Ψηφιακή Επεξεργασία και Ανάλυση Εικόνας

Ενότητα 2η: Δισδιάστατα Σήματα & Συστήματα – Μέρος 1

Καθ. Κωνσταντίνος Μπερμπερίδης
Πολυτεχνική Σχολή
Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Σκοποί ενότητας

- Δισδιάστατα σήματα & συστήματα
- Μετασχηματισμοί στο πεδίο των συχνοτήτων
- Η εικόνα στο πεδίο των συχνοτήτων

Περιεχόμενα ενότητας

- Βασικοί ορισμοί δισδιάστατων σημάτων
- Σημαντικές ακολουθίες & ειδικές περιπτώσεις
- Μετασχηματισμοί στο πεδίο των συχνοτήτων
- Δισδιάστατος μετασχηματισμός Fourier
- Δισδιάστατος μετασχηματισμός Συνημιτόνου
- Η εικόνα στο πεδίο των συχνοτήτων
- Συνέλιξη στις δυο διαστάσεις
- Δισδιάστατα συστήματα

Βασικοί Ορισμοί (1)

Κάθε εικόνα είναι ένα δισδιάστατο (2-D) σήμα.

- Αναλογική εικόνα:

$$x_\alpha(t_1, t_2), \quad -\infty < t_1, t_2 < \infty$$

- Ψηφιακή εικόνα:

$$x(n_1, n_2) = Q[x_a(n_1 T_1, n_2 T_2)],$$

$$n_1, n_2 \in Z, \quad T_1, T_2 \in R, \quad -\infty < n_1, n_2, T_1, T_2 < \infty$$

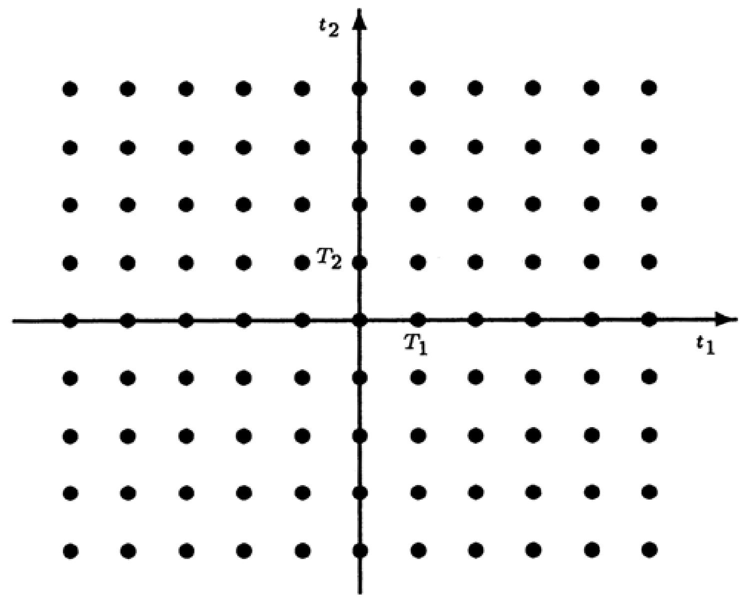
Βασικοί Ορισμοί (2)

Ένα διακριτό δισδιάστατο σήμα έχει την μορφή πίνακα και στην γενική του μορφή δηλώνεται ως:

$$x(n_1, n_2), \quad -\infty < n_1, n_2 < \infty$$

Συνήθως όμως το πεδίο ορισμού είναι πεπερασμένο:

$$x(n_1, n_2), \quad 0 < n_1 < N_1, \quad 0 < n_2 < N_2$$



Γραφική απεικόνιση δισδιάστατου σήματος

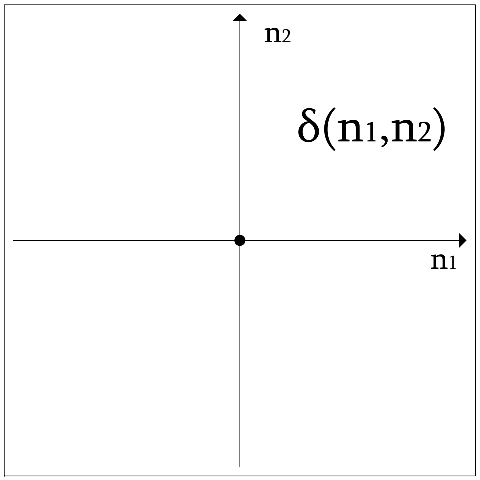
Σημαντικές ακολουθίες (1)

Μοναδιαίος (κρουστικός) παλμός: $$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1, n_2 = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Μοναδιαίο βήμα: $$u(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1, n_2 \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

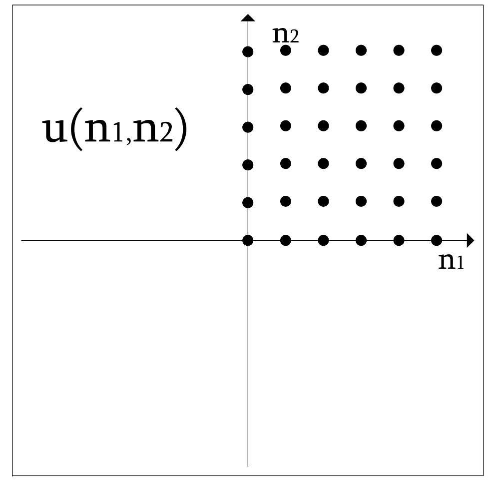
Εκθετική ακολουθία: $$x(n_1, n_2) = a^{n_1} b^{n_2}, \quad -\infty < n_1, n_2 < \infty$$

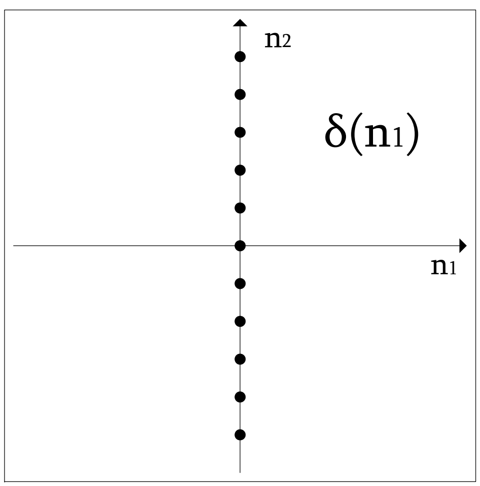
Σημαντικές ακολουθίες (2)



← μοναδιαίος παλμός

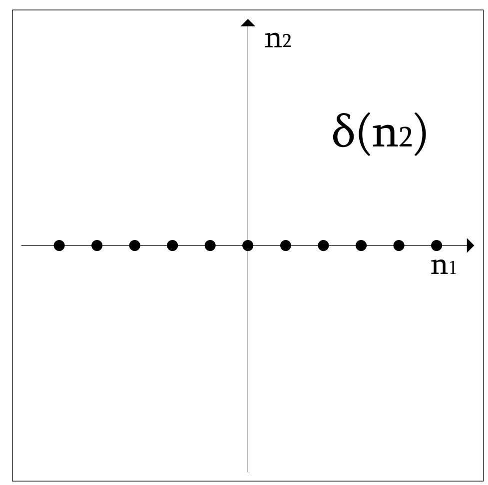
μοναδιαίο βήμα →





← παλμός στήλης

παλμός γραμμής →



Ειδικές περιπτώσεις (1)

Διαχωρίσιμες ακολουθίες: μία 2-D ακολουθία ονομάζεται **διαχωρίσιμη** εάν μπορεί να γραφεί ως

$$x(n_1, n_2) = f(n_1)g(n_2)$$

Προφανώς έχει λιγότερους βαθμούς ελευθερίας

Ο μοναδιαίος παλμός και το μοναδιαίο βήμα είναι διαχωρίσιμες ακολουθίες.

$$\delta(n_1, n_2) = \delta(n_1)\delta(n_2) \qquad u(n_1, n_2) = u(n_1)u(n_2)$$

Ειδικές περιπτώσεις (2)

Περιοδικά σήματα:

Μία 2-D ακολουθία ονομάζεται **ορθογώνια περιοδική** με περίοδο $N_1 x N_2$ εάν ισχύει

$$x(n_1, n_2) = x(n_1 + N_1, n_2) = x(n_1, n_2 + N_2)$$

Η στοιχειώδης περίοδος είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $[0, N_1) \times [0, N_2)$.

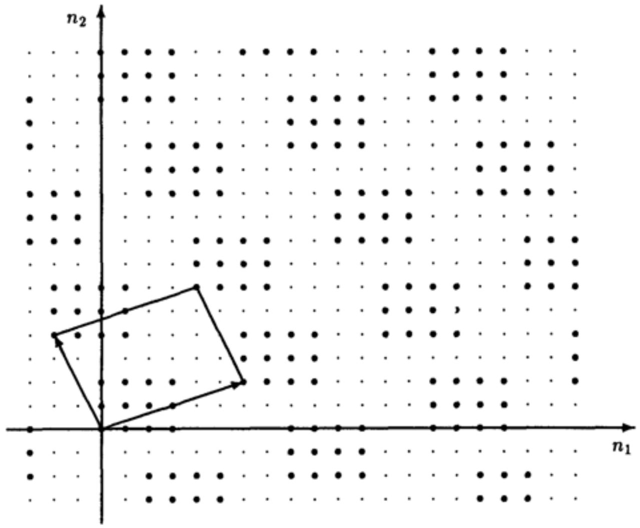
Η ορθογώνια περιοδικότητα είναι απλή αλλά δυστυχώς δεν μπορεί να καλύψει όλες τις περιπτώσεις περιοδικών 2-D σημάτων.

Ειδικές περιπτώσεις (3)

Γενικός ορισμός περιοδικών σημάτων:

Μία 2-D ακολουθία ονομάζεται **περιοδική** εάν ισχύει:

$$x(n_1, n_2) = x(n_1 + kN_{11} + mN_{12}, n_2 + kN_{21} + mN_{22})$$



Έτσι ορίζεται περιοδική επέκταση σε οποιεσδήποτε κατευθύνσεις, όχι κατ' ανάγκην ορθογώνιες.

Η βασική περίοδος είναι το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{N} = [N_{1i}, N_{2i}]^T$

Μετασχηματισμοί στο πεδίο των συχνοτήτων

- Συνήθεις μετασχηματισμοί: **DFT, DCT, Wavelet**

Γιατί οι μετασχηματισμοί είναι χρήσιμοι στην επεξεργασία εικόνας;

- Επεξεργασία στο πεδίο των συχνοτήτων.
  - Φιλτράρισμα, αφαίρεση θορύβου, κυκλική μετατόπιση, συμπίεση, περιγραφή σχήματος
- Πλεονεκτήματα: μικρότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα / εναλλακτική ερμηνεία

Δισδιάστατος Μετασχηματισμός Fourier (1)

Ο μετασχηματισμός Fourier δισδιάστατων σημάτων υπάρχει όταν η συνάρτηση είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και ορίζεται ως:

$$\text{FT}: \; F(W_1, W_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) exp(-iW_1 t_1 - iW_2 t_2) dt_1 dt_2$$

$$\text{IFT}: \; \mathrm{f}(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(W_1, W_2) exp(iW_1 t_1 + iW_2 t_2) dW_1 dW_2$$

Δισδιάστατος Μετασχηματισμός Fourier (2)

Στην περίπτωση διακριτών σημάτων χρησιμοποιείται ο διακριτός FT (DSFT – Discrete Space Fourier Transform)

FT διακριτού σήματος:

$$F(W_1, W_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) exp(-iw_1 n_1 - iw_2 n_2)$$

IFT διακριτού σήματος:

$$\mathrm{f}(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(w_1, w_2) exp(iw_1 n_1 + iw_2 n_2) dw_1 dw_2$$

Δισδιάστατος Μετασχηματισμός Fourier (3)

- Έστω μία ακολουθία *$x(n_1, n_2)$* πεπερασμένης χωρικής επέκτασης. Τότε ο 2-D DFT αυτής δίνεται από τις σχέσεις:

$$F(W_1, W_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) exp\left(-i\frac{2\pi n_1 k_1}{N_1} - i\frac{2\pi n_2 k_2}{N_2}\right)$$

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) exp\left(i\frac{2\pi n_1 k_1}{N_1} + i\frac{2\pi n_2 k_2}{N_2}\right)$$

Δισδιάστατος Μετασχηματισμός Fourier (4)

- Η σχέση του DFT με τον DSFT είναι η εξής:

$$X(k_1,k_2) = X(w_1,w_2)\big|_{w_1=\frac{2\pi k_1}{N_1}, w_2=\frac{2\pi k_2}{N_2}}$$

δηλαδή ο DFT είναι μία δειγματοληψία του DSFT πάνω στον διπλό μοναδιαίο κύκλο.

- Γρήγορος υπολογισμός του 2D-DFT:

μπορεί να γίνει γρήγορα (μέσω 1D-FFT) με την μέθοδο των γραμμών-στηλών.

$$G(n_1,k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2) W_{N_2}^{n_2 k_2}$$
$$X(k_1,k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} G(n_1,k_2) W_{N_1}^{n_1 k_1}$$

όπου $W_{N_l} = exp\left(-i\frac{2\pi}{N_l}\right), l = 1,2$

Δισδιάστατος Μετασχηματισμός Fourier (5)

Σημαντικές ιδιότητες του 2-D DFT

1. Γραμμικότητα

$$x(n_1,n_2) = av(n_1,n_2)+bw(n_1,n_2) \leftrightarrow X(k_1,k_2) = aV(k_1,k_2) + bW(k_1,k_2)$$

2. Κυκλική μετατόπιση

$$x(n_1,n_2) = v\left((n_1 - m_1)_{mod\ N_1}, (n_2 - m_2)_{mod\ N_2}\right) \leftrightarrow X(k_1,k_2)$$

$$= exp\left(-i\frac{2\pi k_1 m_1}{N_1} - i\frac{2\pi k_2 m_2}{N_2}\right)V(k_1,k_2)$$

3. Διαχωρίσιμη ακολουθία

$$x(n_1,n_2) = x(n_1)x(n_2) \leftrightarrow \mathrm{X}(k_1,k_2) = x(k_1)x(k_2)$$

4. Θεώρημα Parseval

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2)y^*(n_1,n_2) = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1,k_2)Y^*(k_1,k_2)$$

Δισδιάστατος Μετασχηματισμός Συνημίτονου (1)

DCT διακριτού σήματος:

$$C(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}4x(n_1,n_2)cos\left(\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N_1}\right)cos\left(\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N_2}\right)$$

IDCT διακριτού σήματος:

$$\mathrm{x}(n_1,n_2)=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}w_1(k_1)w_2(k_2)C(k_1,k_2)cos\left(\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N_1}\right)cos\left(\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N_2}\right)$$

με $w_l(k_l)=\begin{cases}1/2 & k_l=0\\ 1 & 1\le k_l\le N_l-1\end{cases},\quad l=1{,}2$

Ο μετασχηματισμός DCT είναι διαχωρίσιμος.

Δισδιάστατος Μετασχηματισμός Συνημίτονου (2)

- Υπολογισμός κατά γραμμές και στήλες

$$G(n_1,k_2) = 2\sum_{n_{2=0}}^{N_2-1} x(n_1,n_2)cos\left(\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N_2}\right)$$

$$C(k_1,k_2) = 2\sum_{n_{1=0}}^{N_1-1} G(n_1,k_2)cos\left(\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N_1}\right)$$

- Υπολογισμός μέσω του DFT της $y(n_1,n_2)$, η οποία προκύπτει από κατοπτρική επέκταση της $\mathrm{x}(n_1,n_2)$ σε περιοχή $2N_1 \times 2N_2$

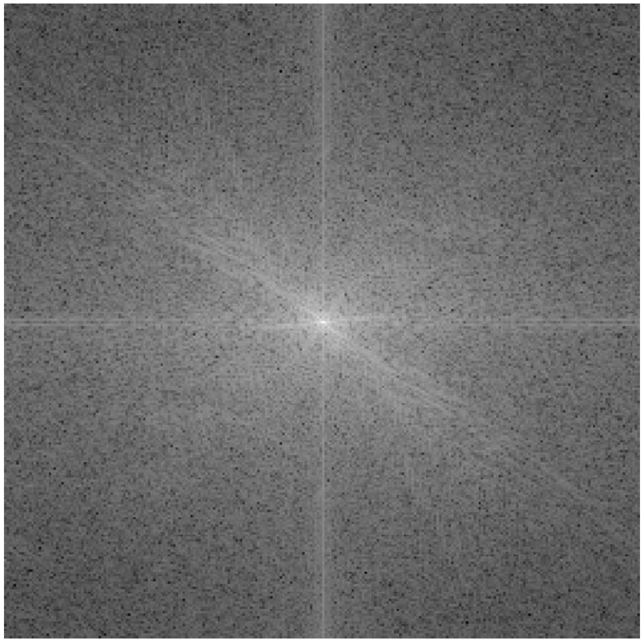
$$C(k_1,k_2) = W_{2N_1}^{k_1/2} W_{2N_2}^{k_1/2} \mathrm{Y}(k_1,k_2)$$

όπου $W_{N_l} = exp\left(-i\frac{2\pi}{N_l}\right), l = 1{,}2$

Η μορφή της εικόνας στο πεδίο των συχνοτήτων (1)

Συχνοτικό περιεχόμενο του DFT (συγκέντρωση ενέργειας γύρω από το (0,0))

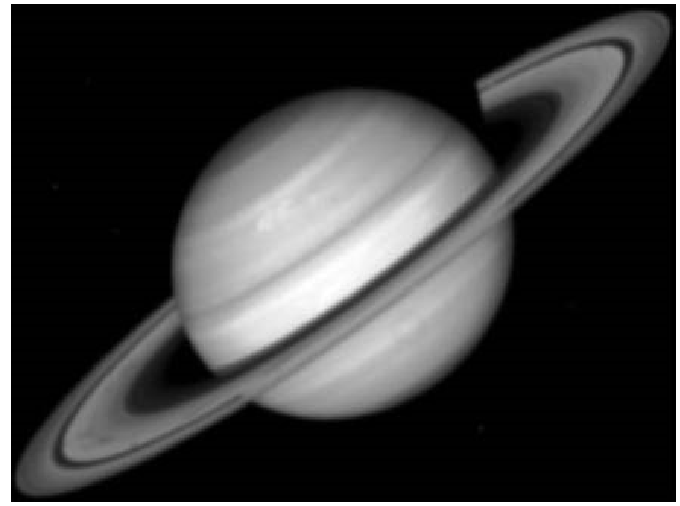
lenna

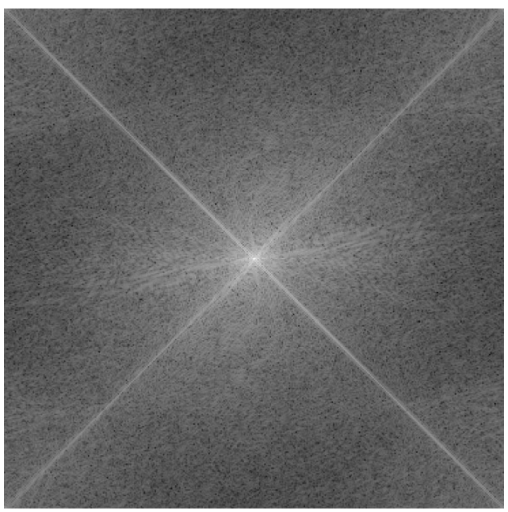


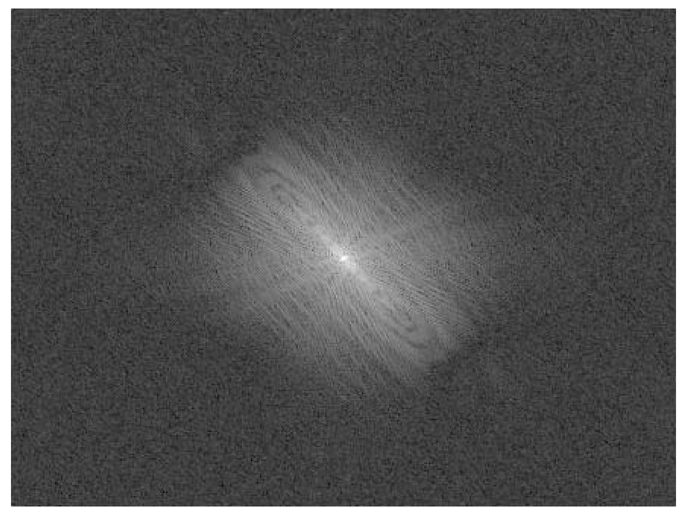
Λογαριθμική απεικόνιση του πλάτους του DFT

Η μορφή της εικόνας στο πεδίο των συχνοτήτων (2)

Παραδείγματα συγκέντρωσης της ενέργειας πάνω σε συγκεκριμένες διευθύνσεις



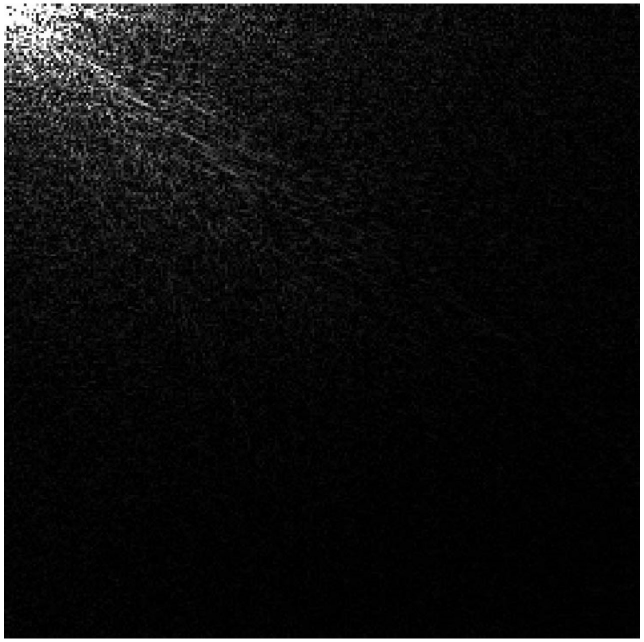




Η μορφή της εικόνας στο πεδίο των συχνοτήτων (3)

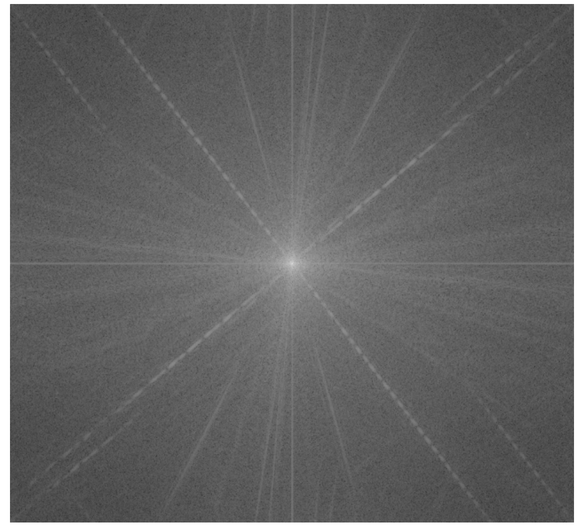
- Συχνοτικό περιεχόμενο του DCT (συγκέντρωση ενέργειας στη μία γωνία)

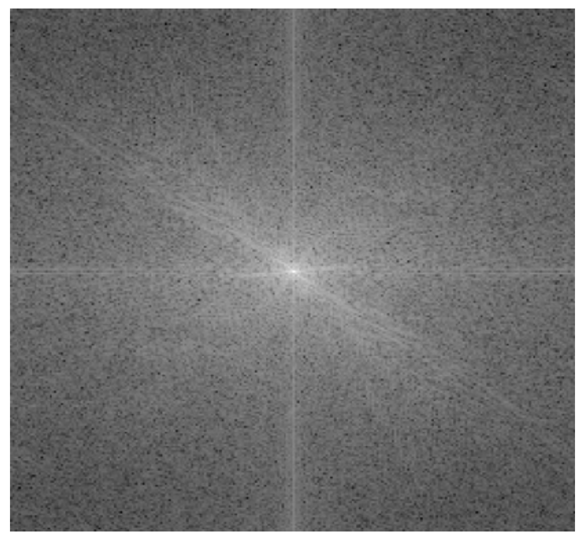
lenna



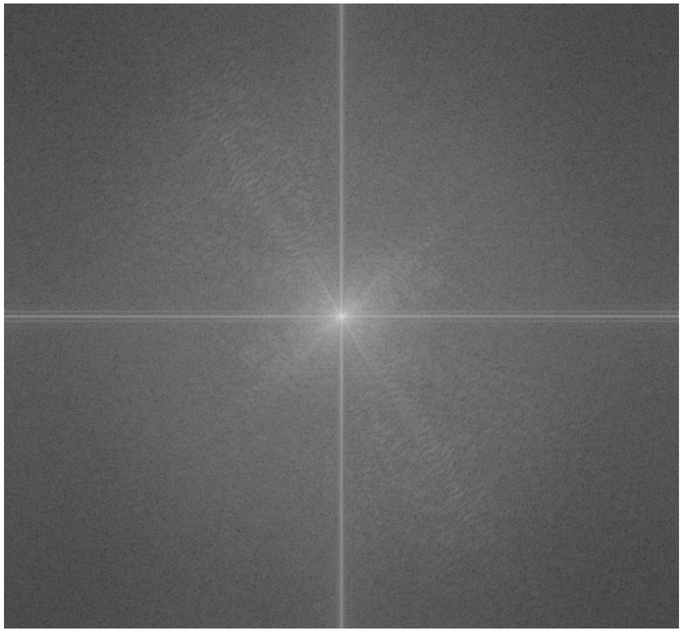
Γραμμική απεικόνιση του πλάτους του DCT

Η μορφή της εικόνας στο πεδίο των συχνοτήτων (4)





Η μορφή της εικόνας στο πεδίο των συχνοτήτων (5)



Λάθος συμπέρασμα: Ο άνθρωπος μοιάζει πολύ με τον πίθηκο στο πεδίο συχνοτήτων

Σωστό συμπέρασμα: Υπάρχει σημαντική πληροφορία που δεν είναι εύκολα απεικονίσιμη

Δίδαγμα: Μην κάνεις πότε γνωριμίες στη βάση του πεδίου συχνοτήτων και μόνο

Δισδιάστατα Συστήματα (1)

- Ένα δισδιάστατο διακριτό σύστημα $T(.)$ μετασχηματίζει ένα 2-D διακριτό σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$ σε ένα 2-D διακριτό σήμα εξόδου $y(n_1, n_2)$

$$y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)]$$

- Γραμμικό σύστημα:

$$T[ax_1 + bx_2] = aT[x_1] + bT[x_2]$$

- Χωρικά αμετάβλητο σύστημα:

$$y(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = T[x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)]$$

- Επίσης, συνήθως τα 2-D συστήματα είναι μη-αιτιατά.

  → Θα μας απασχολήσουν κυρίως γραμμικά και χωρικά αμετάβλητα συστήματα

Δισδιάστατα Συστήματα (2)

➢ Τα συστήματα ορίζονται από την κρουστική τους απόκριση. Η σχέση εισόδου-εξόδου είναι

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) ** h(n_1, n_2)$$

- FIR σύστημα: η $\mathrm{h}(n_1, n_2)$ έχει περιορισμένη περιοχή υποστήριξης $0 \leq n_1 \leq N_1, 0 \leq n_2 \leq N_2$
- IIR σύστημα: η $\mathrm{h}(n_1, n_2)$ έχει άπειρη περιοχή υποστήριξης.
- Διαχωριζόμενο σύστημα: $\mathrm{h}(n_1, n_2) = \mathrm{h}(n_1)\mathrm{h}(n_2)$

Δισδιάστατα Συστήματα (3)

- BIBO (Bounded Input Bounded Output) συστήματα:

$$\forall(n_1, n_2), \qquad |x(n_1, n_2)| \leq B \rightarrow \exists \acute{B}: |y(n_1, n_2)| \leq \acute{B}$$

- Ευσταθή συστήματα:

$$\sum_{n_1=\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |h(n_1, n_2)| = S < \infty$$

Τα FIR είναι εξ ορισμού ευσταθή συστήματα.

Συνέλιξη στις δύο διαστάσεις(1)

Η συνέλιξη είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επεξεργασία εικόνας (π.χ. φιλτράρισμα).

- Κυκλική συνέλιξη: $w_c(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) \circledast\circledast\, y(n_1, n_2) \longleftrightarrow$
$$W_c(k_1, k_2) = X(k_1, k_2)\mathrm{Y}(k_1, k_2)$$
- Γραμμική συνέλιξη:

$\mathrm{x}(n_1, n_2)$ με περιοχή υποστήριξης $R_{P_{1,}P_2} = [0, P_1) \times [0, P_2)$

$y(n_1, n_2)$ με περιοχή υποστήριξης $R_{Q_{1,}Q_2} = [0, Q_1) \times [0, Q_2)$

Η γραμμική συνέλιξη είναι:

$w_L(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{Q_1-1} \sum_{m_2=0}^{Q_2-1} y(m_1, m_2)\, x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$

με περιοχή υποστήριξης την $R_{L_{1,}L_2} = [0, P_1 + Q_1 - 1) \times [0, P_2 + Q_2 - 1)$

Συνέλιξη στις δύο διαστάσεις(2)

- Έστω ότι επιλέγουμε περιοχή υποστήριξης με επέκταση $N_1 \times N_2$, όπου $N_l \geq P_l + Q_l - 1\,, l = 1{,}2,$ και επεκτείνουμε με μηδενικά τις ακολουθίες $\mathrm{x}(n_1, n_2)$ και $\mathrm{y}(n_1, n_2)$ ώστε να ορίζονται σε όλη την περιοχή με διαστάσεις $N_1 \times N_2$.

Τότε μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η κυκλική συνέλιξη και η γραμμική συνέλιξη των $\mathrm{x}(n_1, n_2)$ και $\mathrm{y}(n_1, n_2)$ ταυτίζονται.

- Όταν έχουμε συνέλιξη ακολουθίας $\mathrm{x}(n_1, n_2)$ με κρουστική απόκριση $\mathrm{h}(n_1, n_2)$ που είναι διαχωρίσιμη τότε η συνέλιξη αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη μέθοδο γραμμών-στηλών.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κωνσταντίνος Μπερμπερίδης, 2015.

«Ψηφιακή Επεξεργασία & Ανάλυση Εικόνας. Εισαγωγή». Έκδοση: 1.0.

Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1033/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- Ι. Πήτας, «Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας», Θεσσαλονίκη, 2001