ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων Φίλτρο Kalman

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Ακολουθιακή Επεξεργασία

Τα δείγματα του στοχαστικού σήματος $\{\chi_n\}$ διατίθενται ακολουθιακά και επομένως καλούμαστε να εκτιμήσουμε τα δείγματα του σήματος $\{\varsigma_n\}$ με συνεχώς αυξανόμενη πληροφορία.

Άρα τη χρονική στιγμή n η εκτίμηση του ς_n μπορεί να γίνει με χρήση των δειγμάτων $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n\}$.

Πως μπορούμε να λύσουμε σ' αυτή την περίπτωση το πρόβλημα;

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Τροποποίηση της FIR περίπτωσης του φίλτρου *Wiener*

$$\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, N-1\} \qquad \textit{FIR} \text{ φίλτρο}$$

$$\mathcal{A}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Εξισώσεις Wiener-Hopf

$$r_{\chi\varsigma}(m) = \sum_{k=1}^{n} h_k r_{\chi\chi}(m-k), \forall m \in \mathcal{A}_n$$

Το *Βέλτιστο* φίλτρο προκύπτει από τη λύση ενός Toeplitz *γραμμικού συστήματος* με τον *Αλγόριθμο* του Levinson.

Μήπως όμως υπάρχει κάποιο πρόβλημα;

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Η Ιδέα του *Kalman* και το φίλτρο του

Η συσχέτιση της εκτίμησης $\hat{\varsigma}_n$ τη χρονική στιγμή n με την εκτίμηση $\hat{\varsigma}_{n-1}$ του σήματος τη χρονική στιγμή n-1.

Στο φίλτρο Wiener τα σήματα περιγράφονται με τη βοήθεια των *στατιστικών* β’ τάξης.

Στο φίλτρο Kalman τα σήματα περιγράφονται με τη βοήθεια ΓΣ στο *Χώρο Κατάστασης*.

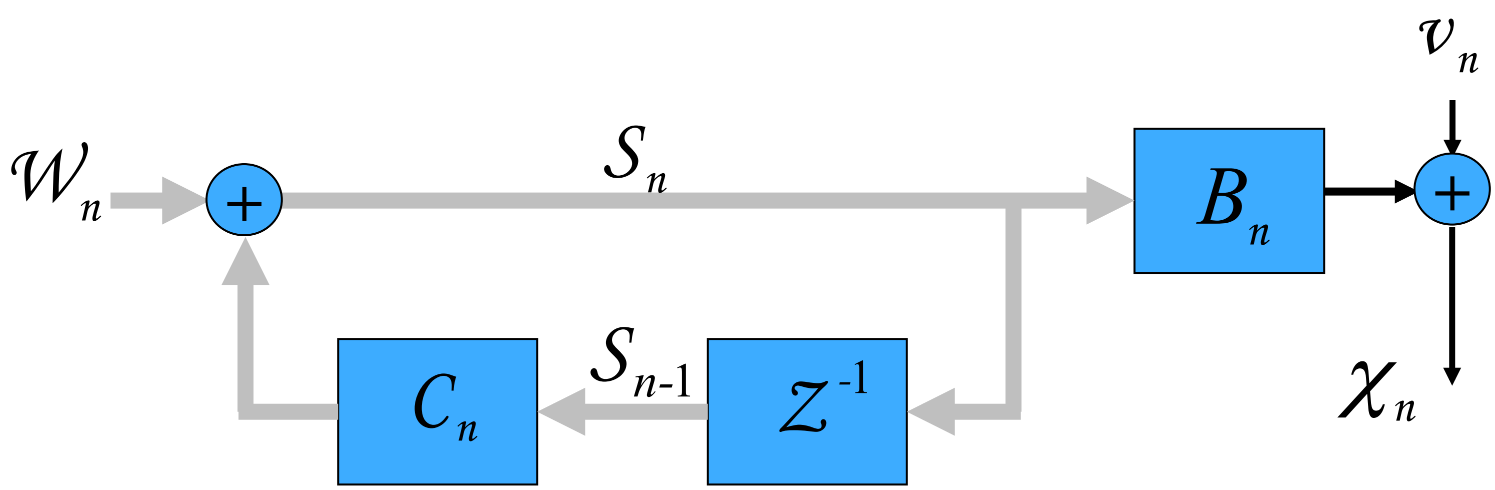
Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Η Ιδέα του *Kalman* και το φίλτρο του

Χώρος Κατάστασης

$$S_n = C_n S_{n-1} + W_n$$ *Καταστατική Εξίσωση*

$$\chi_n = B_n^t S_n + v_n$$ *Εξίσωση Εξόδου*

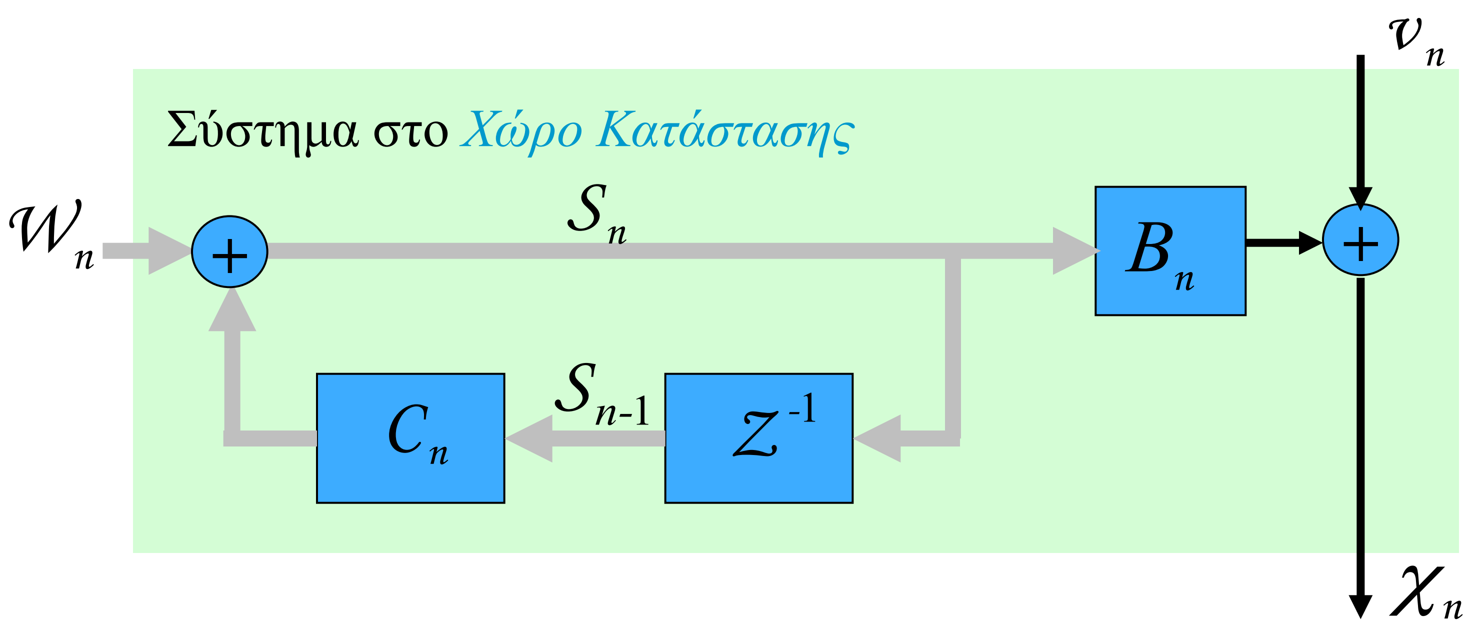


Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

$\mathcal{W}_n$ διανυσματικός *Λευκός Θόρυβος* με μητρώο *συνδιασποράς* $Q_n = \mathcal{E}\{\mathcal{W}_n \mathcal{W}_n^t\}$

v_n *Λευκός Θόρυβος* μέτρησης με *διασπορά* $q_n = \mathcal{E}\{v_n^2\}$ και $\mathcal{E}\{v_n \mathcal{W}_n\} = 0$

$\mathcal{S}_0$ Αρχική Κατάσταση του συστήματος με *Μέση τιμή* $\bar{\mathcal{S}}_0$ και μητρώο *συνδιασπο-ράς* Σ_0. Επίσης $\mathcal{E}\{v_n \mathcal{S}_0\} = 0$ και $\mathcal{E}\{\mathcal{S}_0 \mathcal{W}_n^t\} = 0$.



Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Επαναδιατύπωση του Προβλήματος Εκτίμησης.

Θεωρώντας ότι το στοχαστικό σήμα $\{x_n\}$ μας διατίθεται ακολουθιακά και ότι οι ακολουθίες $\{C_n\}$, $\{B_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{q_n\}$ είναι γνωστές, θέλουμε να εκτιμήσουμε την Κατάσταση του Συστήματος S_n σαν γραμμικό συνδυασμό των διαθέσιμων δειγμάτων, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

Μπορούμε να κάνουμε *Διαφορετικές Εκτιμήσεις της Κατάστασης;*

- *Εκτίμηση βασισμένη σε Πρόβλεψη*
- *Εκτίμηση βασισμένη σε Φιλτράρισμα*
- *Εκτίμηση βασισμένη σε Εξομάλυνση*

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

•*Εκτίμηση βασισμένη σε Πρόβλεψη.*

$$\hat{S}_{n|n\text{-}1} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{n,k}\chi_k$$

•*Εκτίμηση βασισμένη σε Φιλτράρισμα*

$$\hat{S}_{n|n} = \sum_{k=1}^{n} H_{n,k}\chi_k$$

•*Εκτίμηση βασισμένη σε Εξομάλυνση*

$$\hat{S}_{n-m|n} = \sum_{k=1}^{n} D_{n,k}\chi_k$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Σκοπός μας είναι τώρα να *εκφράσουμε* την Βέλτιστη Εκτίμηση *Αναδρομικά*.

Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε το:

1. *Εκ των Προτέρων Σφάλμα Εκτίμησης* και το αντίστοιχο μητρώο *συνδιασποράς*
2. *Εκ των Υστέρων Σφάλμα Εκτίμησης* και το αντίστοιχο μητρώο *συνδιασποράς*

και θα θεωρήσουμε ότι την χρονική στιγμή *n, εκτός του δείγματος* x_n, μας διατίθενται από τη χρονική στιγμή *n*-1

3. *Το Εκ των Υστέρων Σφάλμα Εκτίμησης* και το αντίστοιχο μητρώο *συνδιασποράς*
4. *Η βέλτιστη Εκ των Υστέρων Εκτίμηση* της Κατάστασης.

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

1. Ορίζουμε το

- *Εκ των Προτέρων Σφάλμα Εκτίμησης*:

$$e_{n|n-1} = S_n - \hat{S}_{n|n-1} = S_n - \sum_{k=1}^{n-1} F_{n,k} \chi_k$$

με μητρώο *συνδιασποράς*

$$\Sigma_{n|n-1} = \mathcal{E}\left\{\left(S_n - \hat{S}_{n|n-1}\right)\left(S_n - \hat{S}_{n|n-1}\right)^t\right\}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

2. και το

•*Εκ των Υστέρων Σφάλμα Εκτίμησης*:

$$e_{n|n} = S_n - \hat{S}_{n|n} = S_n - \sum_{k=1}^{n} H_{n,k}\chi_k$$

με μητρώο *συνδιασποράς*

$$\Sigma_{n|n} = \mathcal{E}\{(S_n - \hat{S}_{n|n})(S_n - \hat{S}_{n|n})^t\}$$

3. και θεωρούμε γνωστά το $\hat{S}_{n-1|n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} H_{n-1,k}\chi_k$ και

4. το μητρώο $\Sigma_{n-1|n-1}$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Σχέσεις που ορίζουν το φίλτρο Kalman, για $n>0$:

$$\Sigma_{n|n-1} = C_n \Sigma_{n-1|n-1} C_n^t + Q_n$$

$$K_n = \Sigma_{n|n\text{-}1} B_n (q_n + B_n^t \Sigma_{n|n\text{-}1} B_n)^{-1}$$ *Κέρδος Kalman*

$$\Sigma_{n|n} = (I - K_n B_n) \Sigma_{n|n\ \ 1}$$

$$\hat{S}_{n|n-1} = C_n \hat{S}_{n-1|n-1}$$

$$\hat{S}_{n|n} = \hat{S}_{n|n\text{-}1} + (\chi_n - B_n^t \hat{S}_{n|n\text{-}1}) K_n$$

Με αρχική εκτίμηση $\hat{S}_{0|0} = S_0$ *και* $\Sigma_{0|0} = \Sigma_0$

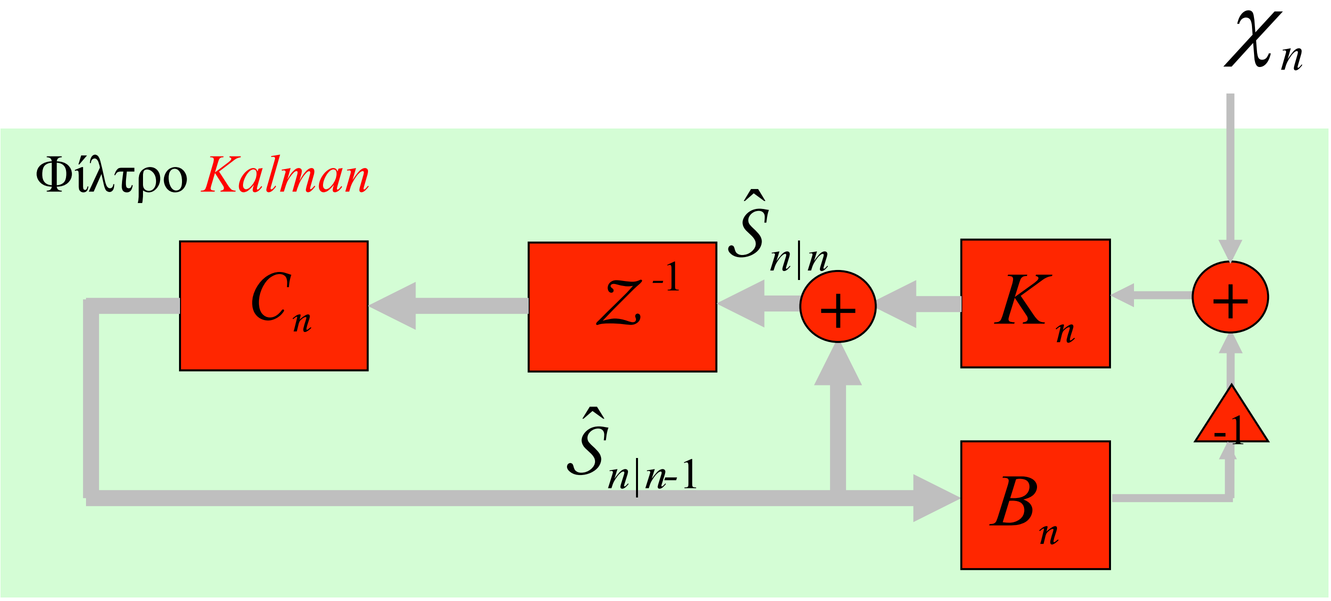
Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Εκ των προτέρων Εκτίμηση (*Πρόβλεψη*)

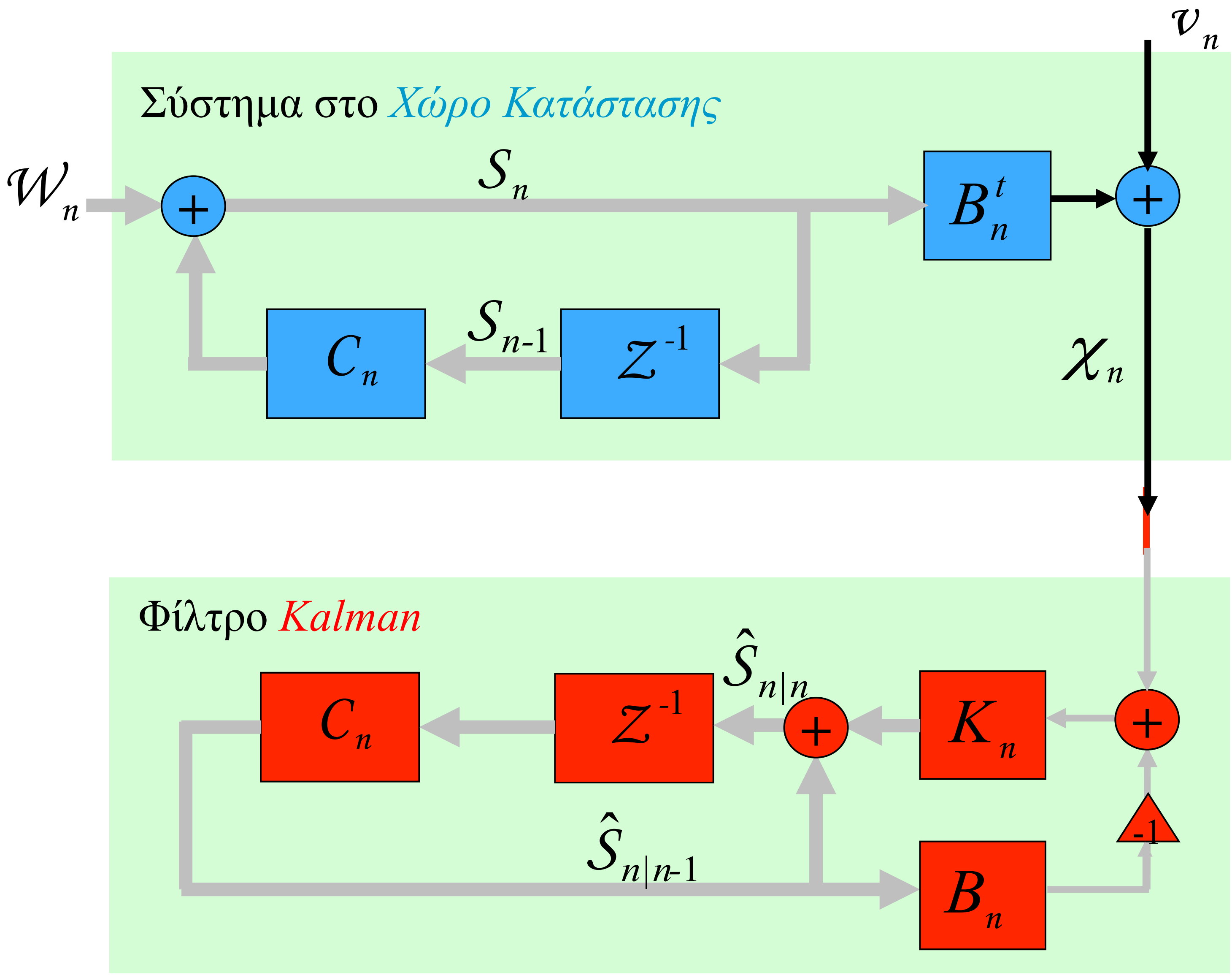
$$\hat{S}_{n|n-1} = C_n \hat{S}_{n-1|n-1}$$

Εκ των υστέρων Εκτίμηση (*Φιλτράρισμα*)

$$\hat{S}_{n|n} = \hat{S}_{n|n\text{-}1} + (\chi_n - B_n^t \hat{S}_{n|n\text{-}1}) K_n$$



Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων



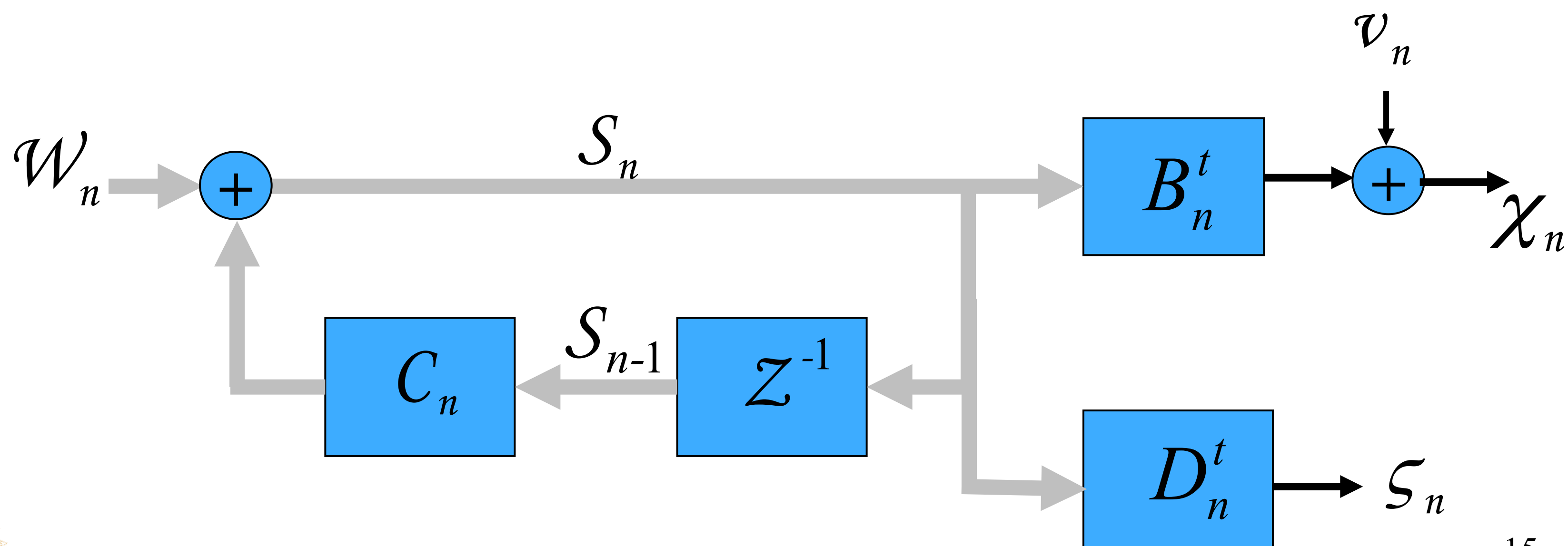
Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Επαυξημένο Σύστημα στο Χώρο Κατάστασης

$$S_n = C_n S_{n-1} + W_n$$ *Καταστατική Εξίσωση*

$$\chi_n = B_n^t S_n + v_n$$ *Εξίσωση Εξόδου*

$$\varsigma_n = D_n^t S_n$$



Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Εναλλακτική Σημασία των αποτελεσμάτων

Ας υποθέσουμε παρόλο που διαθέτουμε τα σήματα $\{\chi_n\},\{\varsigma_n\}$ θέλουμε να βρούμε τη συνιστώσα $\hat{\varsigma}_n$ του ς_n που σχετίζεται με τα δείγματα $\{\, x_{n-(N-1)}, x_{n-(N-2)}, \ldots, x_n\}$ με τον παρακάτω τρόπο:

$$\hat{\varsigma}_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_{n-k}$$

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος είδαμε ότι είναι η ακόλουθη:

$$\mathcal{E}\{X_n \varsigma_n\} = \mathcal{E}\{X_n X_n^t\} H_N$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Αν έχουμε στη διάθεσή μας τις υλοποιήσεις των σημάτων $\{x_n\},\{s_n\}$ και υποθέσουμε στασιμότητα και εργοδικότητα, τότε:

$$\mathcal{E}\{X_n \varsigma_n\} \approx \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} X_k s_k$$

$$\mathcal{E}\{X_n X_n^t\} \approx \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} X_k X_k^t$$

και επομένως:

$$\sum_{k=1}^{L} X_k s_k = \left(\sum_{k=1}^{L} X_k X_k^t\right)\mathcal{H}_N(L)$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Ένα Πολύ γνωστό πρόβλημα ανάλογο του Προβλήματος του Kalman

Ας υποθέσουμε ότι οι υλοποιήσεις $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ των σημάτων $\{\chi_n\},\{\varsigma_n\}$ διατίθενται ακολουθιακά και κάθε φορά καλούμαστε να εκτιμήσουμε το $\hat{s}_n$ βασισμένοι στην υπάρχουσα πληροφορία $\{(x_1,s_1),\ldots,(x_n,s_n)\}$ με τη σχέση:

$$\hat{\varsigma}_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_{n-k}$$

Πως μπορούμε εδώ να εφαρμόσουμε την ιδέα του Kalman;

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Αν ορίσουμε τις ποσότητες:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k s_k$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} X_k X_k^t$$

τότε τη χρονική στιγμή n η $\sum_{k=1}^{L} X_k s_k = (\sum_{k=1}^{L} X_k X_k^t)\mathcal{H}_N(L)$

γίνεται:

$$S_n = R_n \mathcal{H}_N(n) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \mathcal{H}_N(n) = R_n^{-1} S_n$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Η ίδια εξίσωση τη χρονική στιγμή n-1 θα είναι

$$S_{n-1} = R_{n-1}\mathcal{H}_N(n-1)$$

όμως

$$S_n = S_{n-1} + X_n s_n$$

$$R_n = R_{n-1} + X_n X_n^t$$

άρα

$$S_n = (R_n - X_n X_n^t)\mathcal{H}_N(n-1) + s_n X_n$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathcal{H}_N(n) = \mathcal{H}_N(n-1) + (s_n - X_n^t \mathcal{H}_N(n-1)) R_n^{-1} X_n$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Χρησιμοποιώντας αναδρομή και στον αντίστροφο:

$$R_n^{-1} = (R_{n-1} + X_n X_n^t)^{-1} = R_{n-1}^{-1} - \frac{R_{n-1}^{-1} X_n X_n^t R_{n-1}^{-1}}{1 + X_n^t R_{n-1}^{-1} X_n}$$

και άρα

$$\mathcal{H}_N(n) = \mathcal{H}_N(n-1) + (s_n - X_n^t \mathcal{H}_N(n-1)) R_n^{-1} X_n$$

$$R_n^{-1} X_n = \frac{1}{1 + X_n^t R_{n-1}^{-1} X_n} R_{n-1}^{-1} X_n$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Αντίστοιχες Ποσότητες *Kalman*:

$$K_n = R_{n-1}^{-1} X_n$$

$$\gamma_n = \frac{1}{1 + X_n^t K_n}$$

$$R_n^{-1} = R_{n-1}^{-1} - \gamma_n K_n K_n^t$$

$$e_n = s_n - X_n^t \mathcal{H}_N(n-1)$$

$$\mathcal{H}_N(n) = \mathcal{H}_N(n-1) + \gamma_n e_n K_n$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Αναδρομικός Αλγόριθμος Ελαχίστων Τετραγώνων: