ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Nothing in nature is *random* … A thing appears *random* only through the incompleteness of our knowledge.

Spinoza, Ethics I

I do not believe that *God* rolls dice.

attributed to Einstein

Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε είναι το ακόλουθο:

Μας διατίθεται ένα *στοχαστικό* σήμα $\{\chi_n\}$ με τη βοήθεια του οποίου καλούμαστε να εκτιμήσουμε ένα άλλο *στοχαστικό* σήμα $\{\varsigma_n\}$.

Η διαδικασία εκτίμησης του σήματος $\{\varsigma_n\}$ από το σήμα $\{\chi_n\}$, στην ορολογία της επεξεργασίας σημάτων, καλείται *φιλτράρισμα* του σήματος $\{\chi_n\}$ και το σύστημα *φίλτρο*.

Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Αν χρησιμοποιήσουμε σαν κριτήριο το *Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα*

$$\mathbf{E}\left\{(\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n)^2\right\}$$

όπου η εκτίμηση $\hat{\varsigma}_n$ θα πρέπει να είναι συνάρτηση του σήματος $\{\chi_n\}$, δηλαδή

$$\hat{\varsigma}_n = \Phi\left\{\ldots, \chi_{-1}, \chi_0, \chi_1, \ldots\right\}$$

τότε, η *βέλτιστη μη γραμμική* εκτίμηση της ακολουθίας $\{\varsigma_n\}$ είναι η ακολουθία των δεσμευμένων μέσων όρων:

$$\hat{\varsigma}_n = \mathrm{E}\left\{\varsigma_n \mid \ldots, \chi_{-1}, \chi_0, \chi_1, \ldots\right\}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Εκτίμηση κάθε όρου $\hat{\varsigma}_n$ της ακολουθίας $\{\varsigma_n\}$ από *γραμμικό συνδυασμό* των δειγμάτων του σήματος $\{\chi_n\}$. Δηλαδή:

$$\hat{\varsigma}_n = d_n + \sum_k h_{n,k} \chi_{n-k}$$

όπου $\{d_n\}$ και $\{h_{n,k}\}$ *ντετερμινιστικές* ακολουθίες τις οποίες και θα πρέπει να προσδιορίσουμε.

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Διανυσματικοί Χώροι και η Αρχή της Ορθογωνιότητας

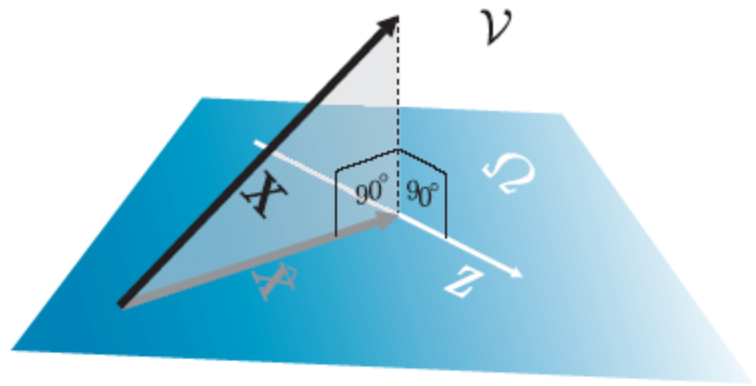
Έστω Διανυσματικός χώρος Hilbert $\boldsymbol{V}$, όπου $<X, Y>$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $X, Y \in \boldsymbol{V}$. Έστω τώρα Ω ένας υποχώρος του $\boldsymbol{V}$ και $X \in \boldsymbol{V}$. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε το $Y \in \Omega$ το οποίο είναι η λύση του ακόλουθου προβλήματος βελτιστοποίησης ή προσέγγισης:

$$\min_{Y \in \Omega} \| X - Y \|_2^2$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Η *βέλτιστη* λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης :

$$\min_{Y \in \Omega} \| X - Y \|_2^2$$



Είναι η *κάθετη προβολή* $\hat{X}$ του διανύσματος X στον υπόχωρο Ω.

Είναι φανερό ότι για κάθε στοιχείο Z *του* υπόχωρου Ω θα ισχύει η ακόλουθη συνθήκη *ορθογωνιότητας*:

$$< X - \hat{X}, Z >= 0, \ \ \forall Z \in \Omega$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Αν χρησιμοποιήσουμε σαν κριτήριο το *Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα*

$$\mathrm{E}\left\{(\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n)^2\right\}$$

και την ιδέα των *γραμμικών εκτιμητών* $\hat{\varsigma}_n = d_n + \sum_k h_{n,k}\chi_{n-k}$, τότε το κριτήριο γράφεται:

$$\mathrm{E}\left\{(\varsigma_n - d_n - \sum_k h_{n,k}\chi_{n-k})^2\right\}$$

και η βέλτιστη λύση έγκειται στον προσδιορισμό των *ντετερμινιστικών* ακολουθιών $\{d_n\}$ και $\{h_{n,k}\}$ που ελαχιστοποιούν το παραπάνω κριτήριο, δηλαδή:

$$\min_{\{d_n\},\{h_{n,k}\}} \mathrm{E}\left\{(\varsigma_n - d_n - \sum_k h_{n,k}\chi_{n-k})^2\right\}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Ομοιότητα προβλημάτων βελτιστοποίησης

$$\min_{Y\in\Omega} \| X - Y \|_2^2 \qquad \text{(Πρ. 1)}$$

$$\min_{\hat{\varsigma}_n} \mathrm{E}\left\{ (\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n)^2 \right\} \qquad \text{(Πρ. 2)}$$

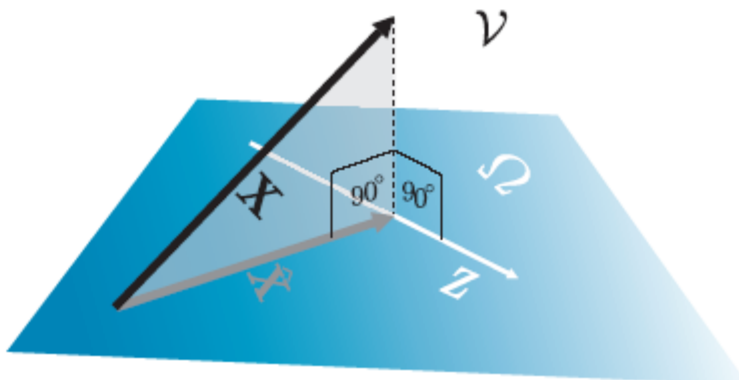
$$\min_{\{d_n\},\{h_{n,k}\}} \mathrm{E}\left\{ (\varsigma_n - d_n - \sum_k h_{n,k}\chi_{n-k})^2 \right\}$$

Άραγε μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α*ρχή* της Ο*ρθογωνιότητας*

στο Πρόβλημα 2;

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Έστω ο Διανυσματικός χώρος Hilbert $\mathcal{V}$, των *τυχαίων μεταβλητών* στον οποίο ανήκουν και τα δείγματα των δύο ακολουθιών $\{\chi_n\}$ και $\{\varsigma_n\}$. Οι *τυχαίες μεταβλητές* $1, \chi_{n-k_1}, \chi_{n-k_2}, \ldots$, ορίζουν τον υπό-χωρο Ω του $\mathcal{V}$ και επομένως για να μπορούμε να εφαρμόσουμε την *Αρχή* της *Ορθογωνιότητας*



αρκεί να ορίσουμε την πράξη του εσωτερικού γινομένου στο χώρο αυτό.

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Η πράξη

$$< \chi, \psi >= \mathrm{E}\{\chi\psi\}$$

αποτελεί *εσωτερικό γινόμενο* και επομένως,

$$\| \varsigma_n - \hat{\varsigma}_n \|_2^2 = \mathrm{E}\left\{(\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n)^2\right\}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Για τον προσδιορισμό του $\hat{\varsigma}_n$ από την Αρχή της Ορθογωνιότητας θα πρέπει

$$\mathrm{E}\left\{(\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n)\zeta\right\} = 0, \ \forall \zeta \in \Omega$$

δηλαδή για κάθε ζ που αποτελεί *γραμμικό συνδυασμό* των 1, $\chi_{n-k}, k \in \mathcal{A}$, ή ισοδύναμα:

$$\mathrm{E}\left\{(\varsigma_n - d_n - \sum_{k \in \mathcal{A}} h_{n,k}\chi_{n-k}) \ 1\right\} = 0$$

$$\mathrm{E}\left\{(\varsigma_n - d_n - \sum_{k \in \mathcal{A}} h_{n,k}\chi_{n-k})\chi_{n-m}\right\} = 0, \ \forall m \in \mathcal{A}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Η πρώτη συνθήκη *Ορθογωνιότητας* δίνει:

$$d_n = \mathrm{E}\{\varsigma_n\} - \sum_{k\in\mathcal{A}} h_{n,k}\mathrm{E}\{\chi_{n-k}\}$$

και άρα :

$$\hat{\varsigma}_n = \mathrm{E}\{\varsigma_n\} + \sum_{k\in\mathcal{A}} h_{n,k}(\chi_{n-k} - \mathrm{E}\{\chi_{n-k}\})\Big\}$$

και με την αντικατάστασή της σε κάθε μια από τις υπόλοιπες συν-θήκες *Ορθογωνιότητας*, παίρνουμε:

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\varsigma_n - \mathrm{E}\{\varsigma_n\} + \sum_{k\in\mathcal{A}} h_{n,k}(\chi_{n-k} - \mathrm{E}\{\chi_{n-k}\})\Big)\chi_{n-m}\Big\} = 0,\ \forall m\in\mathcal{A}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι

$$\varsigma_n^0 = \varsigma_n - \mathrm{E}\{\varsigma_n\}$$
$$\chi_n^0 = \chi_n - \mathrm{E}\{\chi_n\}$$

Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες

$$\mathrm{E}\left\{\left(\varsigma_n - \mathrm{E}\{\varsigma_n\} + \sum_{k\in\mathcal{A}} h_{n,k}(\chi_{n-k} - \mathrm{E}\{\chi_{n-k}\})\right)\chi_{n-m}\right\} = 0,\ \forall m \in \mathcal{A}$$

γράφονται ισοδύναμα ως:

$$r_{\chi\varsigma}(n-m,n) = \sum_{k\in\mathcal{A}} h_{n,k} r_{\chi\chi}(n-m,n-k),\ \forall m \in \mathcal{A}$$

παραπάνω συνθήκες είναι γνωστές σαν *εξισώσεις* Wiener-Hopf.

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Οι *εξισώσεις* Wiener-Hopf

$$r_{\chi\varsigma}(n-m,n)=\sum_{k\in\mathcal{A}}h_{n,k}r_{\chi\chi}(n-m,n-k),\ \forall m\in\mathcal{A}$$

στη γενική περίπτωση, είναι πολύ δύσκολο να λυθούν.

Για αυτόν το λόγο καταφεύγουμε στην *ειδική περίπτωση* που τα δύο στοχαστικά σήματα είναι *από κοινού ασθενώς στάσιμα*.

Σ΄ αυτήν την περίπτωση οι *εξισώσεις* Wiener-Hopf γίνονται:

$$r_{\chi\varsigma}(m)=\sum_{k\in\mathcal{A}}h_{n,k}r_{\chi\chi}(m-k),\ \forall m\in\mathcal{A}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Οι *εξισώσεις* Wiener-Hopf απλοποιούνται περαιτέρω στις:

$$r_{\chi\varsigma}(m) = \sum_{k \in \mathcal{A}} h_k r_{\chi\chi}(m-k), \forall m \in \mathcal{A}$$

και επομένως οι εκτιμήσεις μας είναι της μορφής

$$\hat{\varsigma}_n^0 = \sum_{k \in \mathcal{A}} h_k \chi_{n-k}^0$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Η λύση των *εξισώσεων* Wiener-Hopf για *μερικές επιλογές* του συνόλου A.

$\mathcal{A} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\} \equiv \mathcal{Z}$ *Μη αιτιατό* φίλτρο Wiener

Εξισώσεις Wiener-Hopf

$$r_{\chi\varsigma}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k r_{\chi\chi}(m-k), \forall m \in \mathcal{Z}$$

Βέλτιστο ντετερμινιστικό φίλτρο

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{\chi\varsigma}(e^{j\omega})}{\Phi_{\chi\chi}(e^{j\omega})}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Βέλτιστο ντετερμινιστικό φίλτρο Wiener:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{\chi\varsigma}(e^{j\omega})}{\Phi_{\chi\chi}(e^{j\omega})}$$

Ποια ή σχέση του με τα κλασσικά Φίλτρα;

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

FIR φίλτρα: $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$

Εξισώσεις Wiener-Hopf

$$r_{\chi\varsigma}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k r_{\chi\chi}(m-k), \forall m \in \mathcal{A}$$

Το *Βέλτιστο* φίλτρο προκύπτει από τη λύση ενός Toeplitz *γραμμικού συστήματος*. Η λύση του Συστήματος μπορεί να υπολογιστεί με τον *Αλγόριθμο* του Levinson.

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

FIR φίλτρα: $\mathscr{A} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$

Ορίζουμε τις ποσότητες:

$$\mathbf{q}_N = [r_{\chi\varsigma}(0)\ r_{\chi\varsigma}(1) \cdots r_{\chi\varsigma}(N-1)]^t$$
$$\mathbf{h}_N = [h_0\ h_1 \cdots h_{N-1}]^t$$

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(N-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{xx}(1) \\ r_{xx}(N-1) & \cdots & r_{xx}(1) & r_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

Εξισώσεις Wiener-Hopf: $\mathbf{R}_N \mathbf{h}_N = \mathbf{q}_N$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Ο Αλγόριθμος του Levinson

Εξισώσεις Wiener-Hopf: $\mathbf{R}_k \mathbf{h}_k = \mathbf{q}_k,\ k = 1, 2, \ldots, N$

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(N-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{xx}(1) \\ r_{xx}(N-1) & \cdots & r_{xx}(1) & r_{xx}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{N-1} & \mathbf{p}_{N-1} \\ \mathbf{p}_{N-1}^t & r_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_N \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{N-1} & \mathbf{p}_{N-1} \\ \mathbf{p}_{N-1}^t & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{N-1} \\ \mathbf{p}_{N-1}^t \mathbf{h}_{N-1} \end{bmatrix}$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

Ο Αλγόριθμος του Levinson

$$\mathbf{R}_N \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{N-1} & \mathbf{p}_{N-1} \\ \mathbf{p}_{N-1}^t & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{N-1} \\ \mathbf{p}_{N-1}^t \mathbf{h}_{N-1} \end{bmatrix}$$

Άρα: $$\mathbf{R}_N \left(\mathbf{h}_N - \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1} \\ \boxed{r_{\chi,\varsigma}(N-1) - \mathbf{p}_{N-1}^t \mathbf{h}_{N-1}} \end{bmatrix}$$

Γενική μορφή Συστημάτων: $$\mathbf{R}_k \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k-1} \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_k = [a_k(k-1) \cdots a_k(1)\ 1]^t$$

Γραμμική Εκτίμηση Τυχαίων Σημάτων

$\mathcal{A} = \{0,1,\ldots\} \equiv \mathcal{N}$ *Αιτιατό* φίλτρο Wiener

Εξισώσεις Wiener-Hopf

$$r_{\chi\varsigma}(m) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k r_{\chi\chi}(m-k), \forall m \in \mathcal{N}$$

Βέλτιστο αιτιατό ντετερμινιστικό φίλτρο

$$H(e^{j\omega}) = \left[\frac{[\Phi_{\chi\varsigma}(e^{j\omega})]^{+}}{[\Phi_{\chi\chi}(e^{j\omega})]^{-}}\right]^{+} \frac{1}{[\Phi_{\chi\chi}(e^{j\omega})]^{+}}$$