Στοχαστικά Σήματα και Τηλεπικοινωνιές

Ενότητα 8: Εφαρμογή Τεχνικών Επεξεργασίας Σήματος σε Συστήματα Επικοινωνίας μέσω Ζωνοπεριορισμένων Καναλιών - Ισοστάθμιση Καναλιού

Καθηγητής Κώστας Μπερμπερίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Σκοποί ενότητας

- Παρουσίαση των βασικών εννοιών που σχετίζονται με την μετάδοση πληροφορίας μέσω τηλεπικοινωνιακών καναλιών και την ισοστάθμιση καναλιού.

Περιεχόμενα ενότητας

- Μετάδοση πληροφορίας μέσω ζωνοπεριοριμένων καναλιών
  – Τι είναι;
  – Ένα βασικό σύστημα μετάδοσης
  – Διασυμβολική παρεμβολή
  – Συνθήκη Nyquist
  – Παλμός ανυψωμένου συνημιτόνου
- Παραμόρφωση καναλιού
  – Ιδανικό κανάλι και πιθανότητα σφάλματος, είδη παραμόρφωσης
- Σχεδιασμός συστήματος μετάδοσης
  – Οι περιπτώσεις του γνωστού και άγνωστου καναλιού
  – Ισοσταθμιστές και αλγόριθμοι
    - MLSE, ZF, MMSE
    - Γραμμικοί και μη γραμμικοί, προσαρμοστικοί κ.λπ.
    - Viterbi, LMS

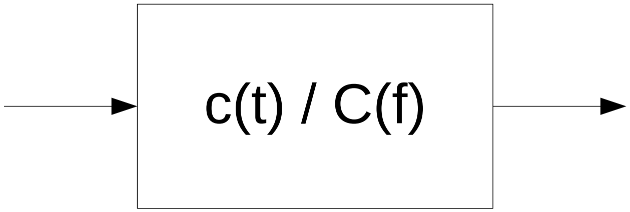
Μετάδοση πληροφορίας μέσω ζωνοπεριορισμένων καναλιών

Εισαγωγή

- Η μελέτη της μετάδοσης σημάτων μέσα από ζωνοπεριορισμένα κανάλια έχει μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον.
- Τα περισσότερα πραγματικά κανάλια είναι περιορισμένου εύρους ζώνης:
  - Ενσύρματα κανάλια (π.χ. DSL).
  - Ασύρματα ραδιοκανάλια.
  - Δορυφορικά κανάλια.
  - Υποβρύχια ακουστικά κανάλια.
- Το περιορισμένο εύρος ζώνης επιβάλλει αυστηρότερο σχεδιασμό του προς μετάδοση σήματος.
- Όταν το κανάλι είναι ζωνοπεριορισμένο, αποκλείεται εξαρχής η χρήση ορθογώνιων παλμών (διότι απαιτούν άπειρο εύρος ζώνης).

Ζωνοπεριορισμένο Κανάλι (1/2)

- Ένα ζωνοπεριορισμένο κανάλι μοντελοποιείται συνήθως ως ένα γραμμικό φίλτρο με κρουστική απόκριση c(t).

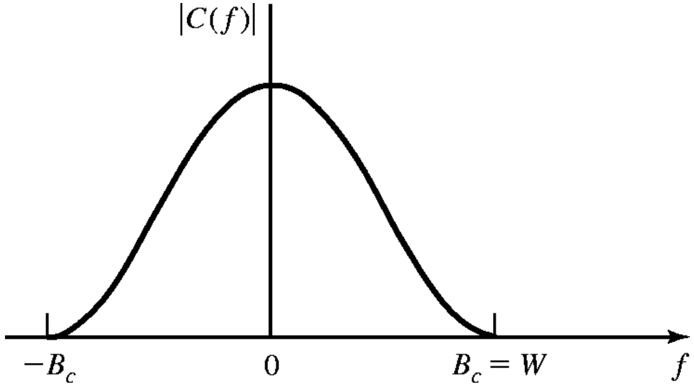


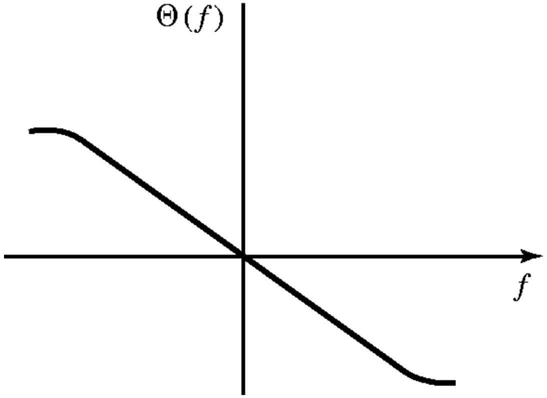
- Πεδίο συχνοτήτων: το κανάλι μπορεί να αναπαρασταθεί από την απόκριση συχνότητάς του, δηλαδή το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής του απόκρισης.

$$C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Ζωνοπεριορισμένο Κανάλι (2/2)

- Αν το κανάλι είναι βασικής ζώνης και είναι περιορισμένου εύρους ζώνης W, τότε
  - $C(f) = 0$ για $|f| > W$



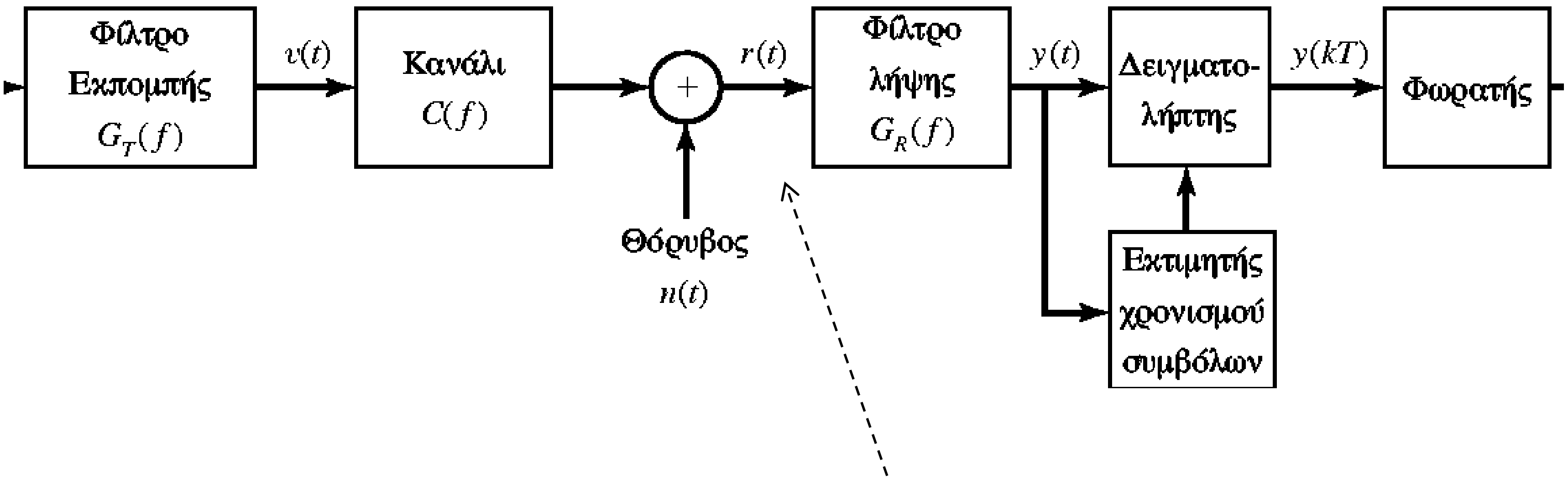


- Αν το σήμα εισόδου του καναλιού έχει συχνοτική συνιστώσα $f > W$, τότε η συνιστώσα αυτή δε θα μεταδοθεί.
- Άρα: το φάσμα του προς μετάδοση σήματος θα πρέπει να περιορίζεται στο εύρος ζώνης του καναλιού.

Μετάδοση M-PAM

- Αποτελεί τυπικό παράδειγμα ψηφιακής διαμόρφωσης.
- Χαρακτηριστικά:
  - Το σύστημα είναι βασικής ζώνης.
  - Χρησιμοποιείται διαμόρφωση M-PAM, δηλαδή κάθε $k = \log_2 M$ bits ομαδοποιούνται σε ένα από τα M σύμβολα του αλφαβήτου.
  - Π.χ. Για $M = 4$: $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = +1$, $\alpha_4 = +3$.
  - Η περίοδος του μεταδιδόμενου σήματος είναι η περίοδος συμβόλου T_s.
  - Η περίοδος bit είναι $T_b = T_s / \log_2 M = \frac{\mathrm{T}_s}{k}$.
  - Το κανάλι είναι ζωνοπεριορισμένο σε W Hz.

Βασικό Δομικό Διάγραμμα



Σε ψηφιακή υλοποίηση η (υπερ)δειγματοληψία γίνεται πιο πριν, π.χ. πριν το φίλτρο δέκτη

Διασυμβολική Παρεμβολή (1/3)

- Αν $\{\alpha_n\}$ η ακολουθία των συμβόλων, τότε το σήμα στην έξοδο του φίλτρου πομπού είναι:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT_s)$$

- Αν *h(t)* η συνέλιξη του φίλτρου πομπού και του καναλιού

$$h(t) = c(t) * g_T(t)$$

- Η έξοδος του καναλιού εκφράζεται ως:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t - nT_s) + n(t)$$

Διασυμβολική Παρεμβολή (2/3)

- Η έξοδος του φίλτρου λήψης είναι:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t - nT_s) + v(t)$$

Αν το φίλτρο λήψης $g_R(t)$ είναι προσαρμοσμένο στο $h(t)$, τότε στην έξοδό του, για $t = T_s$, μεγιστοποιείται το SNR

$$x(t) = g_T(t) * c(t) * g_R(t) \qquad X(f) = G_T(f) C(f) G_R(f)$$

- Θεωρούμε ότι έχει γίνει συγχρονισμός συμβόλων
- Για να ανακτήσουμε την ακολουθία συμβόλων $\{\alpha_n\}$, δειγματοληπτούμε την έξοδο του φίλτρου λήψης ως:

$$y(mT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(mT_s - nT_s) + v(mT_s)$$

- Ή σε διακριτό χρόνο:

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(m - n) + v(m)$$

Διασυμβολική Παρεμβολή (3/3)

$$y(m) = \overbrace{a_m x(0)}^{\substack{\varepsilon\pi\iota\theta\upsilon\mu\eta\tau\acute{o} \\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\beta o\lambda o}} + \overbrace{\sum_{n \neq m} a_n x(m-n)}^{ISI} + \overset{\theta\acute{o}\rho\upsilon\beta o\varsigma}{v(m)}$$

- Το δείγμα $y(m)$ που λαμβάνουμε, αποτελείται από:
  - Το επιθυμητό σύμβολο α_m κλιμακωμένο κατά $x(0)$,
  - Αν το φίλτρο λήψης είναι προσαρμοσμένο στο $h(t)$, τότε

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} H^2(f)\,df = E_h$$

  - Διασυμβολική παρεμβολή (InterSymbol Interference ISI): γραμμικός συνδυασμός προηγούμενων και επόμενων συμβόλων
  - Θόρυβος $v(m)$ με διασπορά $\sigma^2 = \frac{N_0 E_h}{2}$

Σχεδιασμός για Μηδενική ISI

- Πώς να μηδενίσουμε τη διασυμβολική παρεμβολή;
- Η συνολική απόκριση συχνότητας που αντιμετωπίζει το μεταδιδόμενο σήμα είναι $X(f) = G_T(f)C(f)G_R(f)$
- Ληφθέν σήμα:

$$y(m) = a_m x(0) + \sum_{n \neq m} a_n x(m-n) + v(m)$$

- Για να μην έχουμε διασυμβολική παρεμβολή θα πρέπει:
  - $x(m-n) = 0$ για $m \neq n$
  - $x(m-n) \neq 0$ για $m = n$ [έστω ότι $x(0) = 1$]
- Τι θα πρέπει να ισχύει για το x(t) και άρα για τα $g_T(t)$, $g_R(t)$, $c(t)$ για να ισχύει η παραπάνω συνθήκη;

Συνθήκη Nyquist

- Θεώρημα (Συνθήκη Nyquist για μηδενική ISI):
  - Θα θέλαμε να ισχύει:

$$x(nT_s) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

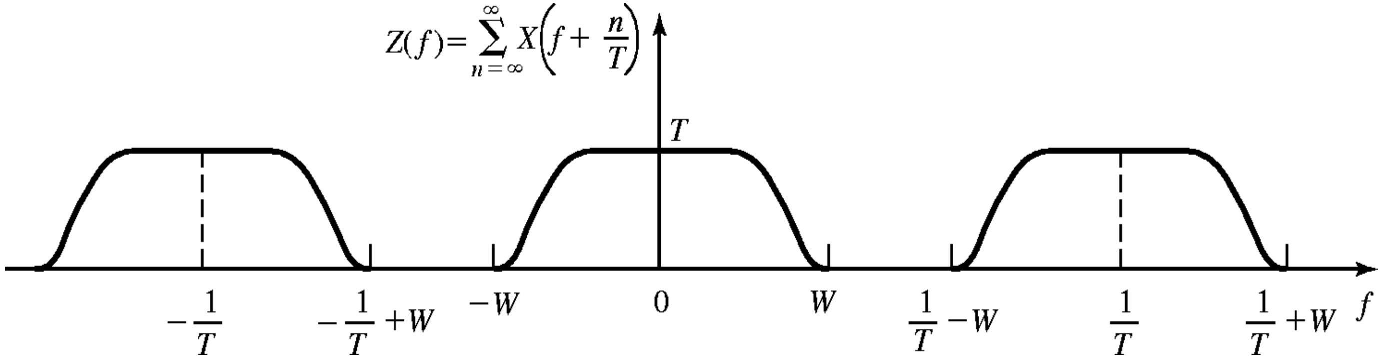
  - Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος, $X(f)$, να ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{m}{T_s}\right) = T_s$$

- Αν το κανάλι έχει εύρος ζώνης W, τότε:
  - $C(f) = 0$, για $|f| > W$
  - $X(f) = G_T(f)C(f)G_R(f) = 0$, για $|f| > W$
- Ορίζουμε ως εύρος ζώνης του σήματος το: $B_T = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_s}{2}$

1η Περίπτωση $B_T > W$

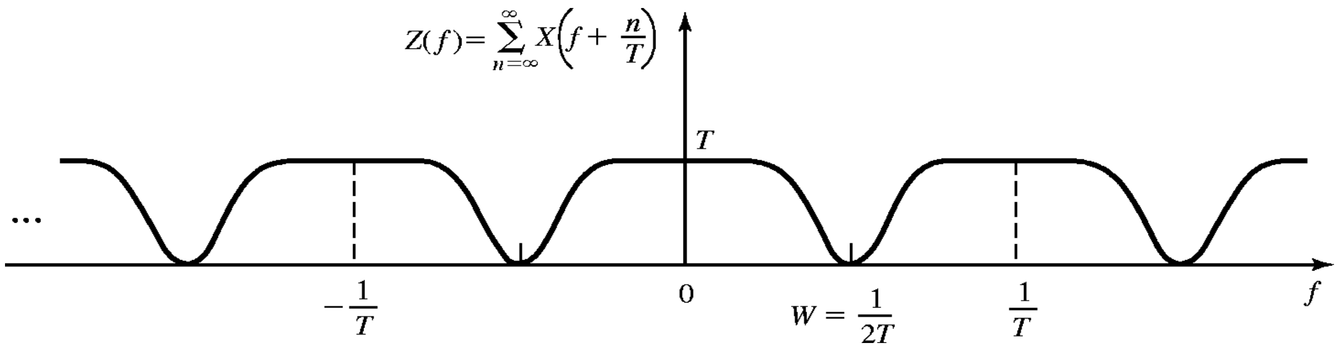
- Πότε συμβαίνει αυτό;
  - Όταν το εύρος ζώνης του σήματος είναι μεγαλύτερο από το εύρος ζώνης του καναλιού



- Τι γίνεται ως προς τη συνθήκη Nyquist;
  - δεν υπάρχει περίπτωση να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη
- Συμπέρασμα:
  - δεν υπάρχει τρόπος να αποφύγουμε την ISI

2η Περίπτωση $B_T = W$ (1/3)

- Πότε συμβαίνει αυτό;
  – Όταν το εύρος ζώνης του σήματος είναι ίσο με το εύρος ζώνης του καναλιού



- Τι γίνεται ως προς τη συνθήκη Nyquist;
  – Η συνθήκη μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο αν η $X(f)$ είναι τετραγωνική συνάρτηση της συχνότητας:

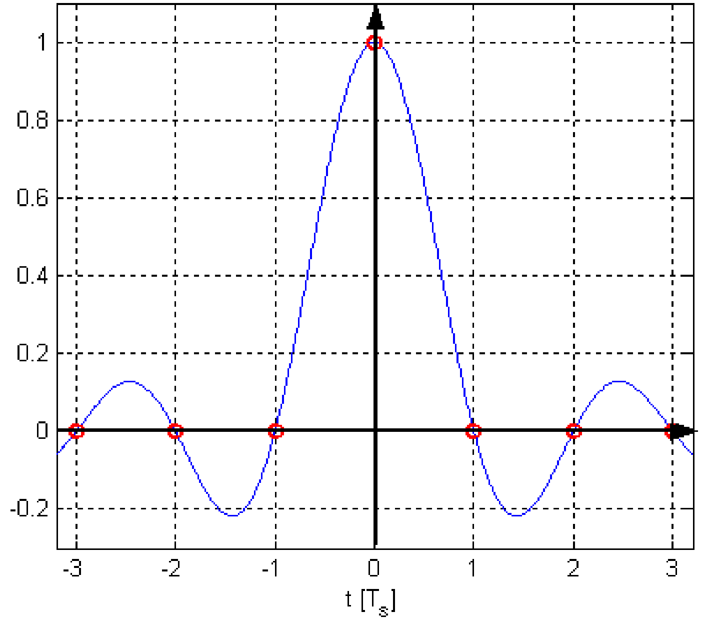
$$X(f) = \begin{cases} T_s, |f| < W \\ 0, αλλού \end{cases}$$

2η Περίπτωση $B_T = W$ (2/3)

- Όμως:

Πεδίο Συχνοτήτων	Πεδίο Χρόνου
τετραγωνική συνάρτηση	$sinc$ συνάρτηση

- Άρα, θα πρέπει: $x(t) = sinc(t/T_s)$

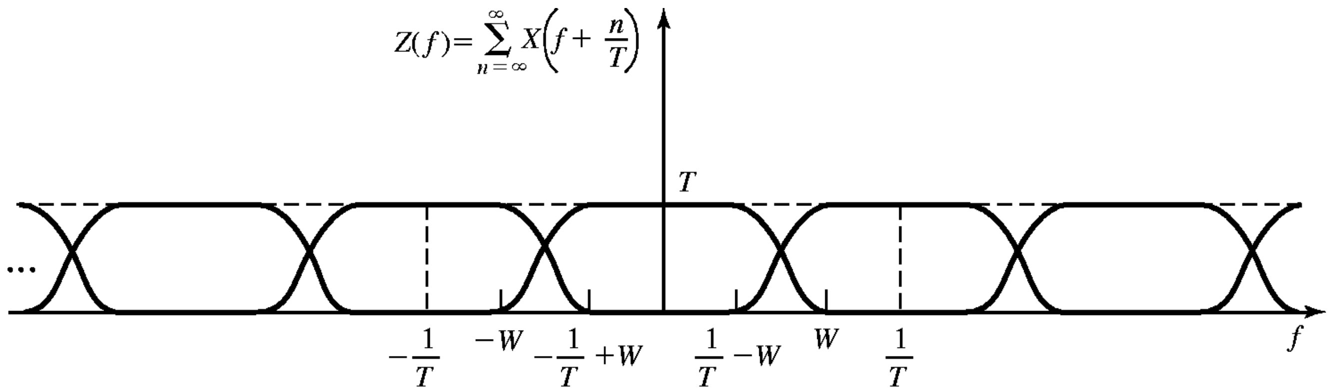


2η Περίπτωση $B_T = W$ (3/3)

- Προβλήματα από τη χρήση παλμού $sinc(t/T_s)$:
  - Είναι μη αιτιατός, οπότε για να υλοποιηθεί θα πρέπει να αποκόψουμε κάποιους συντελεστές του και να εισάγουμε μια καθυστέρηση
  - Οι λοβοί του «σβήνουν» αργά (με ρυθμό $1/t$): αυτό σημαίνει ότι από ένα σφάλμα χρονισμού μπορεί να προκύψει σημαντική ISI (λόγω των μη μηδενικών πλέον όρων $x(m), m \neq 0$)
- Αποτέλεσμα:
  - ο μέγιστος θεωρητικά ρυθμός μετάδοσης δεδομένων σε ένα κανάλι εύρους ζώνης W, είναι $R_s = (1/T) = 2W$
  - αυτό είναι δύσκολο να υλοποιηθεί πρακτικά
  - οπότε καταφεύγουμε στην τρίτη περίπτωση

3η Περίπτωση $B_T < W$

- Πότε συμβαίνει αυτό;
  – Όταν το εύρος ζώνης του σήματος είναι μικρότερο από το εύρος ζώνης του καναλιού.



- Τι γίνεται ως προς τη συνθήκη Nyquist;
  – Η συνθήκη ικανοποιείται για πολλές επιλογές της $X(f)$.

Παλμός Ανυψωμένου Συνημιτόνου (1/3)

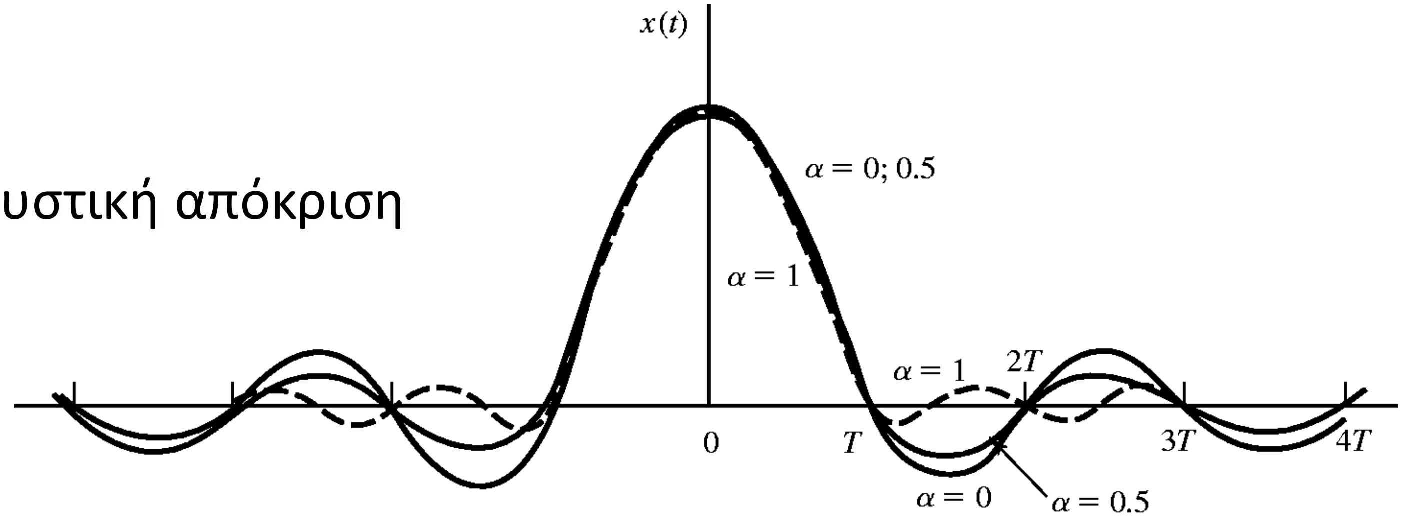
- Ειδικός παλμός $x(t)$ που χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη: παλμός ανυψωμένου συνημιτόνου (raised cosine pulse).
- Το φάσμα του $X_{rc}(f)$ είναι ένα ανυψωμένο συνημίτονο:

$$X_{rc}(f)=\begin{cases} T_s, & 0\le |f| \le (1-a)B_T \\ \dfrac{T_s}{2}\left[1+\cos\dfrac{\pi T_s}{a}\left(|f|-(1-a)B_T\right)\right] & (1-a)B_T \le |f| \le (1+a)B_T \\ 0 & |f| \ge (1+a)B_T \end{cases}$$

- Συντελεστής επέκτασης (roll-off factor) α: Πόσο παραπάνω από το ελάχιστο εύρος ζώνης B_T θα πρέπει να χρησιμοποιήσει το σήμα;
  - Απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι $W=(1+\alpha)B_T$
  - πλεονάζον εύρος ζώνης αB_T
  - $0\le \alpha \le 1$

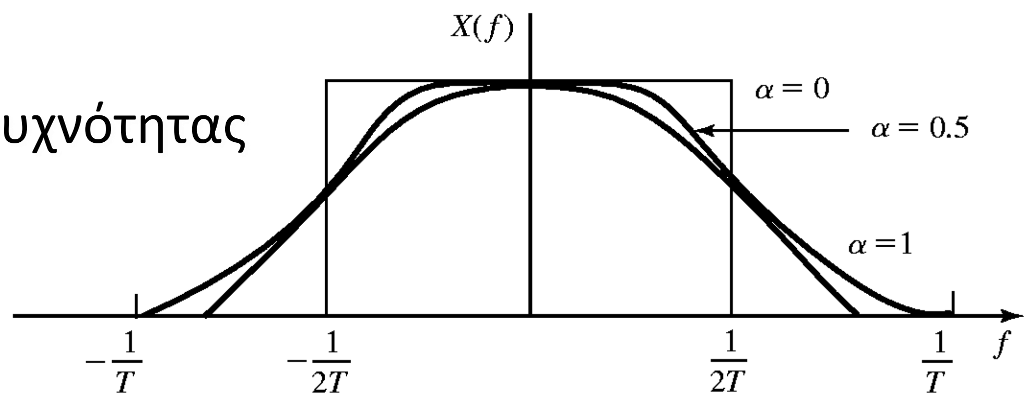
Παλμός Ανυψωμένου Συνημιτόνου (2/3)

Κρουστική απόκριση



(α)

Απόκριση συχνότητας



(β)

Παλμός Ανυψωμένου Συνημιτόνου (3/3)

- Ειδικές περιπτώσεις:
  - Για $\alpha = 0$, το $x_{rc}(t)$ γίνεται ο $sinc(t/T_s)$.
  - Για $\alpha = 1$, απαιτείται διπλάσιο από το ελάχιστο εύρος ζώνης.
- Ιδιότητες του παλμού:
  - Είναι κι αυτός μη αιτιατός, οπότε θα πρέπει να γίνει μια αποκοπή και να εισαχθεί μια καθυστέρηση.
  - Οι λοβοί του σβήνουν γρήγορα (με ρυθμό $1/t^3$), άρα:
    - Η αποκοπή που προαναφέρθηκε εισάγει μικρότερο σφάλμα σε σχέση με το αντίστοιχο στον παλμό $sinc$.
    - Ένα σφάλμα χρονισμού έχει μικρότερες συνέπειες.
- Η κρουστική απόκριση του παλμού δίνεται ως:

$$x_{rc}(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)\frac{\cos(\pi a t / T_s)}{1 - 4a^2 t^2 / T^2}$$

Συμπεράσματα

- Για μηδενική ISI πρέπει να ισχύει η συνθήκη του Nyquist.
- Για να ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist θα πρέπει:
  - Εύρος ζώνης σήματος≤εύρους ζώνης καναλιού
  - Αλλιώς εύρος ζώνης καναλιού ≥ απο το μισό του ρυθμού μετάδοσης, δηλαδή $\left(\frac{1}{2T_s}\right) \leq W$
- Η ισότητα μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο για $sinc$ παλμό, και δε χρησιμοποιείται στην πράξη
- Αν $B_T < W$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορους παλμούς με πιο συχνά χρησιμοποιούμενο τον παλμό ανυψωμένου συνημιτόνου. Στην περίπτωση αυτή, για να έχουμε μηδενική ISI, θα πρέπει: $X_{rc}(f) = G_T(f)C(f)G_R(f)$ ή $x_{rc}(t) = g_T(t) * c(t) * g_R(t)$

Παραμόρφωση καναλιού

Ιδανικό Ζωνοπεριορισμένο Κανάλι (1/2)

- Ιδανικό ζωνοπεριορισμένο κανάλι:
  - Είναι ζωνοπεριορισμένο στις συχνότητες $|f| \leq W$
  - Είναι σταθερό σε όλο το εύρος ζώνης του χωρίς να εισάγει παραμόρφωση

$$C(f) = \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| \geq W \end{cases}$$

- Σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα πρέπει να ισχύει:

$$X_{rc}(f) = G_T(f)C(f)G_R(f) \Rightarrow X_{rc}(f) = G_T(f)G_R(f)$$

- Επειδή θέλουμε φίλτρο δέκτη προσαρμοσμένο στο φίλτρο πομπού θα πρέπει να ισχύει:

$$G_R(f) = G_T^*(f) \Rightarrow X_{rc}(f) = |G_T(f)|^2 \Rightarrow$$

$$|G_T(f)| = |G_R(f)| = \sqrt{|X_{rc}(f)|}$$

Ιδανικό Ζωνοπεριορισμένο Κανάλι (2/2)

- Το κανάλι δεν εισάγει παραμόρφωση, αλλά περιορίζει τη μετάδοση σε εύρος ζώνης W
- Για μηδενική ISI:
  - Ως φίλτρα πομπού, $g_T(t)$, και δέκτη, $g_R(t)$ επιλέγονται παλμοί φάσματος τετραγωνικής ρίζας ανυψωμένου συνημιτόνου (square root raised cosine)

$$\left|G_T(f)\right| = \left|G_R(f)\right| = \sqrt{\left|X_{rc}(f)\right|}$$

  - Με κρουστικές αποκρίσεις:

$$g_T(t) = g_R(t) = \frac{4a}{\pi\sqrt{T_s}} \frac{\cos\left[(1+a)\pi t/T_s\right] + \dfrac{\sin\left[(1-a)\pi t/T_s\right]}{4at/T_s}}{1-\left[4at/T_s\right]^2}$$

Πιθανότητα Σφάλματος Ψηφιακού M-PAM

- Αν,
  - το κανάλι είναι ιδανικό και ζωνοπεριορισμένο,
  - το κανάλι εισάγει AWGN,
  - το σύστημα έχει σχεδιαστεί για μηδενική ISI,
- Τότε $y(m) = x(0)a_m + v_m$ όπου ο θόρυβος είναι AWGN, διασποράς $\sigma^2 = E_g N_0/2$.
- Ίδια πιθανότητα σφάλματος με μη ζωνοπεριορισμένο AWGN κανάλι.
- Πιθανότητα Σφάλματος Συμβόλου (SER)

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{6(\log_2 M)E_b}{(M^2-1)N_0}}\right)$$

Παραμόρφωση Καναλιού (1/4)

- Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε στο σχεδιασμό συστήματος για μηδενική ISI όταν το κανάλι ήταν ιδανικό.
- Στην πράξη όμως τα κανάλια παρουσιάζουν δυο ειδών παραμορφώσεις.
- Παραμόρφωση Πλάτους:
  - Το πλάτος της απόκρισης συχνότητας του καναλιού, $|C(f)|$, δεν είναι σταθερό μέσα στο εύρος ζώνης του καναλιού.
  - Κάθε συχνοτική συνιστώσα πολλαπλασιάζεται με διαφορετικό πλάτος
- Παραμόρφωση Φάσης:
  - Η φάση της απόκρισης συχνότητας του καναλιού, $\Theta_c(f)$, δεν είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας.
  - Κάθε συχνοτική συνιστώσα αντιμετωπίζει διαφορετική καθυστέρηση κατά τη διέλευσή της από το κανάλι.

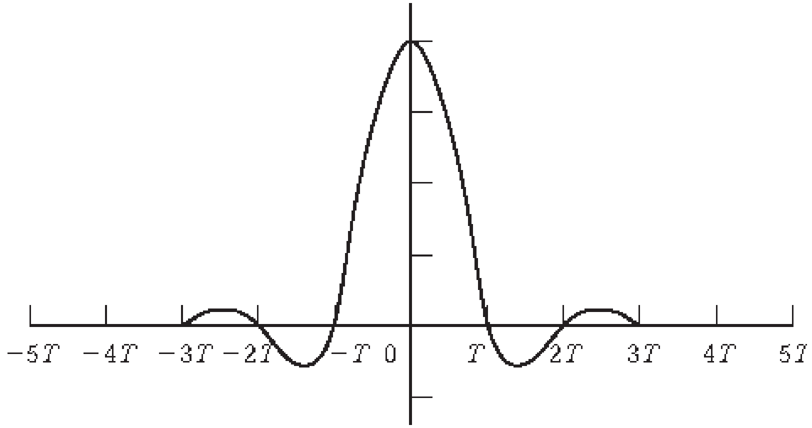
Παραμόρφωση Καναλιού (2/4)

- Παραμόρφωση Φάσης (συνέχεια):
  - Για να ορίσουμε καλύτερα την παραμόρφωση φάσης, ορίζουμε την καθυστέρηση περιβάλλουσας (envelope delay):

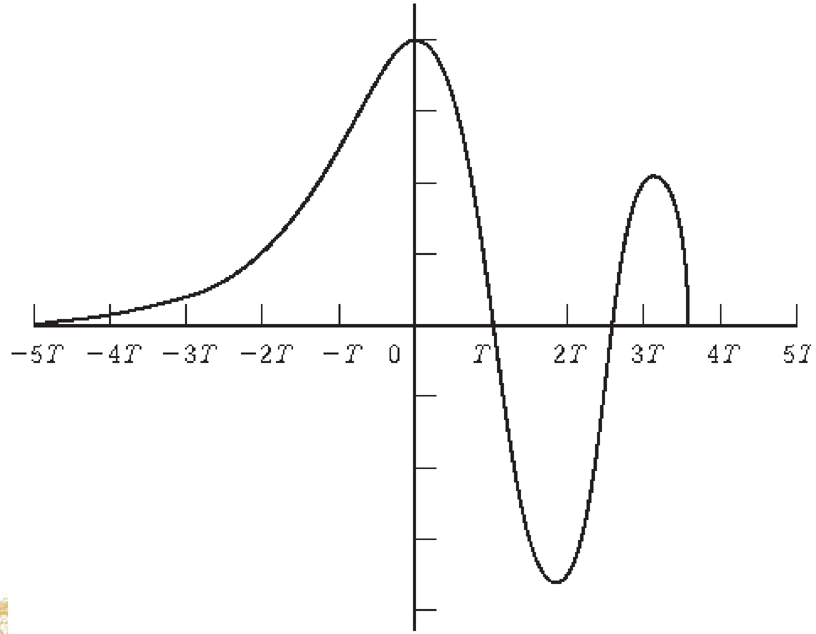
$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\Theta_c(f)}{df}$$

  - Αν $\Theta_c(f)$ γραμμική, τότε η καθυστέρηση περιβάλλουσας είναι σταθερή και δεν έχουμε παραμόρφωση φάσης.
- Η Παραμόρφωση Πλάτους και η Παραμόρφωση Φάσης οδηγούν σε διασυμβολική παρεμβολή:
  - Καθώς ο παλμός μετάδοσης $g_T(t)$ συνελίσσεται με την κρουστική απόκριση του καναλιού c(t)
  - και παύει να ισχύει η συνθήκη μηδενικής ISI.

Παραμόρφωση Καναλιού (3/4)



(α)



(β)

- Παράδειγμα:
  - (α): παλμός μετάδοσης
  - (β): η μορφή του μετά το πέρασμά του από το κανάλι
- Αποτελέσματα:
  - τα σημεία μηδενισμών έχουν μετατοπιστεί

    $\Rightarrow$ ISI

Παραμόρφωση Καναλιού (4/4)

- Και στην περίπτωση μη ιδανικού καναλιού, για να έχουμε μηδενική ISI θα πρέπει:
  - εύρος ζώνης σήματος < εύρος ζώνης καναλιού
  - συνθήκη Nyquist

$$\left|G_T(f)\right| \cdot \left|C(f)\right| \cdot \left|G_T(f)\right| = \left|X_{rc}(f)\right|, \quad |f| \leq W$$

- Πώς μπορούμε να το πετύχουμε αυτό;
  - Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
    - Το κανάλι C(f) είναι γνωστό
    - Το κανάλι C(f) είναι άγνωστο

Σχεδιασμός συστήματος μετάδοσης

Σχεδιασμός Συστήματος με Γνωστό Κανάλι

- Αν το κανάλι $C(f)$ είναι γνωστό, τότε αυτό που απομένει είναι να καθορίσουμε τα φίλτρα πομπού και δέκτη ώστε να ικανοποιούν την επιθυμητή συνθήκη για μηδενική ISI

$$\left|G_T(f)\right| \cdot \left|C(f)\right| \cdot \left|G_T(f)\right| = \left|X_{rc}(f)\right|, \quad |f| \leq W$$

- Αποδεικνύεται ότι τα βέλτιστα φίλτρα που ικανοποιούν την συνθήκη μηδενικής ISI αλλά και μεγιστοποιούν το SNR κατά τις στιγμές δειγματοληψίας είναι:
  - Φίλτρα πομπού:

$$\left|G_T(f)\right| = k_1 \frac{\sqrt{\left|X_{rc}(f)\right|}}{\sqrt{\left|C(f)\right|}}$$

  - Φίλτρο δέκτη: θα πρέπει να είναι προσαρμοσμένο στο σύστημα $G_T(f)C(f)$.

$$\left|G_R(f)\right| = k_2 \frac{\sqrt{\left|X_{rc}(f)\right|}}{\sqrt{\left|C(f)\right|}}$$

Άγνωστο Κανάλι (1/2)

- Άρα, αν το κανάλι είναι γνωστό και δε μεταβάλλεται χρονικά, τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε κατάλληλα το σύστημα (συγκεκριμένα τα φίλτρα πομπού και δέκτη) ώστε να έχουμε μηδενική ISI.
- Στην πράξη, το κανάλι είναι: Άγνωστο και σχετικά στατικό.
  - π.χ. το ενσύρματο κανάλι: κάθε φορά που ξεκινά μια επικοινωνία, δε γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά του καναλιού που θα την εξυπηρετήσει
  - εφόσον ξεκινήσει η σύνδεση, το κανάλι παραμένει περίπου σταθερό
- Εναλλακτικά είναι: Άγνωστο και χρονικά μεταβαλλόμενο.
  - π.χ. το ασύρματο κινητό κανάλι που μεταβάλλεται σημαντικά με το χρόνο
- Στις περιπτώσεις αυτές δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες σχεδιασμού που είδαμε παραπάνω.

Άγνωστο Κανάλι (2/2)

- Μεθοδολογία για σχεδιασμό συστήματος σε άγνωστο κανάλι:
  - Υποθέτουμε ότι το κανάλι είναι ιδανικό, $C(f) = 1, |f| < W$.
  - Σχεδιάζουμε τα φίλτρα πομπού και δέκτη ως

$$\left|G_T(f)\right| = \left|G_R(f)\right| = \sqrt{\left|X_{rc}(f)\right|}$$

Με κατάλληλα επιλεγμένες φάσεις ώστε να είναι υλοποιήσιμα

- Τότε, επειδή η παραπάνω υπόθεση δεν ισχύει, η συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος $x(t) = g_T(t) * c(t) * g_R(t)$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη για μηδενική ISI και έχουμε:

$$y(m) = a_m x(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} a_n x(m-n) + v(m)$$

- Τι κάνουμε τότε;

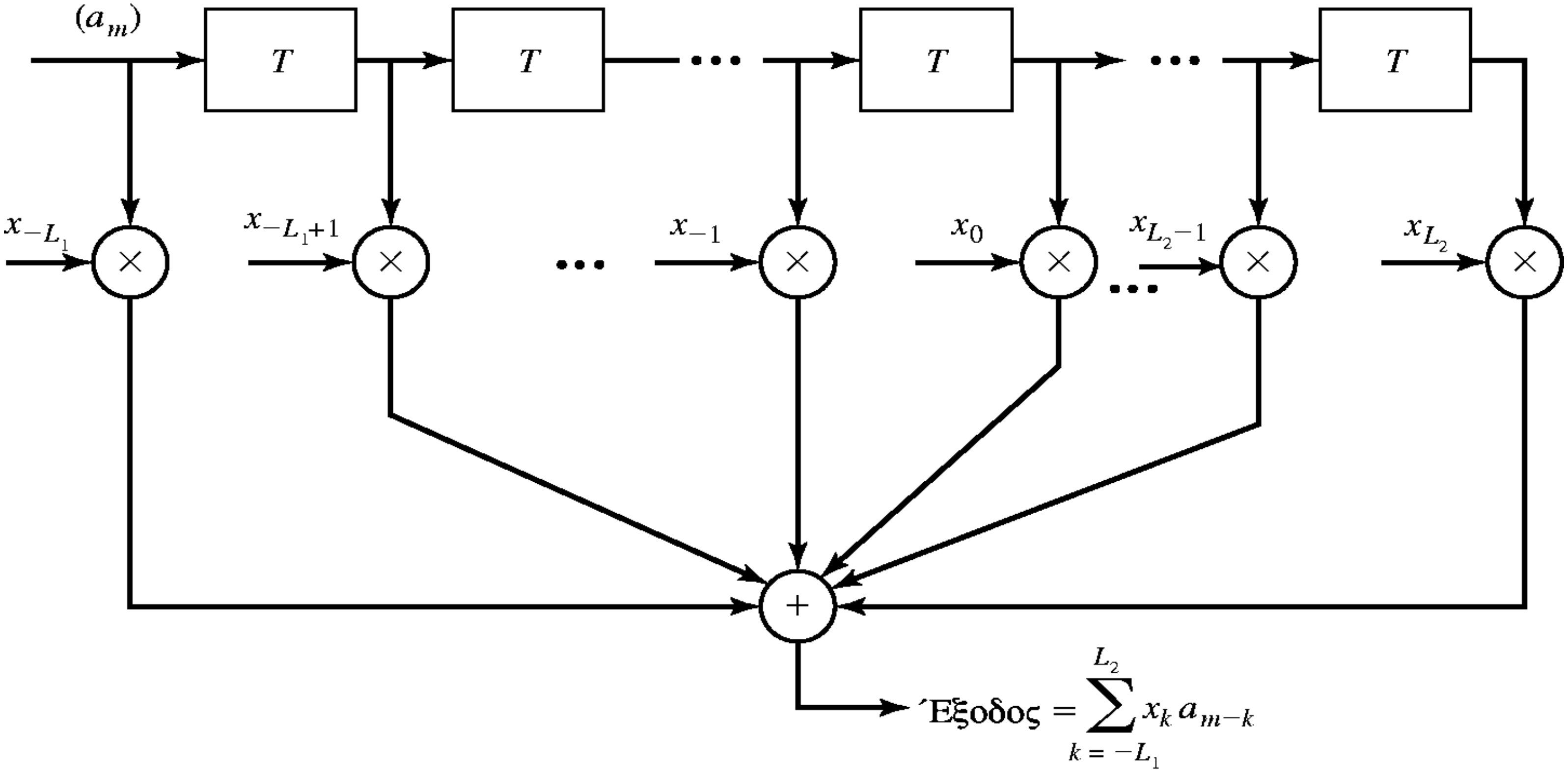
Ισοδύναμο Φίλτρο Καναλιού (1/2)

- Καταρχήν, θα μοντελοποιήσουμε την ISI με πιο εύχρηστο τρόπο:

$$ISI = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq m}}^{\infty} a_n x(m-n) \quad \Longrightarrow \quad ISI = \sum_{\substack{n=-L_1 \\ n\neq m}}^{L_2} a_n x(m-n)$$

- Πράγματι, σε οποιοδήποτε πραγματικό κανάλι, η ISI «εμπλέκει» έναν πεπερασμένο αριθμό συμβόλων
- Δηλαδή το άθροισμα στην ISI δεν εκτείνεται στο άπειρο, αλλά περιορίζεται σε:
  - L_1 μελλοντικά σύμβολα
  - L_2 παρελθόντα σύμβολα
  - δηλαδή, $x(n) = 0$ για $n < -L_1$ και $n > L_2$

Ισοδύναμο Φίλτρο Καναλιού (2/2)



- Το κανάλι μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα γραμμικό φίλτρο (FIR) μήκους $L = L_1 + L_2 + 1$ συντελεστών

Φωρατής Ακολουθίας Μέγιστης Πιθανοφάνειας (MLSE) (1/3)

- Η είσοδος του φίλτρου καναλιού είναι μια διακριτή ακολουθία πληροφορίας, δηλαδή είναι μια ακολουθία συμβόλων που ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο αλφάβητο μεγέθους M.
- Έτσι, η έξοδος του φίλτρου καναλιού μπορεί να χαρακτηρισθεί ως η έξοδος μια μηχανής πεπερασμένων καταστάσεων που διαβρώνεται από AWGN θόρυβο.
- Άρα, αν εξαιρέσουμε το θόρυβο, η έξοδος του φίλτρου μπορεί να βρεθεί σε μια από M^L καταστάσεις, όπου $L = L_1 + L_2 + 1$.
- Προκειμένου να εκτιμήσουμε την ακολουθία των συμβόλων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν φωρατή ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Sequence Estimator - MLSE).

MLSE (2/3)

- Παράδειγμα: έστω κανάλι μήκους $L = 2$ $\{x(0), x(1)\}$, και δυαδική διαμόρφωση (π.χ. δυαδικό PAM $\alpha_m = +1, -1$).
- Αν εξαιρέσουμε το θόρυβο, τότε η τιμή που λαμβάνουμε είναι:

$$y(m) = x(0)a_m + x(1)a_{m-1}$$

- Και ανάλογα με τα σύμβολα που στάλθηκαν, μπορούμε να πάρουμε τους παρακάτω συνδυασμούς:

$$y_1(m) = x(0)(+1) + x(1)(+1)$$
$$y_2(m) = x(0)(+1) + x(1)(-1)$$
$$y_3(m) = x(0)(-1) + x(1)(+1)$$
$$y_4(m) = x(0)(-1) + x(1)(-1)$$

MLSE (3/3)

- Εφόσον:
  - έχουμε το $y(m)$
  - και με την υπόθεση ότι με κάποιο τρόπο έχουμε υπολογίσει το κανάλι, δηλαδή γνωρίζουμε τα $x(0), x(1)$
- Τότε, μπορούμε:
  - να υπολογίσουμε όλα τα δυνατά $y_i(m)$
  - να δούμε ποιο είναι πιο κοντά στο ληφθέν $y(m)$
  - και να αποφασίσουμε ποια ήταν τα σύμβολα που στάλθηκαν
- Μεγιστοποίηση της συνάρτησης κόστους: $\log\left[f\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right]$ (για ακολουθία N συμβόλων απαιτεί: M^N)
- Προσέξτε ότι:
  - θεωρούμε ότι το κανάλι είναι γνωστό με κάποιο τρόπο
  - την επόμενη χρονική στιγμή (που θα λάβουμε το $y(m+1)$), θα εμπλέκεται και πάλι το σύμβολο α_m, και αυτή η πληροφορία μπορεί να αξιοποιηθεί

MLSE με τον αλγόριθμο Viterbi

- MLSE: είναι ο βέλτιστης εκτιμητής της ακολουθίας των συμβόλων:
  - Αντιμετωπίζει πλήρως την ISI.
  - Πλήττεται μόνο από την επίδραση του AWGN θορύβου που είναι τυχαίος.
- Viterbi: αλγόριθμος υλοποίησης του φωρατή MLSE.
- Η πολυπλοκότητα του αλγ. Viterbi είναι $O(M^L)/symbol$.
- Λόγω της εκθετικής πολυπλοκότητας, ο MLSE χρησιμοποιείται πρακτικά μόνο σε περιπτώσεις:
  - Μικρών M, L.
  - Π.χ. συστήματα κινητής επικοινωνίας με σχετικά χαμηλό ρυθμό δεδομένων $[\mathrm{M} = 2{:}\,4, L = 2{:}\,5]$.
- Για μεγάλα M και L, χρησιμοποιούνται άλλες υπο-βέλτιστες μέθοδοι.
- Ο MLSE αποτελεί benchmark.

Γραμμικοί Ισοσταθμιστές (1/2)

- Αντί του MLSE, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα γραμμικό φίλτρο
- Σκοπός του φίλτρου είναι να αναιρέσει την παραμόρφωση του καναλιού
- Οι παράμετροί του ορίζονται με βάση του χαρακτηριστικά του καναλιού
- Το φίλτρο αυτό ονομάζεται ισοσταθμιστής καναλιού (channel equalizer) ή ισοσταθμιστής
- Χρησιμοποιείται επίσης και ο όρος εξισωτής καναλιού

Γραμμικοί Ισοσταθμιστές (2/2)

- Μια διάκριση των ισοσταθμιστών μπορεί να γίνει με βάση τη ρύθμιση των παραμέτρων τους.
- Ισοσταθμιστές Προρύθμισης (Preset Equalizers):
  - Όταν το κανάλι είναι άγνωστο, αλλά χρονικά σταθερό, τότε ο ισοσταθμιστής μπορεί να οριστεί μια φορά στην αρχή και μετά να λειτουργεί χωρίς να αλλάζουν οι παράμετροί του
- Προσαρμοστικοί Ισοσταθμιστές (Adaptive Equalizers):
  - Όταν το κανάλι είναι χρονικά μεταβαλλόμενο, τότε ο ισοσταθμιστής θα πρέπει κι αυτός να αλλάζει συνεχώς, ώστε να παρακολουθεί τις αλλαγές του καναλιού
- Συνδυασμός των παραπάνω:
  - Ο ισοσταθμιστής υπολογίζεται κατά διαστήματα σταθερής διάρκειας ή εφόσον ανιχνεύσει αλλαγή του καναλιού

Ισοστάθμιση

- Πώς εκφράζεται το πρόβλημα στη συχνότητα;
- Τα φίλτρα πομπού και δέκτη επιλέχθηκαν ώστε:

$$\left|G_T(f)\right| = \left|G_R(f)\right| = \sqrt{\left|X_{rc}(f)\right|}$$

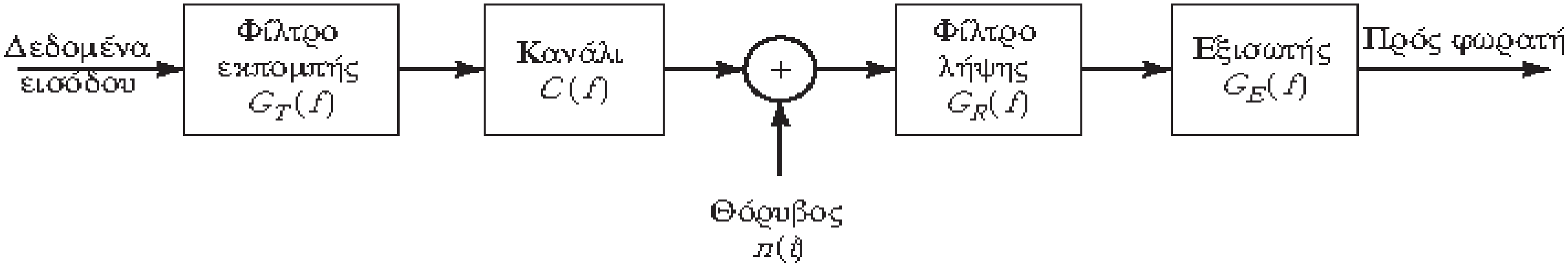
- Ο ισοσταθμιστής μπορεί να ρυθμιστεί ώστε.

$$G_E(f) = \frac{1}{C(f)} = \frac{1}{\left|C(f)\right|} e^{-j\Theta_c(f)}, \left|f\right| \leq W$$

- Άρα, η απόκριση συχνότητας του ισοσταθμιστή είναι το αντίστροφο της απόκρισης συχνότητας του καναλιού
- Για όλο το σύστημα ισχύει:

$$G_T(f)C(f)G_R(f)G_E(f) = X_{rc}(f)$$

Δομικό Διάγραμμα



- Φίλτρα πομπού-δέκτη:

$$\left|G_T(f)\right| = \left|G_R(f)\right| = \sqrt{\left|X_{rc}(f)\right|}$$

- Ισοσταθμιστής:

$$\left|G_E(f)\right| = \frac{1}{\left|C(f)\right|}$$

$$\Theta_E(f) = -\Theta_c(f)$$

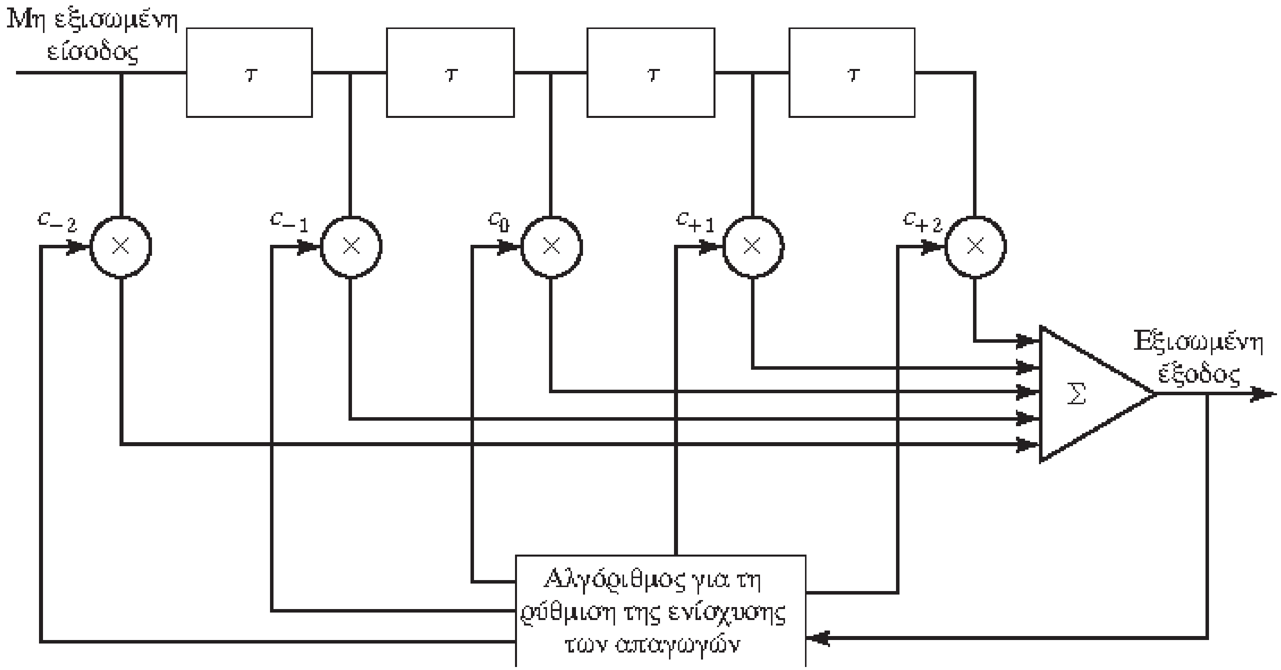
Αντίστροφο Φίλτρο Καναλιού

- Στην περίπτωση αυτή, ο ισοσταθμιστής είναι το αντίστροφο φίλτρο του καναλιού (inverse channel filter).
- Εφόσον το αντίστροφο φίλτρο οδηγεί στην πλήρωση του κριτηρίου Nyquist ⇒ στο πεδίο του χρόνου επιβάλλει μηδενισμό της ISI κατά τις χρονικές στιγμές $t = nT_s$.
- Για το λόγο αυτό, καλείται ισοσταθμιστής επιβολής μηδενισμών (zero-forcing equalizer – ZF).
- Η είσοδος του φωρατή είναι πλέον $y(m) = a_m + v(m)$, όπου ο θόρυβος $v(m)$ είναι Gaussian με διασπορά

$$\sigma_v^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-W}^{W} \frac{\left|X_{rc}(f)\right|}{\left|C(f)\right|^2} df$$

- Η διασπορά σ_v^2 είναι μεγαλύτερη από αυτήν του θορύβου στην έξοδο βέλτιστου φίλτρου λήψης με γνωστό κανάλι (όπου είναι ίση με $N_0/2$).

Σχεδιασμός Ισοσταθμιστή ZF στο χρονικό πεδίο



- Υπόθεση: Το ISI περιορίζεται σε πεπερασμένο αριθμό L δειγμάτων.
- Ο ισοσταθμιστής μπορεί να προσεγγιστεί από φίλτρο FIR.
- Οι συντελεστές απαγωγών του φίλτρου, c_n, είναι ρυθμιζόμενοι.

Απόσταση Απαγωγών Ισοσταθμιστή

- Έστω τ, η χρονική καθυστέρηση μεταξύ δύο διαδοχικών απαγωγών.
- Διακρίνουμε δύο κατηγορίες ισοσταθμιστών:
  - $\tau = T$: Διαστημοθετημένος κατά σύμβολα (symbol spaced):
    - Όμως, συνήθως επιλέγεται $1/T < 2W$ (roll-off $>$ 0).
    - Οπότε εμφανίζεται το φαινόμενο της αναδίπλωσης.
    - Ο ισοσταθμιστής αντισταθμίζει την αναδιπλωμένη εκδοχή του λαμβανόμενου σήματος.
  - $\tau \geq 2W > 1/T$: Κλασματικά διαστημοθετημένος (fractionally spaced):
    - δε δημιουργείται αναδίπλωση
    - ο ισοσταθμιστής αντισταθμίζει την πραγματική παραμόρφωση του καναλιού
    - συνήθως επιλέγεται $\tau = T/2$ (2 δείγματα ανά T)

Ισοσταθμιστής ZF (1/3)

- Κρουστική απόκριση ισοσταθμιστή (2N+1 συντελεστές):

$$g_E(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n \delta(t-n\tau)$$

- Το μήκος του ισοσταθμιστή θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να καλύπτει την έκταση της ISI: $2N+1>L$.
- Έστω: $x(t)=g_T(t)*c(t)*g_R(t)$.
- Θεωρούμε ότι το $x(t)$ είναι γνωστό.
- $q(t)$: η συνέλιξη $x(t)$ και ισοσταθμιστή $g_E(t)$, δηλαδή η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

$$q(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n x(t-n\tau)$$

Ισοσταθμιστής ZF (2/3)

- Συνθήκη επιβολής μηδενισμών: η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, τις στιγμές t=mT, θα πρέπει

$$q(mT)=\begin{cases}1, m=0\\0, m\neq 0\end{cases}$$

- Επειδή ο ισοσταθμιστής έχει μόνο $2N+1$ συντελεστές, μπορώ να ελέγξω μόνο $2N+1$ τιμές του $q(t)$

$$q(mT)=\sum_{n=-N}^{N} c_n x(mT-n\tau)=\begin{cases}1, & m=0\\0, & m=\pm1,\pm2,\dots,\pm N\end{cases}$$

- Από τις παραπάνω συνθήκες, δημιουργείται
  - Ένα γραμμικό σύστημα
  - $2N+1$ εξισώσεων
  - $2N+1$ αγνώστων (των συντελεστών του ισοσταθμιστή)

Ισοσταθμιστής ZF (3/3)

- Γραμμικό σύστημα για τον υπολογισμό των συντελεστών του ισοσταθμιστή ZF: $\boldsymbol{Xc} = \boldsymbol{q}$.
  - $\boldsymbol{X}$: πίνακας $(2\mathrm{N}+1) \times (2N+1)$ με στοιχεία $x(mT - n\tau)$.
  - **c**: διάνυσμα με τους συντελεστές του ισοσταθμιστή.
  - $\boldsymbol{q} = [0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0]^T$.
- Ο ZF ισοσταθμιστής δεν εξαλείφει πλήρως την ISI.
  - Όταν αυξάνεται το N, το παραμένον ISI μειώνεται.
  - Οριακά για $N \to \infty$ το ISI εξαλείφεται πλήρως.
- Μειονέκτημα:
  - Αμελεί την παρουσία του προσθετικού θορύβου.
  - Αν σε κάποια περιοχή συχνοτήτων το $C(f)$ είναι μικρό,τότε το $1/C(f)$ είναι μεγάλο και θα ενισχύσει το θόρυβο.

Ισοσταθμιστής MMSE (1/4)

- Ο ZF παρουσιάζει σοβαρό πρόβλημα ενίσχυσης του θορύβου σε περιπτώσεις καναλιών με συχνοτικά βυθίσματα (διαλείψεις).
- Μια λύση στο πρόβλημα αυτό, είναι να χαλαρώσουμε τη συνθήκη επιβολής μηδενισμών.
- Επιλέγουμε τον ισοσταθμιστή ώστε η συνδυασμένη ισχύς:
  - της ISI που απομένει και του προσθετικού θορύβου στην έξοδό του να ελαχιστοποιούνται υπό την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.
- Ο ισοσταθμιστής που προκύπτει ονομάζεται ισοσταθμιστής ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Minimum Mean Square Error - MMSE).

Ισοσταθμιστής MMSE (2/4)

- Δειγματοληπτούμε σε $t = mT$, την έξοδο του ισοσταθμιστή $z(mT) = \sum_{n=-N}^{N} c_n y(mT - n\tau)$, όπου $y(t)$ η είσοδος του ισοσταθμιστή (έξοδος φίλτρου G_R) που μπορεί να είναι κλασματικά δειγματοληπτημένη (π.χ., $\tau = T/2$).
- Αν α_m είναι το μεταδιδόμενο σύμβολο, τότε ορίζουμε το σφάλμα (συνάρτηση κόστους):

$$\mathrm{MSE} = E\left[\left|e_m\right|^2\right] \equiv E\left[\left|a_m - z\left(mT\right)\right|^2\right]$$

- Για να υπολογίσουμε τον ισοσταθμιστή που ελαχιστοποιεί το MSE,
  – υπολογίζουμε την παράγωγο του MSE ως προς τα c_n
  – τη θέτουμε ίση με το μηδέν
  – οπότε προκύπτει και πάλι ένα γραμμικό σύστημα διάστασης $(2N + 1)$

Ισοσταθμιστής MMSE (3/4)

– Το γραμμικό σύστημα που προκύπτει είναι το:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n R_y(n-k) = R_{ay}(k),\ k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$$

– $\boldsymbol{R_y}$: η αυτοσυσχέτιση της εισόδου του ισοσταθμιστή:

$$R_y(n-k) = E\left[y(mT - n\tau) y(mT - k\tau) \right]$$

– $\boldsymbol{R_{ay}}$: η ετεροσυσχέτιση του y με τα μεταδιδόμενα σύμβολα:

$$R_{ay}(k) = E\left[y(mT - k\tau) a_m \right]$$

Ισοσταθμιστής MMSE (4/4)

- Το παραπάνω σύστημα μπορεί να εκφραστεί και με τη μορφή πινάκων:

$$\mathbf{R}_y \mathbf{c} = \mathbf{r}_{ay}$$

- Επειδή συνήθως δε γνωρίζουμε τις στατιστικές ποσότητες, μπορούμε να τις εκτιμήσουμε με χρονικές μέσες τιμές.
- Λόγω της μορφής του $\boldsymbol{R}$ (που είναι Toeplitz) εφαρμόζουμε αλγόριθμο Levinson (πολυπλοκότητα $O(N^2)$).
- Η εκτίμηση του χρονικού μέσου όρου της ποσότητας $\boldsymbol{r}_{ay}$ απαιτεί τη χρήση ακολουθίας εκμάθησης (training sequence).

Προσαρμοστικοί Ισοσταθμιστές

- Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές του ισοσταθμιστή MMSE, απαιτείται να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα $(2\mathrm{N}+1) \times (2N+1)$: $\boldsymbol{R_y c} = \boldsymbol{r_{ay}}$
- Η λύση του συστήματος είναι: $\boldsymbol{c}_{opt} = \boldsymbol{R}_y^{-1} \boldsymbol{r}_{ay}$
- Συχνά σε πρακτικές εφαρμογές ισοσταθμιστών:
  - Προσπαθούμε να αποφύγουμε την άμεση αντιστροφή του $\boldsymbol{R}$
  - και για να βρούμε τον ισοσταθμιστή συνήθως εφαρμόζουμε μια επαναληπτική διαδικασία.
- Η ιδέα της επαναληπτικής διαδικασίας θα οδηγήσει στους προσαρμοστικούς ισοσταθμιστές.
- Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να σχεδιαστούν προσαρμοστικοί ισοσταθμιστές βασισμένοι στο κριτήριο ZF

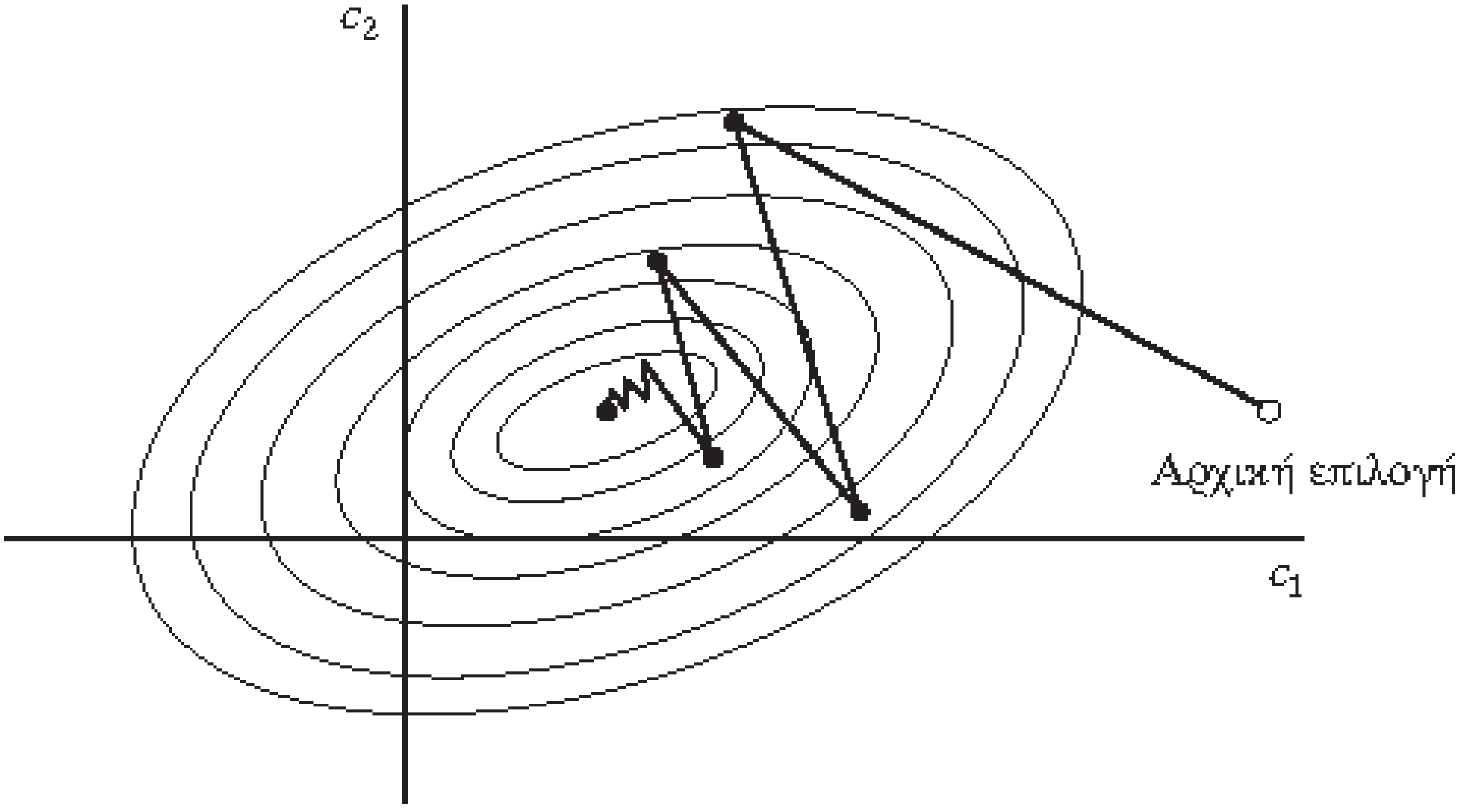
Μέθοδος της πιο Απότομης Καθόδου (Steepest Descent)

- Ξεκινάμε από ένα αυθαίρετο σημείο $\boldsymbol{c}_0$ του διανύσματος συντελεστών πάνω στην επιφάνεια της συνάρτησης κόστους:
  - MMSE: έχουμε επιφάνεια 2ου βαθμού στο $(2N+1)$-διάστατο χώρο.
- Σε κάθε επανάληψη k, υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης κόστους ως προς τους συντελεστές:
  - MMSE: η παράγωγος του MMSE $\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{R}_y \boldsymbol{c}_k - \boldsymbol{r}_{ay}$.
- Κάθε συντελεστής αλλάζει σε κατεύθυνση αντίθετη από την αντίστοιχη συνιστώσα του διανύσματος κλίσης.

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k - \Delta \mathbf{g}_k$$

- Η παράμετρος Δ ονομάζεται «μέγεθος βήματος» (step-size).

Σύγκλιση Απότομης Καθόδου



Σύγκλιση αλγορίθμου απότομης καθόδου στην επιφάνεια της συνάρτησης κόστους (Δισδιάστατος Χώρος)

Μέθοδος πιο Απότομης Καθόδου

- Για να έχουμε σύγκλιση, ως Δ επιλέγεται μικρός θετικός αριθμός (μέσα στην περιοχή σύγκλισης).
- Αν $k \to \infty$, τότε:
  - $g_k \to 0$ (το διάνυσμα κλίσης μηδενίζεται).
  - $c_k \to c_0$ (οι συντελεστές τείνουν στους βέλτιστους).
- Η σύγκλιση στη βέλτιστη τιμή $\boldsymbol{c}_0$ απαιτεί άπειρο αριθμό επαναλήψεων.
- Οι ποσότητες $\boldsymbol{R}_y$ και $\boldsymbol{r}_{ay}$ υπολογίζονται μια φορά στην αρχή λαμβάνοντας υπόψη όλα τα δεδομένα και στη συνέχεια αρχίζουν οι επαναλήψεις.
- Ωστόσο, η βέλτιστη λύση προσεγγίζεται ικανοποιητικά σε μερικές εκατοντάδες επαναλήψεων.
- Η πολυπλοκότητα είναι $O(N^2)$/επανάληψη.

Προσαρμοστική Ισοστάθμιση

- Η προσαρμοστική ισοστάθμιση καναλιού απαιτείται όταν τα χαρακτηριστικά του καναλιού είναι χρονικά μεταβαλλόμενα
- Τότε:
  - Το ISI αλλάζει χρονικά.
  - Η βέλτιστη λύση $\boldsymbol{c}_0$ αλλάζει χρονικά.
  - Χρησιμοποιείται εκτίμηση του διανύσματος κλίσης.

$$\hat{\mathbf{c}}_{k+1} = \hat{\mathbf{c}}_k - \Delta\hat{\mathbf{g}}_k$$

- Για το κριτήριο MMSE, ισχύει:

$$\mathbf{g}_k = -E\left[e_k \mathbf{y}_k\right]$$

- Μια απλή εκτίμηση του g_k είναι η στιγμιαία τιμή του:

$$\hat{\mathbf{g}}_k = -e_k \mathbf{y}_k$$

Ισοσταθμιστής LMS

- Με τη στιγμιαία εκτίμηση του gk προκύπτει ο προσαρμοστικός αλγόριθμος των Ελαχίστων Μέσων Τετραγώνων (Least Mean Squares - LMS).
- Ο LMS βασίζεται στο κριτήριο ελαχιστοποίησης του MSE.
- Επειδή χρησιμοποιούμε μια εκτίμηση του διανύσματος κλίσης, ονομάζεται και αλγόριθμος στοχαστικής κλίσης (stochastic gradient).
- Κάθε φορά που λαμβάνεται ένα νέο δείγμα έχουμε και ένα βήμα επανάληψης.
- Κατά την επανάληψη k, συγκεντρώνω τις $2N + 1$ τιμές λαμβανόμενου σήματος που βρίσκονται μέσα στον ισοσταθμιστή.

$$\mathbf{y}_k = \left[y(kT + N\tau) \quad \cdots \quad y(kT) \quad \cdots \quad y(kT - N\tau) \right]^T$$

Αλγόριθμος LMS

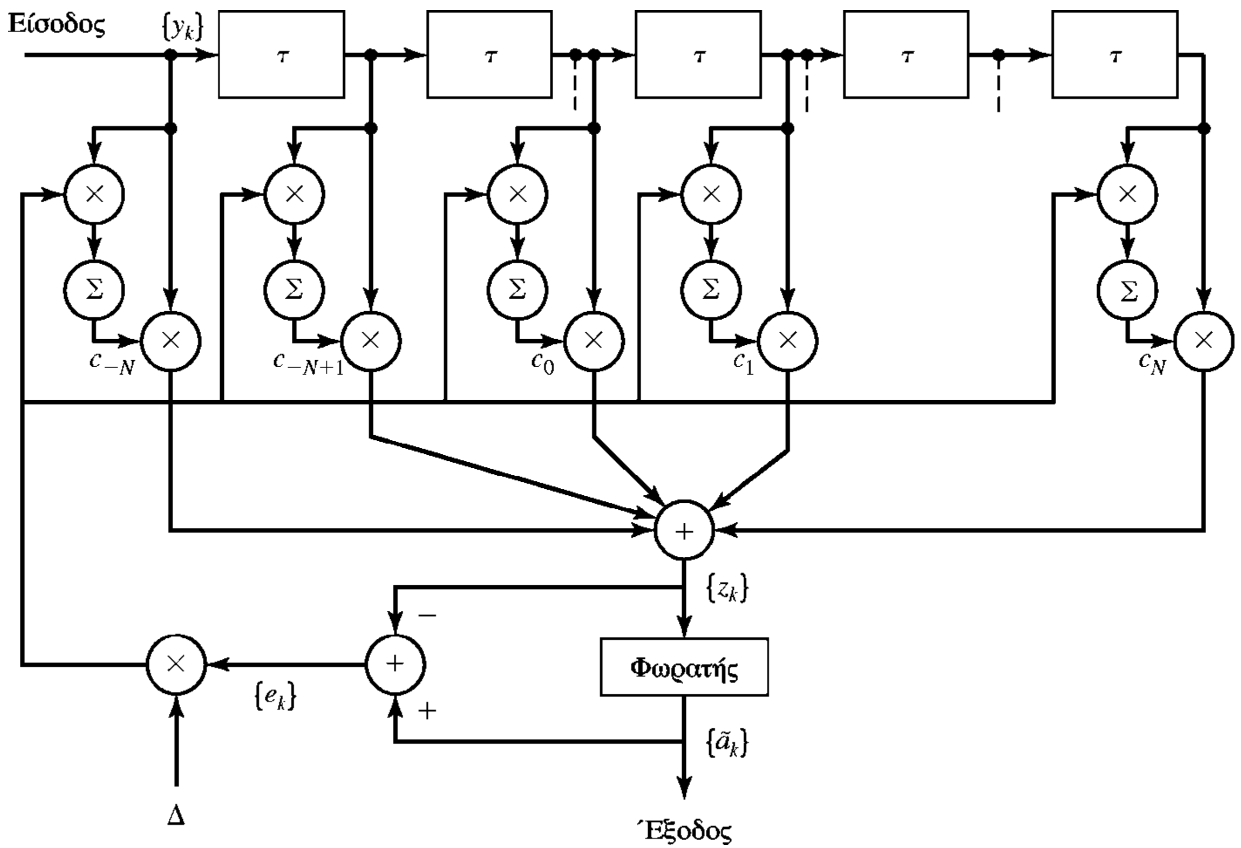
- Τρόπος Εκπαίδευσης (Training Mode):
  - Αρχικά στέλνουμε μια ακολουθία εκμάθησης, δηλαδή μια ακολουθία γνωστών συμβόλων.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{c}_0 = [0 \ldots 010 \ldots 0]^T \\
&\text{for } k = 0, \ldots. \\
&\qquad z_k = \mathbf{c}_k^H \mathbf{y}_k \\
&\qquad e_k = a_k - z_k \\
&\qquad \mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \Delta \mathbf{y}_k e_k^*
\end{aligned}
$$

- Τρόπος οδηγούμενος από αποφάσεις (Decision-directed mode):
  - Μετά στέλνουμε τα κανονικά προς μετάδοση δεδομένα.
  - Εμπιστευόμαστε τον ισοσταθμιστή και θεωρούμε ως επιθυμητά σύμβολα τις αποφάσεις του φωρατή.

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_k &= Q\left(z_k\right) \\
e_k &= \tilde{a}_k - z_k
\end{aligned}
$$

LMS Equalizer



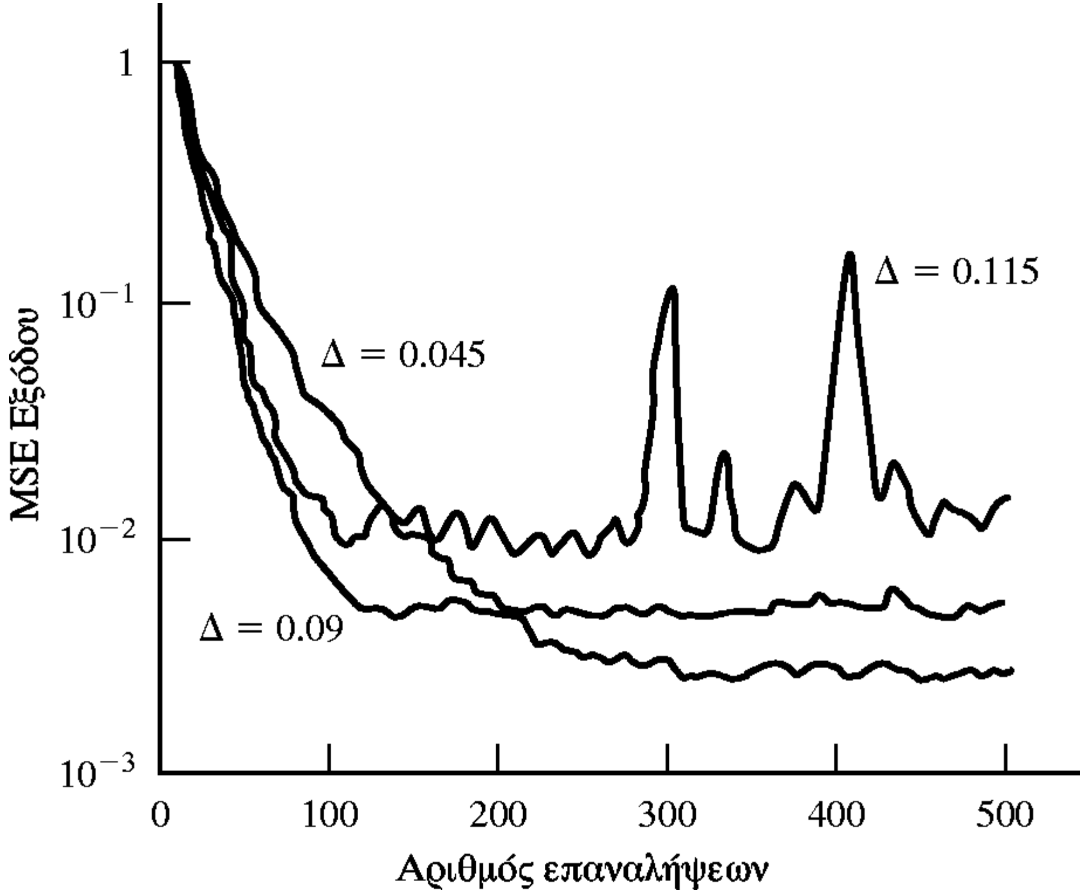
Γραμμικός προσαρμοστικός ισοσταθμιστής βασιζόμενος στο κριτήριο MMSE

Επιλογή του Step Size Δ

- Το μέγεθος βήματος έχει πολύ σημαντικό ρόλο στην επίδραση του αλγορίθμου.
- Αν το Δ είναι μικρό, τότε ο αλγόριθμος:
  - Συγκλίνει με αργό τρόπο.
  - Αλλά συγκλίνει πιο κοντά στη βέλτιστη τιμή.
- Αν το Δ είναι μεγάλο, τότε ο αλγόριθμος:
  - Συγκλίνει πιο γρήγορα.
  - Αλλά πιο μακριά από τη βέλτιστη τιμή.
- Αν το Δ είναι πολύ μεγάλο, τότε ο αλγόριθμος αποκλίνει.
- Ένας εμπειρικός κανόνας για καλή σύγκλιση και καλή ιχνηλάτηση σε αργά μεταβαλλόμενα κανάλια είναι (P_R: ισχύς σήματος εισόδου):

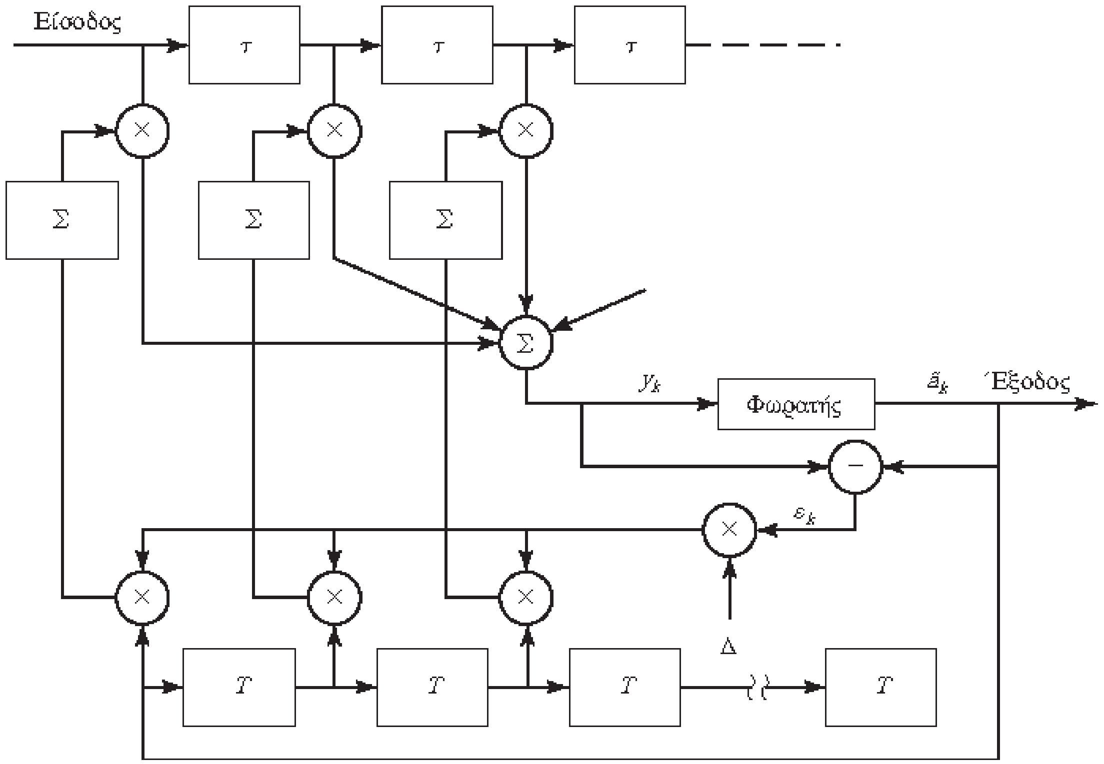
$$0 < \Delta < \frac{2}{\sum_{k=1}^{2N+1} \lambda_k(R)} \qquad \Delta = \frac{1}{5(2N+1)P_R}$$

Σύγκλιση του LMS



Σύγκλιση του αλγορίθμου LMS
για διαφορετικά μεγέθη βήματος

Adaptive ZF Equalizer



- Όπως ο ισοσταθμιστής MMSE μπορεί να υλοποιηθεί προσαρμοστικά, κατά αντίστοιχο τρόπο, υλοποιείται και ένας ZF ισοσταθμιστής.

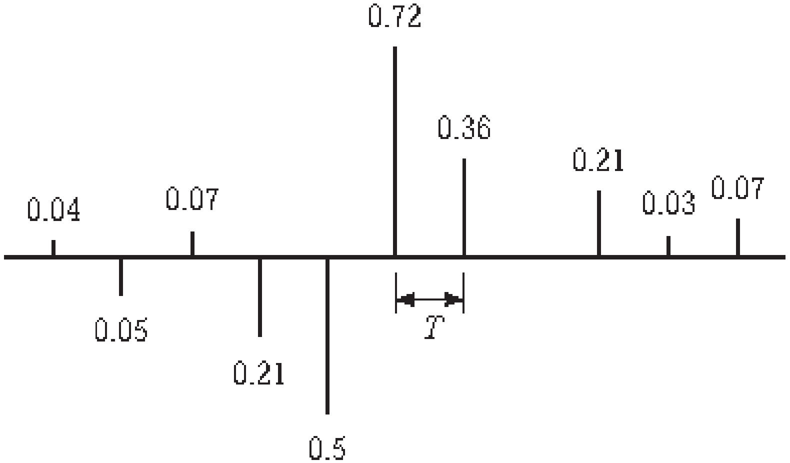
Κριτήρια αξιολόγησης προσαρμοστικών αλγορίθμων

- Σφάλμα μόνιμης κατάστασης (steady-state error).
- Ταχύτητα σύγκλισης (convergence).
- Δυνατότητα παρακολούθησης αλλαγών (tracking).
- Υπολογιστική πολυπλοκότητα (complexity).
- Χρονική καθυστέρηση (processing delay).
- Ευρωστία (robustness) (σχετίζεται με την ευστάθεια) .
- Άλλες αριθμητικές ιδιότητες (όπως η ακρίβεια λύσης).
- Δυνατότητα αποδοτικών υλοποιήσεων (DSP, parallel, pipeline).

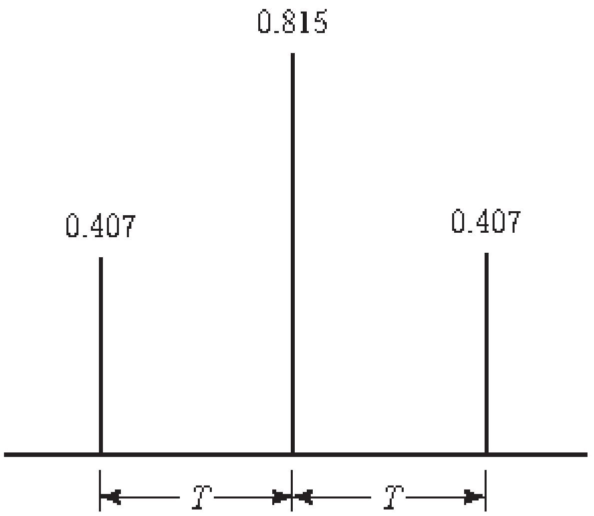
Ένταση της ISI

- Η ένταση της ISI σχετίζεται:
  - Κυρίως με τα φασματικά χαρακτηριστικά του καναλιού.
  - Δευτερευόντως με την έκταση της ISI (το μήκος του καναλιού).
- Όταν η απόκριση συχνότητας του καναλιού έχει φασματικά βυθίσματα, τότε δημιουργείται έντονη ISI.
- Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι γραμμικοί ισοσταθμιστές προσπαθούν να εφαρμόσουν το αντίστροφο φίλτρο, οπότε ενισχύεται σημαντικά ο θόρυβος σε αυτήν την περιοχή (ακόμη και όταν έχουμε κριτήριο MMSE).
- Συμπέρασμα: οι γραμμικοί ισοσταθμιστές είναι κατάλληλοι για κανάλια χωρίς έντονα συχνοτικά βυθίσματα.
- Ακολουθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παραδείγματα Καναλιών: Κρουστική Απόκριση

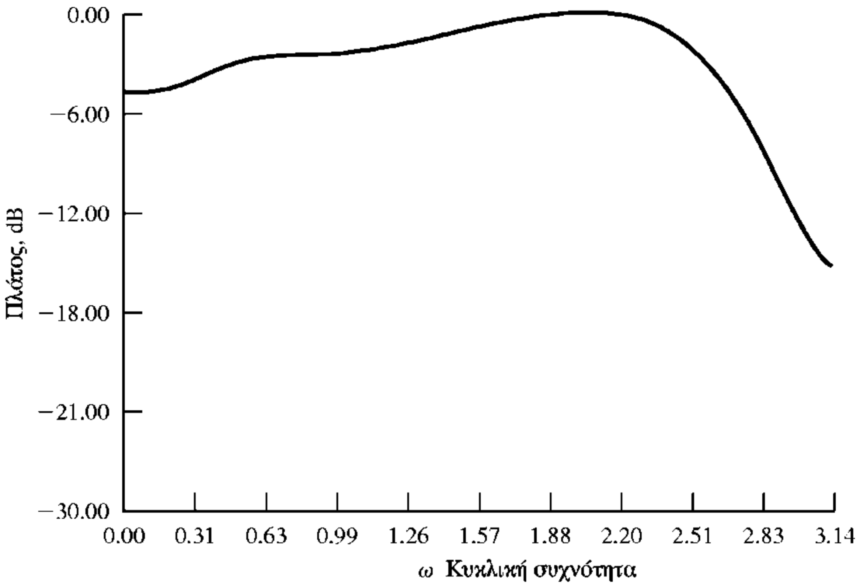


Κανάλι Α

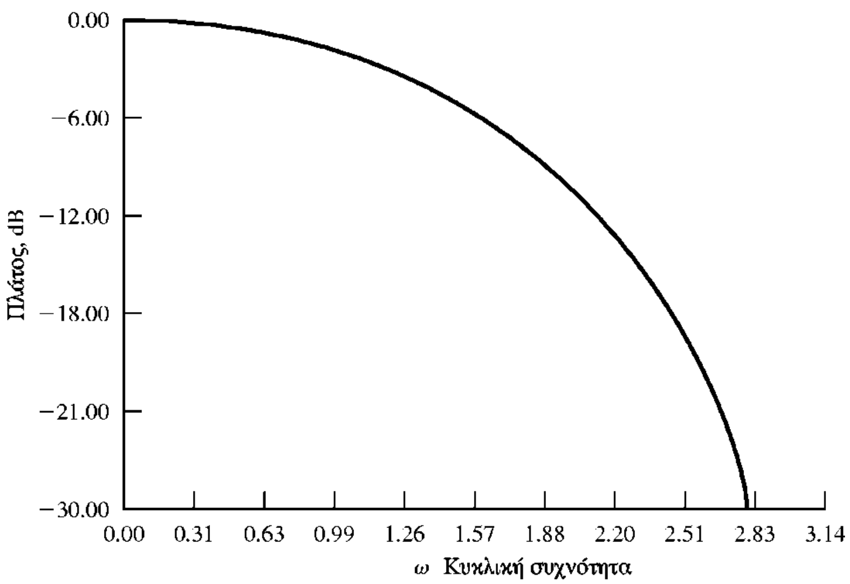


Κανάλι Β

Παραδείγματα Καναλιών: Απόκριση Συχνότητας

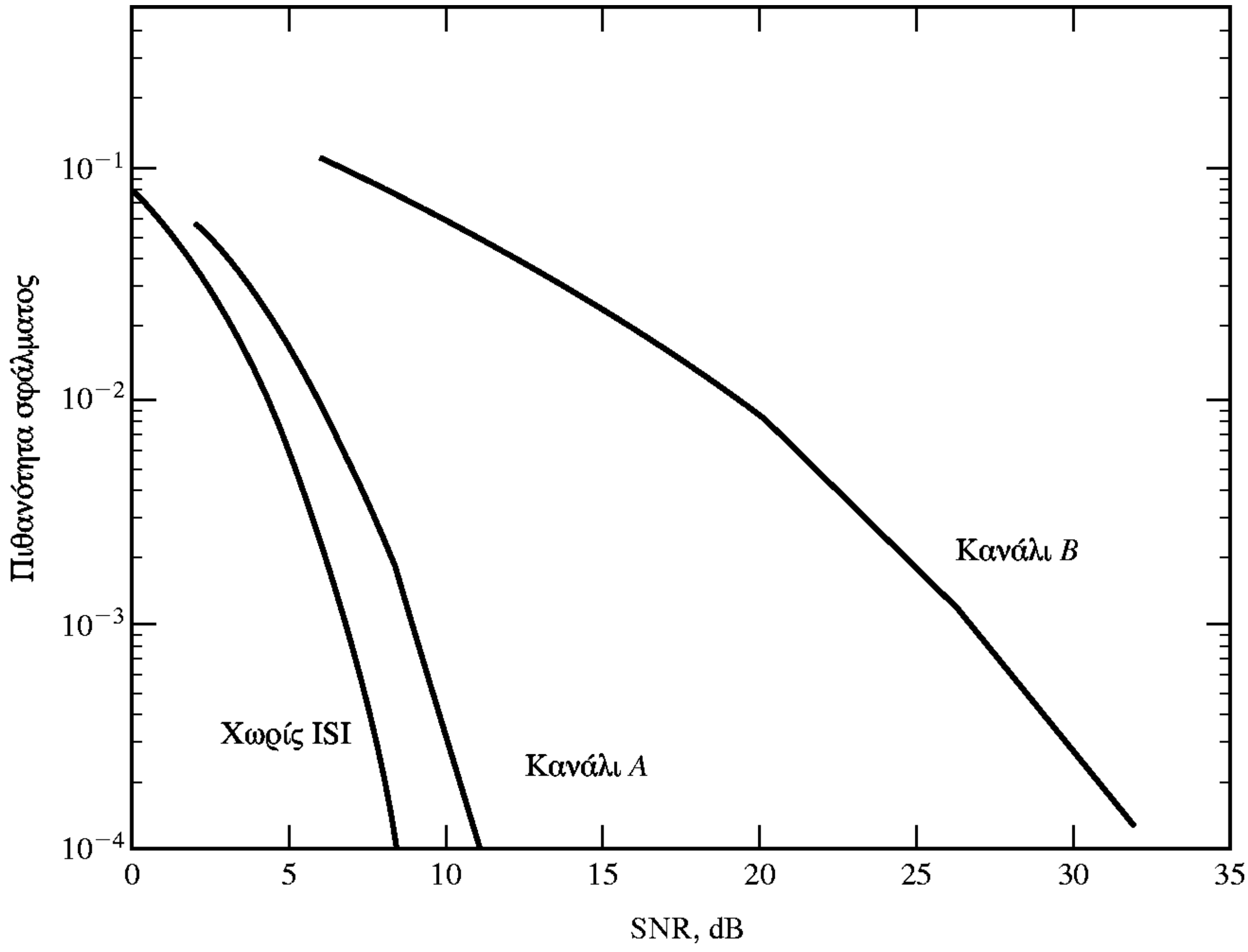


Κανάλι A

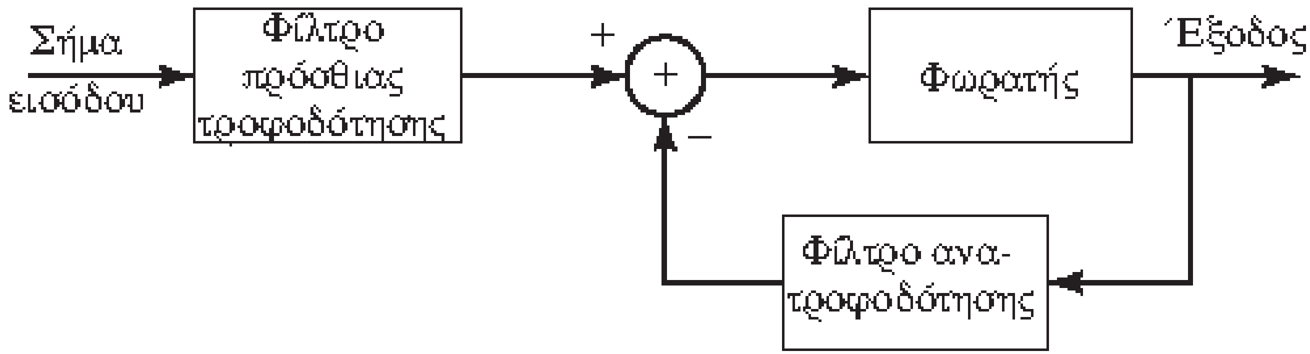


Κανάλι B

Επίδοση ρυθμού σφαλμάτων (BER) γραμμικού MMSE ισοσταθμιστή



Ισοσταθμιστής DFE (1/2)



- DFE: Ισοσταθμιστής Ανατροφοδότησης Αποφάσεων (Decision Feedback Equalizer):
  - Μη γραμμικός ισοσταθμιστής.
  - Το feed-forward filter σε σειρά με το υπερσύστημα $x(t)$ δίνει ένα αιτιατό σύστημα (ISI μόνο από προηγούμενα σύμβολα).
  - Το feedback filter χρησιμοποιεί τις αποφάσεις του φωρατή για προηγούμενα σύμβολα προκειμένου να εξαλείψει την (αιτιατή) ISI που αυτά εισάγουν στο τρέχον σύμβολο.

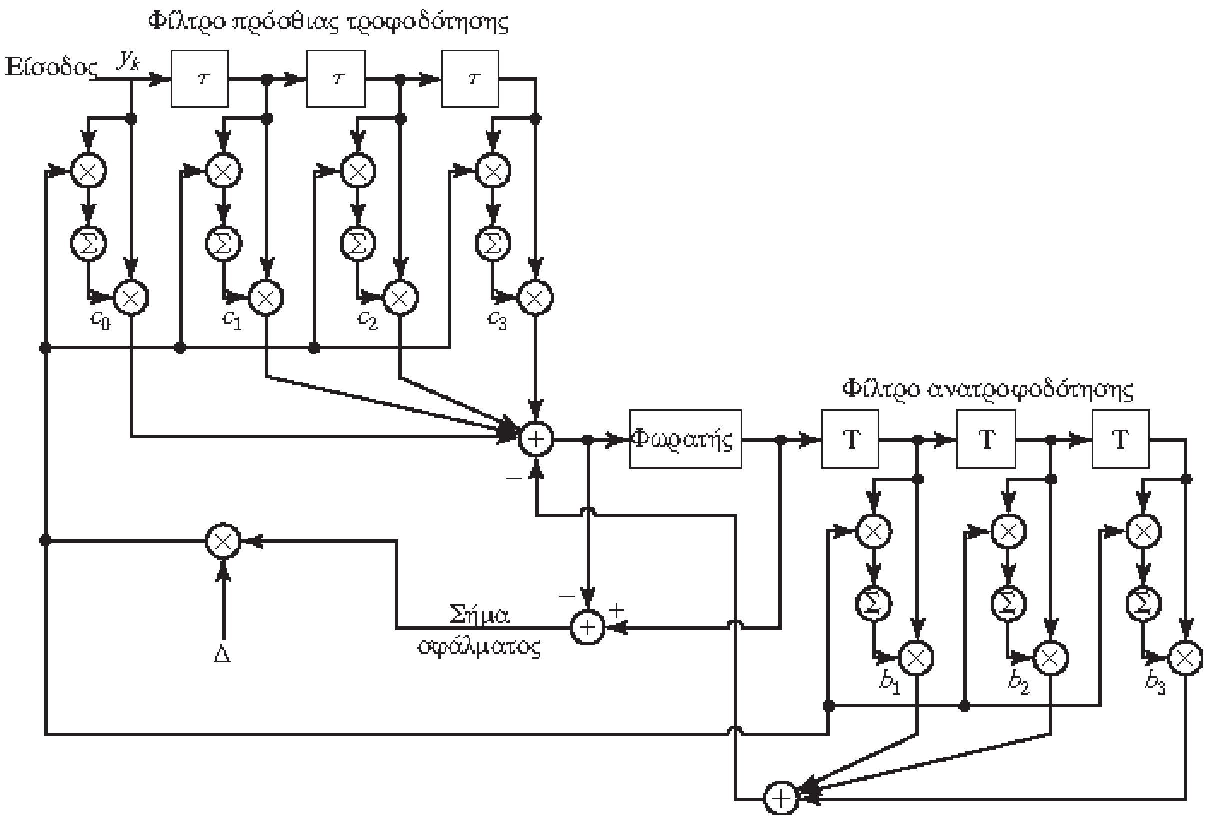
Ισοσταθμιστής DFE (2/2)

- Φίλτρο πρόσθιας τροφοδότησης (feedforward filter, FF):
  - Συνήθως είναι fractionally-spaced.
  - Είναι προσαρμοστικό ή σταθερό.
  - Είναι αντίστοιχο των γραμμικών ισοσταθμιστών.
  - N_1 συντελεστές, $\{c_n\}$.
- Φίλτρο ανατροφοδότησης (feedback filter, FB):
  - Symbol-spaced.
  - Είναι προσαρμοστικό ή σταθερό.
  - Ως είσοδο δέχεται τις αποφάσεις του φωρατή.
  - N_2 συντελεστές, $\{b_n\}$.
- Έξοδος DFE:

$$z_m = \sum_{n=1}^{N_1} c_n y\big((m+N_1)T - nT\big) + \sum_{n=1}^{N_2} b_n \tilde{a}_{m-n}$$

$$= \mathbf{c}^H \mathbf{y}_m + \mathbf{b}^H \tilde{\mathbf{a}}_m$$

Adaptive DFE



- Συνήθως χρησιμοποιείται το κριτήριο MMSE...
- ...και κάποιος αλγόριθμος στοχαστικής κλίσης (π.χ. LMS).

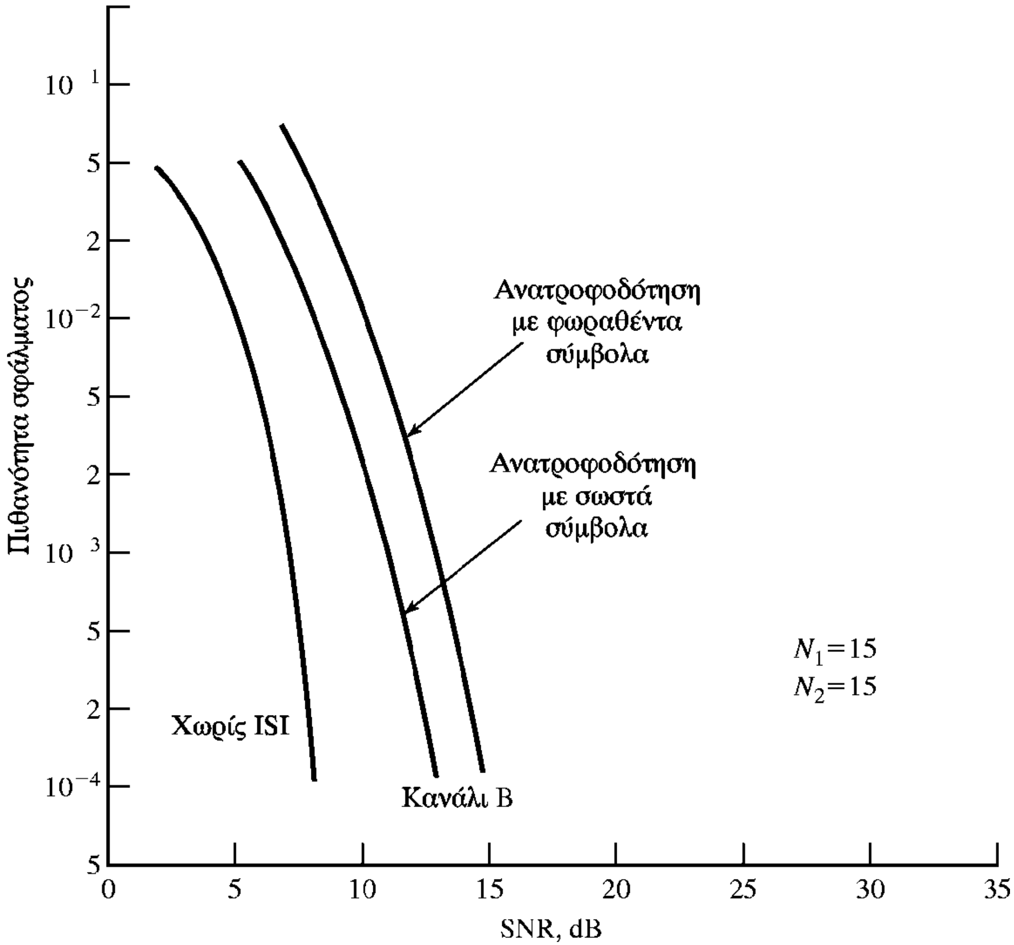
Adaptive DFE algorithm

Αλγόριθμος στοχαστικής κλίσης - LMS

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{c}_0 = [0\ldots01]^T \\
&\text{for}\ \ \mathrm{m} = 0,\ldots. \\
&\qquad z_m = \mathbf{c}^H \mathbf{y}_m + \mathbf{b}^H \tilde{\mathbf{a}}_m \\
&\qquad e_m = Q[z_m] - z_m \\
&\qquad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{m+1} \\ \mathbf{b}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} + \Delta e_m^* \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \tilde{\mathbf{a}}_m \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Επίδοση DFE

- Με και χωρίς διάδοση σφαλμάτων για το κανάλι Β και $N_1 = N_2 = 15$.



Διάδοση Σφαλμάτων

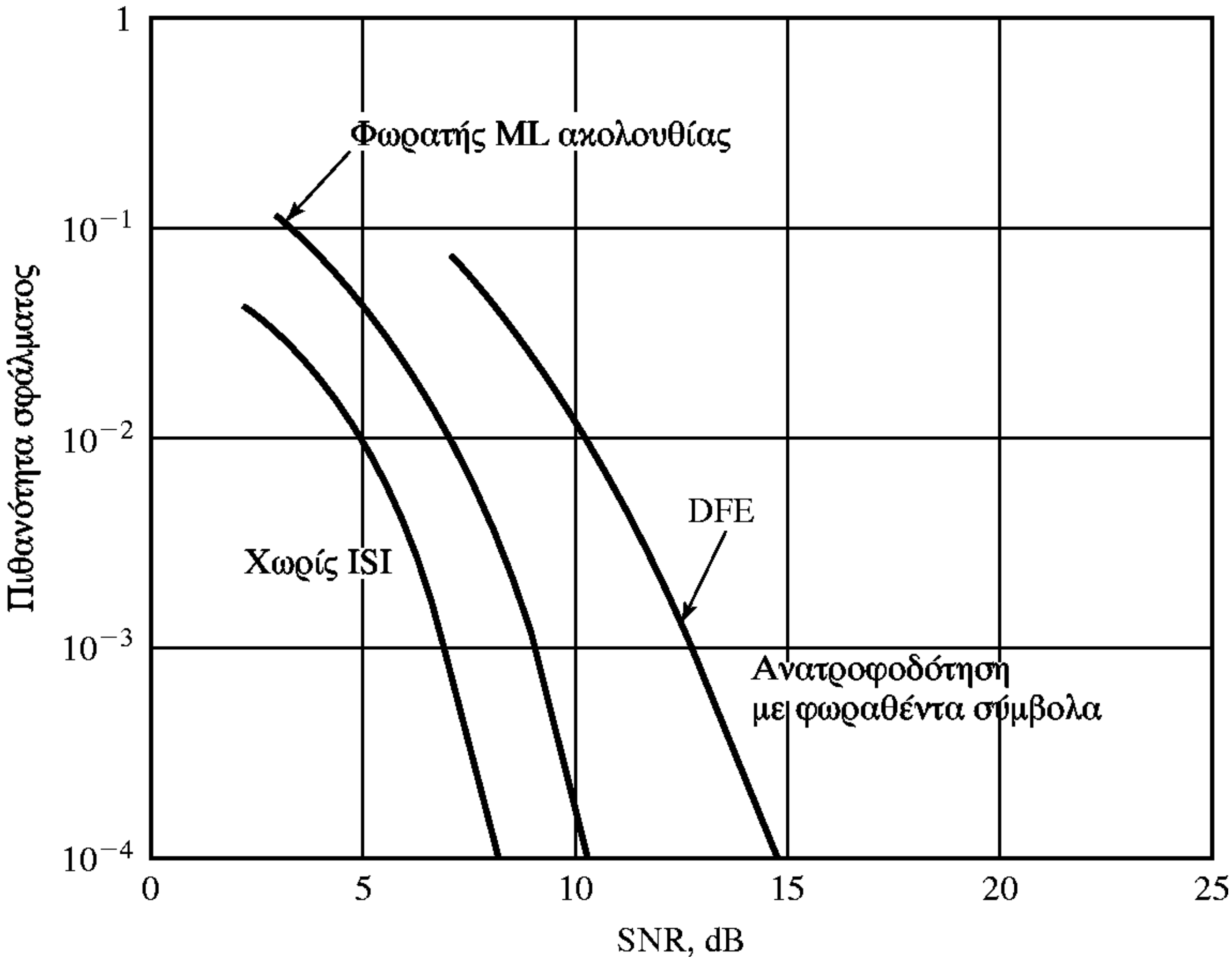
- Διάδοση Σφάλματος (Error Propagation):
  - Αν ο φωρατής αποφασίσει λανθασμένα για κάποιο σύμβολο, τότε αυτό τροφοδοτείται μέσω του FB και επηρεάζει τη φώραση και των επόμενων συμβόλων.
  - Η επίδραση του σφάλματος δεν είναι καταστροφική (με την έννοια του μέσου όρου).
  - Συνεπάγεται απώλεια επίδοσης κατά $1-2$ dB για $BER < 10^{-2}$.

Σύγκριση Ισοσταθμιστών

- Γραμμικοί Ισοσταθμιστές:
  - Είναι αποτελεσματικοί για κανάλια χωρίς έντονη ISI (δηλαδή χωρίς συχνοτικά βυθίσματα).
- Τύπου DFE:
  - Έχουν πολύ καλύτερη απόδοση από τους γραμμικούς ισοσταθμιστές και μπορούν να αντιμετωπίσουν συχνοτικά βυθίσματα.
  - Δεν είναι βέλτιστοι ως προς την ελαχιστοποίηση του BER (όπως ο MLSE).
- MLSE:
  - Είναι ο βέλτιστος φωρατής.
  - Είναι κατάλληλος για κανάλια με έντονο ISI.
  - Λόγω πολυπλοκότητας είναι εφαρμόσιμος για κανάλια με μικρό μήκος (μικρής έκτασης ISI).

Επίδοση του φωρατή Viterbi και του DFE

- Για το κανάλι Β:



Ειδικότερα θέματα

- Ισοστάθμιση Μη-Γραμμικών Καναλιών: $y(t) = NL\{a_n\}$, όπου NL μη-γραμμικός τελεστής (π.χ. δορυφορικές ζεύξεις / οπτικά κανάλια κ.λπ.).
- Πιθανές μέθοδοι αντιμετώπισης:
  - Μη-Γραμμικά μοντέλα (Volterra Series Expansion).
  - Νευρωνικά Δίκτυα (Μη-Γραμμική Απεικόνιση).
- Blind (and Semi-Blind) Equalization: Ισοστάθμιση χωρίς χρήση (ή με ελάχιστη χρήση) ακολουθίας εκμάθησης.
- Αποδοτικοί αλγόριθμοι: Προσαρμοστικοί στο χρόνο / Αναδρομικοί κατά την τάξη / Παράλληλοι / Κατανεμημένοι …
- Ισοστάθμιση σε Συστήματα OFDM.

Γενικότερα θέματα

- Ισοστάθμιση Συστημάτων MIMO / Distributed MIMO
- Interference Alignment
- Interference Management
  - Intersymbol Interference
  - Multiuser Interference
  - Intercarrier Interference
  - Interblock Interference
  - Intercode Interference
  - …

Τέλος Ενότητας 8

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κώστας Μπερμπερίδης. «Στοχαστικά Σήματα και Τηλεπικοιωνίες». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1111/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- Οι εικόνες στις διαφάνειες 7, 9, 15, 16, 19, 21, 30, 37, 45, 47, 58, 63, 65, 66, 69, 70, 71, 72, 74, 76, 79 έχουν δημιουργηθεί με βάση αντίστοιχες εικόνες στο βιβλίο «Συστήματα Τηλεπικοινωνιών», J. G. Proakis, M. Salehi, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (Μετάφραση-Επιμέλεια: Καρούμπαλος Κ. και Ζέρβας Ε., Καραμπογιάς Σ., Σαγκριώτης Ε.)