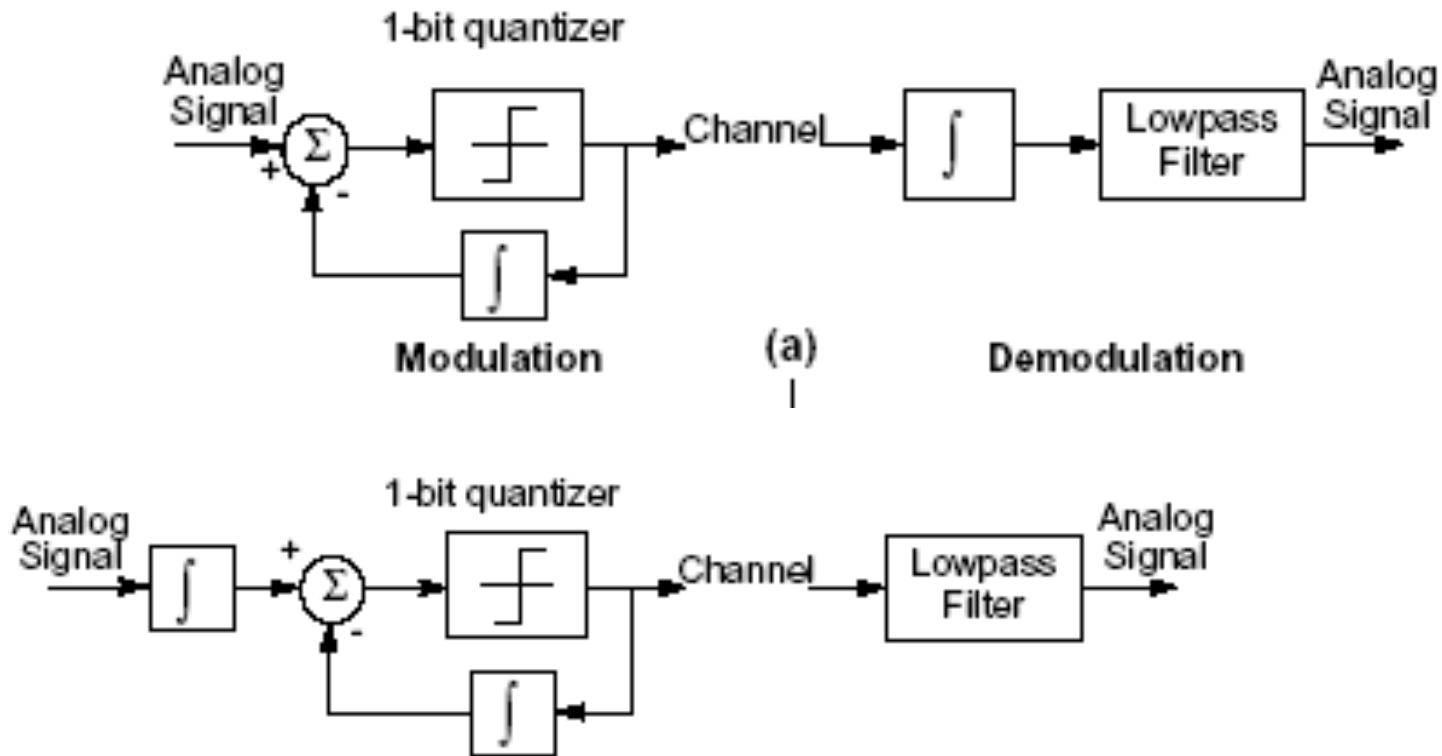
Διαμόρφωση Δέλτα



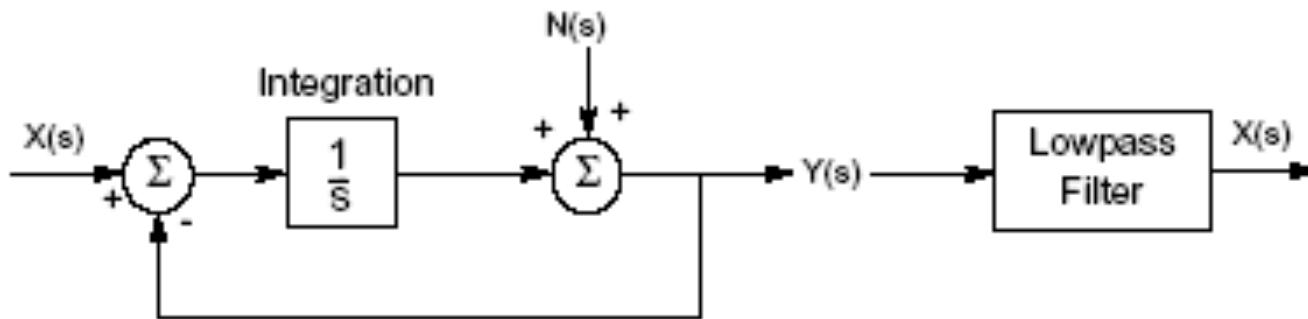
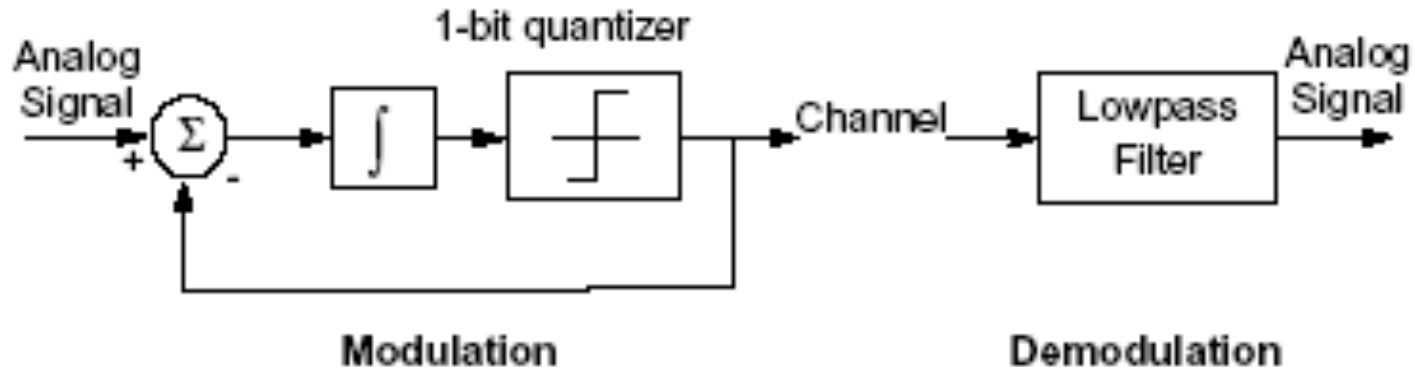
(b) Demodulation



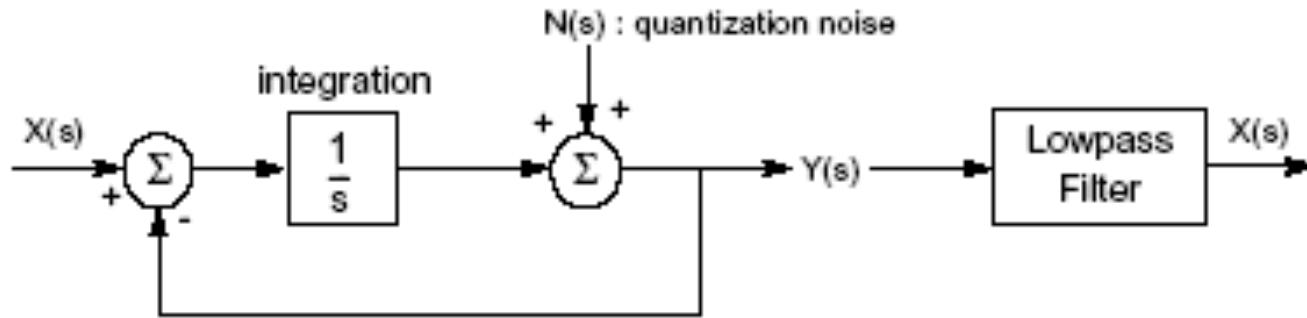
Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα



Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα



Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα



Signal Transfer Function: $Y(s) = [X(s) - Y(s)] \frac{1}{s}$
(when $N(s) = 0$)

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1} \quad \text{: lowpass filter}$$



Noise Transfer Function: $Y(s) = -Y(s) \frac{1}{s} + N(s)$
(when $X(s) = 0$)

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{s}{s+1} \quad \text{: highpass filter}$$

