Στοχαστικά Σήματα και Τηλεπικοινωνιές

Ενότητα 4: Βέλτιστα Φίλτρα Wiener

Καθηγητής Κώστας Μπερμπερίδης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Σκοποί ενότητας

- Παρουσίαση βασικών εννοιών των βέλτιστων φίλτρων Wiever καθώς και βασικών παραδειγμάτων εφαρμογής τους.

Περιεχόμενα ενότητας

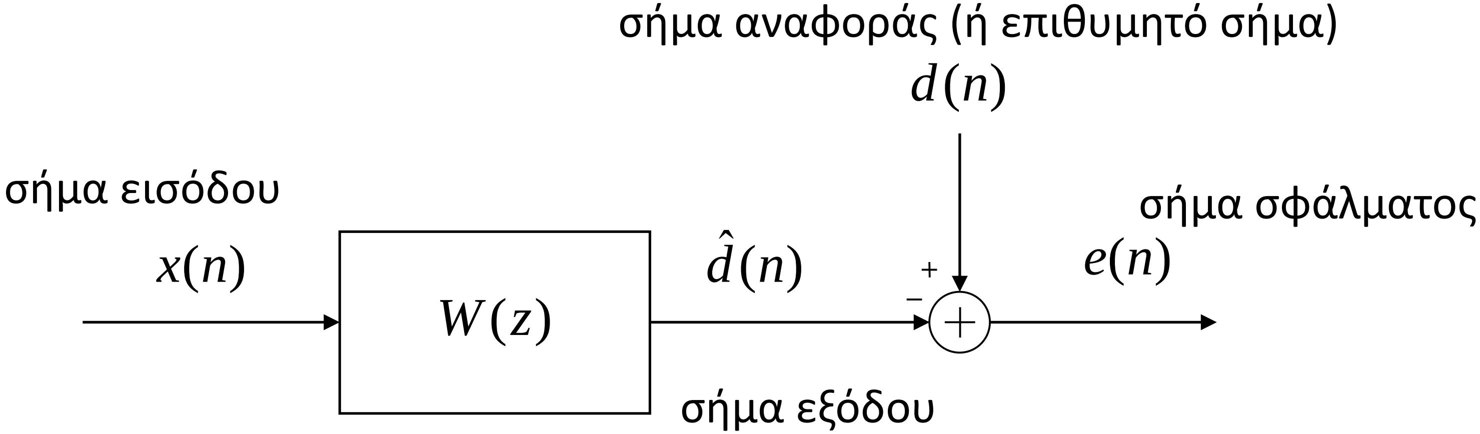
- Εισαγωγή
- FIR φίλτρα Wiener
- Εφαρμογές
  - Φιλτράρισμα θορύβου
  - Ακύρωση θορύβου
  - Αναγνώριση συστήματος

Βασικές έννοιες φίλτρων Wiener

Εισαγωγή – Διατύπωση προβλήματος

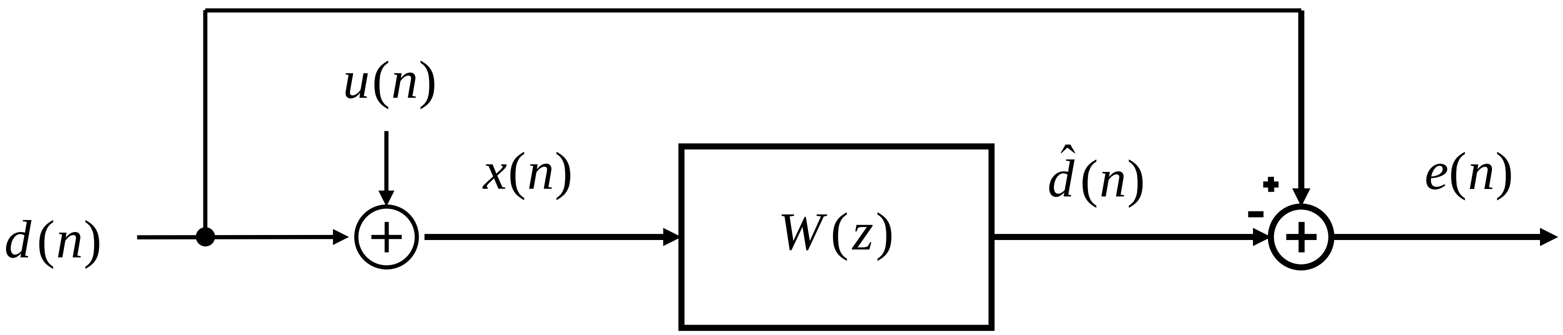
- Δοθέντων των από κοινού WSS στοχαστικών διαδικασιών $x(n)$ και $d(n)$, υπολόγισε τους συντελεστές του φίλτρου $W(z)$, ώστε η έξοδος $\hat{d}(n)$ να αποτελεί τη βέλτιστη εκτίμηση του σήματος $d(n)$, δηλαδή την εκτίμηση με το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE: mean square error):

$$\min_{w(k)} E\left\{\left|e(n)\right|^2\right\} = \min_{w(k)} E\left\{\left|d(n) - \hat{d}(n)\right|^2\right\}$$



Εισαγωγή – Ενδεικτικές εφαρμογές (1/2)

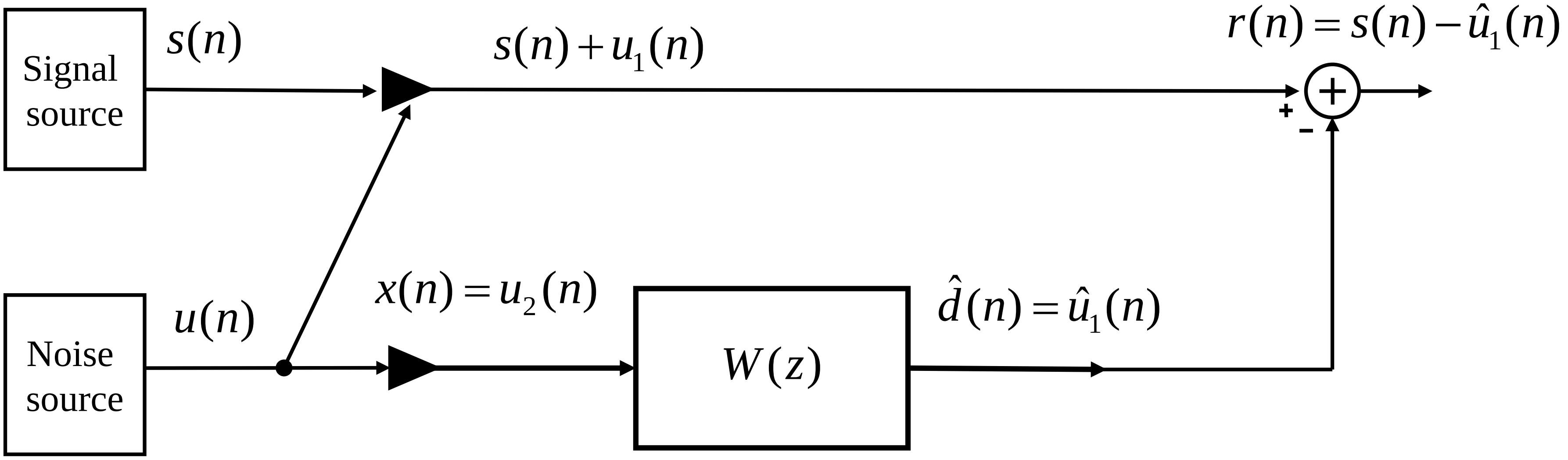
- Φιλτράρισμα (filtering - noise reduction)
  - μετάδοση σημάτων σε περιβάλλον θορύβου
  - μετάδοση δεδομένων σε κανάλι με θόρυβο
  - ανίχνευση και προσδιορισμός θέσης πηγών (στόχων)
  - αποκατάσταση πολυμεσικών σημάτων (βίντεο, εικόνα, μουσική)



$$x(n) = d(n) + u(n)$$

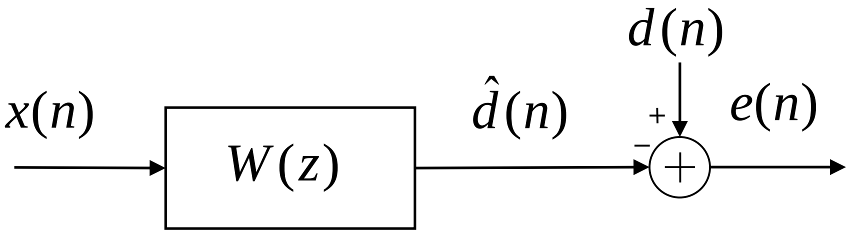
Εισαγωγή – Ενδεικτικές εφαρμογές (2/2)

- Ακύρωση θορύβου (noise cancellation)
  - αεροπορικές επικοινωνίες
  - τεχνολογία ήχου
  - καταστολή ηχούς (ακουστικής, ηλεκτρικής)



FIR Φίλτρα Wiener (1/9)

- Εξετάζουμε το πρόβλημα υπολογισμού των συντελεστών του φίλτρου Wiener, το οποίο παράγει τη βέλτιστη (κατά MSE) εκτίμηση μιας δοθείσας ακολουθίας $d(n)$, φιλτράροντας ένα σύνολο παρατηρήσεων $x(n)$.



- Τα σήματα $x(n)$ και $d(n)$ είναι από κοινού WSS στοχαστικές διαδικασίες.
- Το σήμα $d(n)$ εξαρτάται στατιστικά από το σήμα $x(n)$, δηλαδή τα δύο σήματα σχετίζονται μεταξύ τους.
- Το φίλτρο Wiener είναι ένα FIR φίλτρο με p συντελεστές:

$$W(z) = \sum_{n=0}^{p-1} w(n) z^{-n}$$

FIR Φίλτρα Wiener (2/9)

- Οι συντελεστές του φίλτρου Wiener ελαχιστοποιούν το MSE:

$$\min_{w(k)} \xi = \min_{w(k)} E\left\{ \left| e(n) \right|^2 \right\} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial w^*(k)} = 0 \quad \text{για } k = 0,1,\ldots,p-1$$

συνάρτηση κόστους (cost function)

- Το σφάλμα $e(n)$ γράφεται αναλυτικά:

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n) = d(n) - x(n) * w(n) = d(n) - \sum_{l=0}^{p-1} w(l) x(n-l)$$

- Υπολογισμός βέλτιστων συντελεστών:

$$\frac{\partial \xi}{\partial w^*(k)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E\left\{ e(n) e^*(n) \right\}}{\partial w^*(k)} = 0 \Rightarrow E\left\{ e(n) \frac{\partial e^*(n)}{\partial w^*(k)} \right\} = 0 \Rightarrow E\left\{ e(n) \left[-x^*(n-k) \right] \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{E\left\{ e(n) x^*(n-k) \right\} = 0}_{\text{Αρχή της ορθογωνιότητας}}$$

FIR Φίλτρα Wiener (3/9)

- Άρα:

$$E\left\{e(n)x^*(n-k)\right\}=0 \Rightarrow E\left\{\left[d(n)-\sum_{l=0}^{p-1}w(l)x(n-l)\right]x^*(n-k)\right\}=0$$

$$\Rightarrow E\left\{d(n)x^*(n-k)-\sum_{l=0}^{p-1}w(l)x(n-l)x^*(n-k)\right\}=0$$

$$\Rightarrow E\left\{d(n)x^*(n-k)\right\}-\sum_{l=0}^{p-1}w(l)E\left\{x(n-l)x^*(n-k)\right\}=0$$

από κοινού WSS διαδικασίες

$$\Rightarrow \quad r_{dx}(k)-\sum_{l=0}^{p-1}w(l)r_x(k-l)=0$$

- Το παραπάνω σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι γνωστό ως εξισώσεις Wiener-Hopf.

FIR Φίλτρα Wiener (4/9)

- Γράφουμε σε μορφή πινάκων:

$$\sum_{l=0}^{p-1} w(l) r_x(k-l) = r_{dx}(k) \qquad \text{για} \quad k = 0,1,\ldots,p-1$$

$$r_x(k) = r_x^*(-k)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{lllll}
k=0: & w(0)r_x(0) + w(1)r_x(-1) & +\ldots+ & w(p-1)r_x(-p+1) = r_{dx}(0) \\
k=1: & w(0)r_x(1) + w(1)r_x(0) & +\ldots+ & w(p-1)r_x(-p+2) = r_{dx}(1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
k=p-1: & w(0)r_x(p-1) + w(1)r_x(p-2) & +\ldots+ & w(p-1)r_x(0) = r_{dx}(p-1)
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \ldots & r_x^*(p-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \ldots & r_x^*(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \ldots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \vdots \\ w(p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \\ \vdots \\ r_{dx}(p-1) \end{bmatrix}$$

Hermitian Toeplitz $p \times p$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}_{dx}$$

Λύση με αλγ. Levinson

FIR Φίλτρα Wiener (5/9)

- Το ελάχιστο MSE υπολογίζεται ως εξής:

$$\xi_{\min} = E\left\{|e(n)|^2\right\} = E\left\{e(n)e^*(n)\right\} = E\left\{e(n)\left[d^*(n) - \sum_{k=0}^{p-1} w^*(k)x^*(n-k)\right]\right\}$$

$$= E\left\{e(n)d^*(n) - e(n)\sum_{k=0}^{p-1} w^*(k)x^*(n-k)\right\}$$

$$= E\left\{e(n)d^*(n)\right\} - \sum_{k=0}^{p-1} w^*(k)\underbrace{E\left\{e(n)x^*(n-k)\right\}}_{0}$$

Από αρχή ορθογωνιότητας για $k = 0,1,\ldots,p-1$

$$= E\left\{\left[d(n) - \sum_{k=0}^{p-1} w(k)x(n-k)\right]d^*(n)\right\}$$

$$= E\left\{d(n)d^*(n)\right\} - \sum_{k=0}^{p-1} w(k)E\left\{d^*(n)x(n-k)\right\}$$

$$= \quad r_d(0) - \sum_{k=0}^{p-1} w(k)r_{dx}^*(k)$$

FIR Φίλτρα Wiener (6/9)

- Συνοπτικά:

εξισώσεις Wiener-Hopf

$$\min_{w(k)} \xi = \min_{w(k)} E\left\{ |e(n)|^2 \right\} \Rightarrow \sum_{l=0}^{p-1} w(l) r_x(k-l) = r_{dx}(k) \quad \text{για} \quad k = 0,1,\ldots,p-1$$

$$\boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}_{dx} \Rightarrow \boldsymbol{w} = \boldsymbol{R}_x^{-1} \boldsymbol{r}_{dx}$$

$$\xi_{\min} = r_d(0) - \sum_{k=0}^{p-1} w(k) r_{dx}^*(k) \Rightarrow \xi_{\min} = r_d(0) - \boldsymbol{r}_{dx}^H \boldsymbol{w} = r_d(0) - \boldsymbol{r}_{dx}^H \boldsymbol{R}_x^{-1} \boldsymbol{r}_{dx}$$

FIR Φίλτρα Wiener (7/9)

- Διερεύνηση της συνάρτησης κόστους:

$$\xi(\boldsymbol{w}) = E\left\{|e(n)|^2\right\} = E\left\{e(n)e^*(n)\right\} = E\left\{e(n)\left[d^*(n) - \sum_{k=0}^{p-1} w^*(k)x^*(n-k)\right]\right\}$$

$$= E\left\{e(n)d^*(n)\right\} - \sum_{k=0}^{p-1} w^*(k)E\left\{e(n)x^*(n-k)\right\}$$

$$= E\left\{\left[d(n) - \sum_{k=0}^{p-1} w(k)x(n-k)\right]d^*(n)\right\} - \sum_{k=0}^{p-1} w^*(k)E\left\{\left[d(n) - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)x(n-l)\right]x^*(n-k)\right\}$$

$$= E\left\{d(n)d^*(n)\right\} - \sum_{k=0}^{p-1} w(k)E\left\{d^*(n)x(n-k)\right\} -$$

$$-\sum_{k=0}^{p-1} w^*(k)\left[E\left\{d(n)x^*(n-k)\right\} - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)E\left\{x(n-l)x^*(n-k)\right\}\right]$$

$$= r_d(0) - \sum_{k=0}^{p-1} w(k)r_{dx}^*(k) - \sum_{k=0}^{p-1} w^*(k)r_{dx}(k) + \sum_{k=0}^{p-1} w^*(k)\sum_{l=0}^{p-1} w(l)r_x(k-l)$$

$$= r_d(0) - \boldsymbol{r}_{dx}^H\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{r}_{dx} + \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{w}$$

Δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $w(k)$.

FIR Φίλτρα Wiener (8/9)

- Έστω ότι το φίλτρο Wiener έχει δύο συντελεστές. Επίσης, $d(n)$ και $x(n)$ είναι από κοινού WSS στοχαστικές διαδικασίες με πραγματικές τιμές, όπου $r_x(0) = 1, r_x(1) = 0, r_d(0) = 24.4,$ $r_{dx}(0) = 2$ και $r_{dx}(1) = 4.5.$

$$\xi(\boldsymbol{w}) = r_d(0) - 2\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{r}_{dx} + \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w}$$

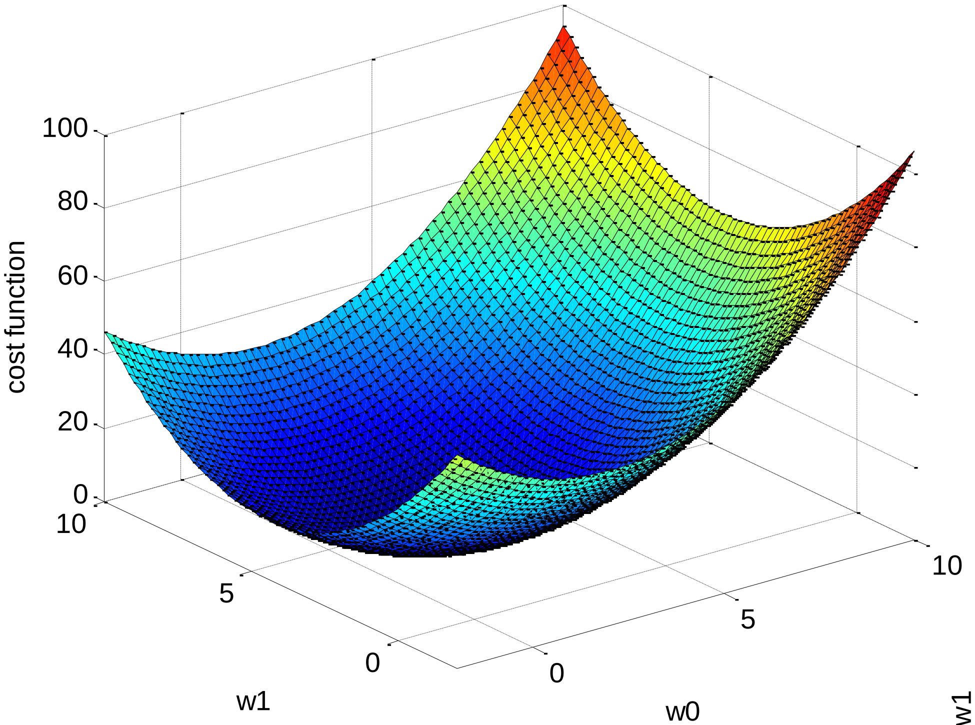
$$= r_d(0) - 2\begin{bmatrix} w(0) & w(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(0) & w(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix}$$

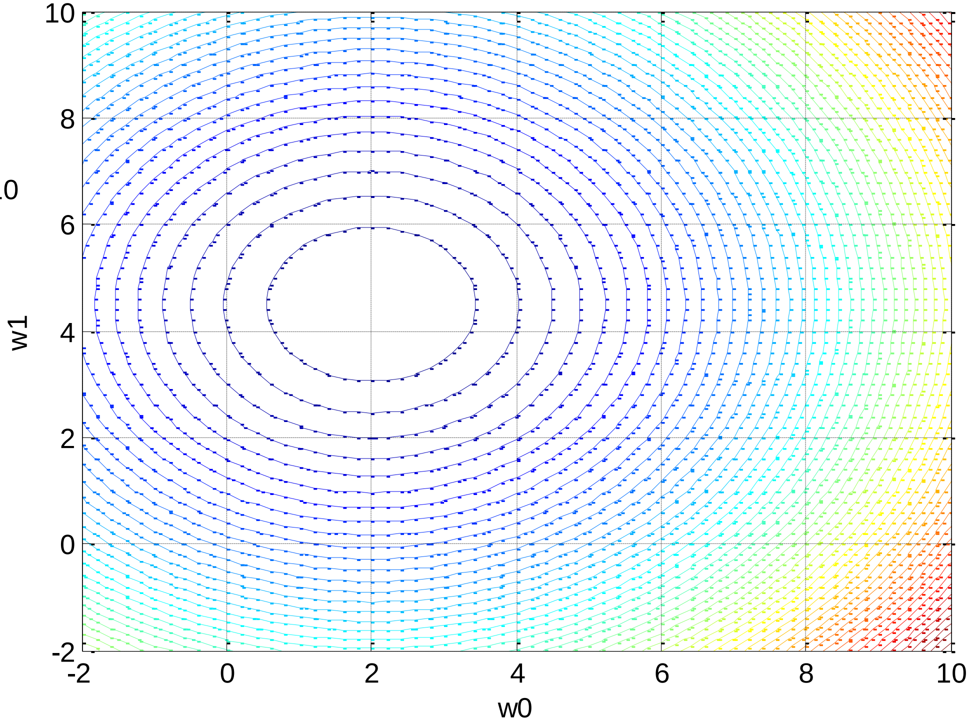
$$= 24.4 - 2\begin{bmatrix} w(0) & w(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(0) & w(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix}$$

$$= 24.4 - 4w(0) - 9w(1) + w^2(0) + w^2(1)$$

$$\boldsymbol{w}_{opt} = \boldsymbol{R}_x^{-1} \boldsymbol{r}_{dx} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{opt}(0) \\ w_{opt}(1) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \xi(\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}) = 0.15$$

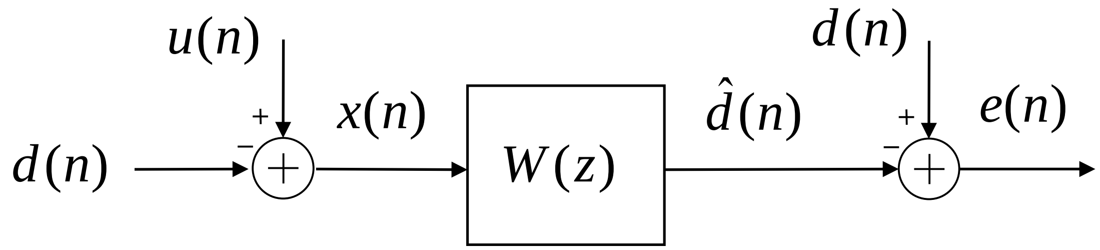
FIR Φίλτρα Wiener (9/9)





Εφαρμογές βέλτιστου φίλτρου Wiener

Φιτράρισμα θορύβου (1/3)



- Θεωρούμε ότι ο θόρυβος $u(n)$ έχει μηδενική μέση τιμή, διασπορά σ_u^2 και είναι ασυσχέτιστος με το σήμα $d(n)$. Συνεπώς:

$$r_x(k) = E\left\{x(n)x^*(n-k)\right\} = E\left\{[d(n)+u(n)][d^*(n-k)+u^*(n-k)]\right\}$$

$$= E\left\{d(n)d^*(n-k)\right\} + E\left\{d(n)u^*(n-k)\right\} + E\left\{u(n)d^*(n-k)\right\} + E\left\{u(n)u^*(n-k)\right\}$$

$$= r_d(k) + \underbrace{r_{du}(k)}_{0} + \underbrace{r_{du}^*(k)}_{0} + r_u(k) = r_d(k) + r_u(k)$$

$$r_{dx}(k) = E\left\{d(n)x^*(n-k)\right\} = E\left\{d(n)[d^*(n-k)+u^*(n-k)]\right\}$$

$$= E\left\{d(n)d^*(n-k)\right\} + E\left\{d(n)u^*(n-k)\right\} = r_d(k) + \underbrace{r_{du}(k)}_{0} = r_d(k)$$

Φιτράρισμα θορύβου (2/3)

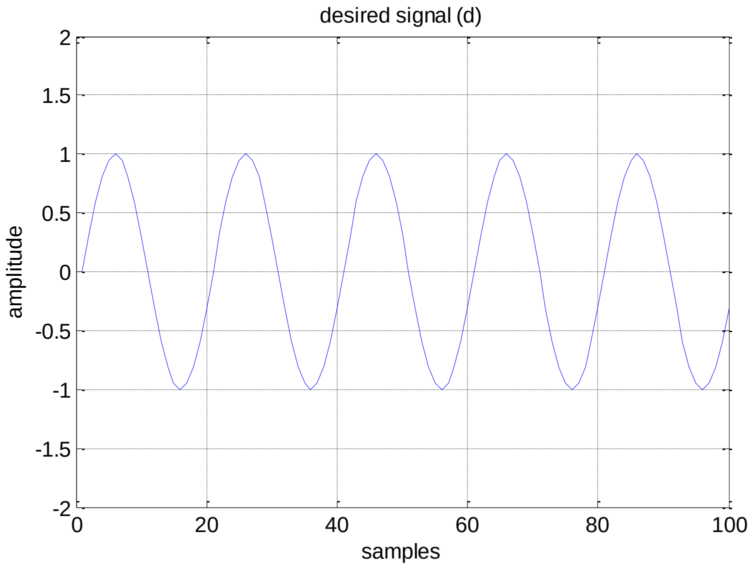
- Άρα, οι εξισώσεις Wiener-Hopf γράφονται:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \cdots & r_x^*(p-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x^*(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \vdots \\ w(p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \\ \vdots \\ r_{dx}(p-1) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

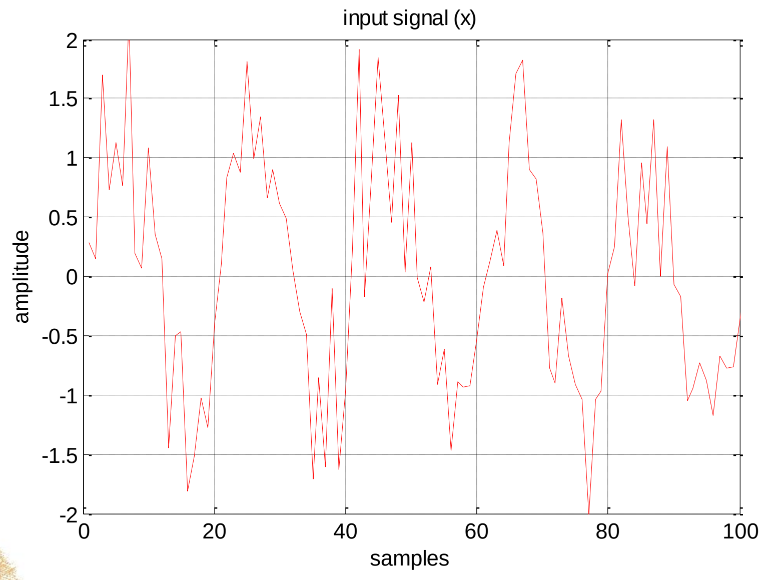
$$\left(\begin{bmatrix} r_d(0) & \cdots & r_d^*(p-1) \\ r_d(1) & \cdots & r_d^*(p-2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_d(p-1) & \cdots & r_d(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_u(0) & \cdots & r_u^*(p-1) \\ r_u(1) & \cdots & r_u^*(p-2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_u(p-1) & \cdots & r_u(0) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \vdots \\ w(p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d(0) \\ r_d(1) \\ \vdots \\ r_d(p-1) \end{bmatrix}$$

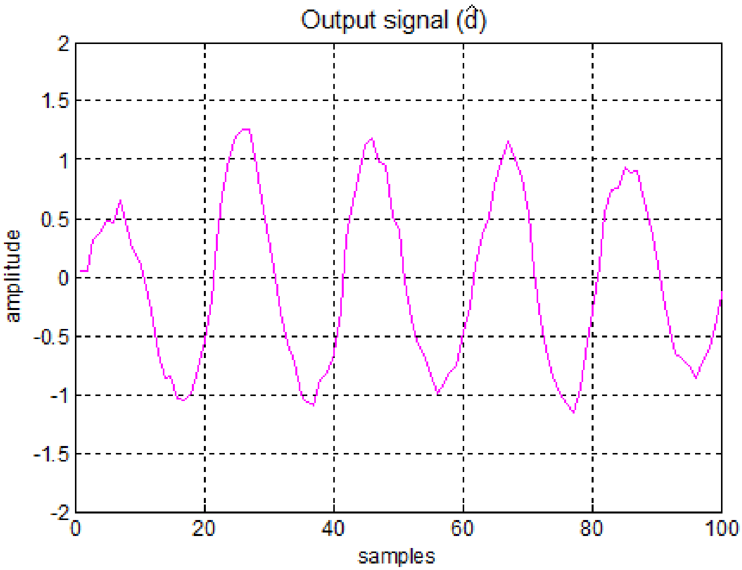
$$\Rightarrow \quad \left(\boldsymbol{R}_d + \boldsymbol{R}_u \right) \boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}_d$$

Φιτράρισμα θορύβου (3/3)



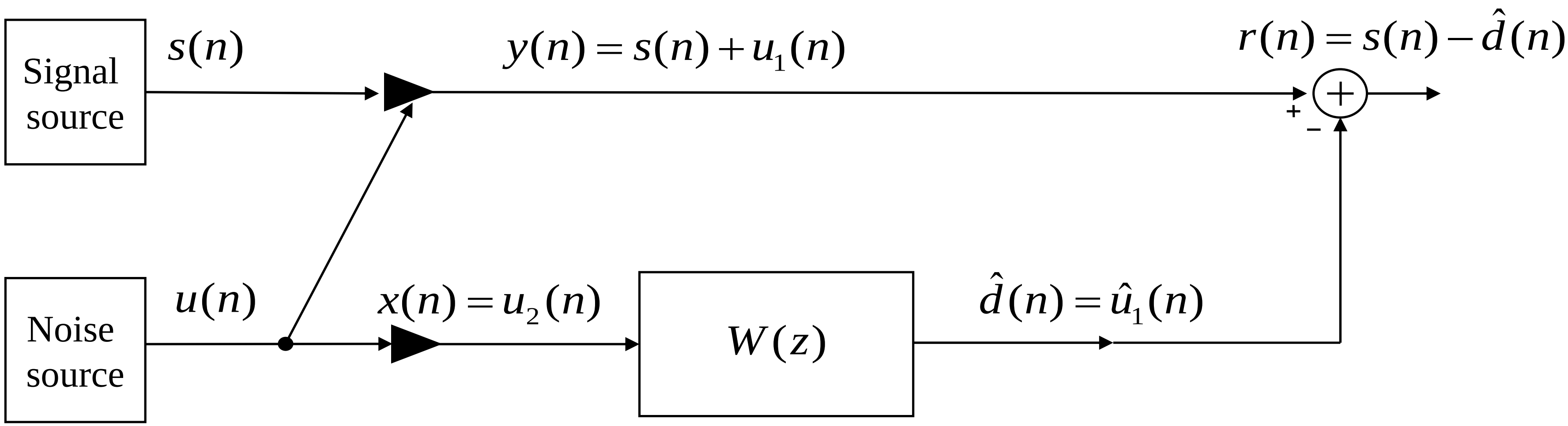

```
N=512;              % number of samples
f=10^3;             % frequency (kHz)
Fs=2*10^4;          % sampling frequency
t=(0:N-1)/Fs;       % timing vector
d=sin(2*pi*f*t);    % desired signal
u=0.5*randn(1,N);   % additive noise
x=d+u;              % input signal
p=12;               % size of Wiener FIR
```





Ακύρωση θορύβου (1/3)

- Θεωρούμε ότι ο θόρυβος $u(n)$ είναι διαδικασία WSS με μηδενική μέση τιμή και είναι ασυσχέτιστος με το σήμα $s(n)$.

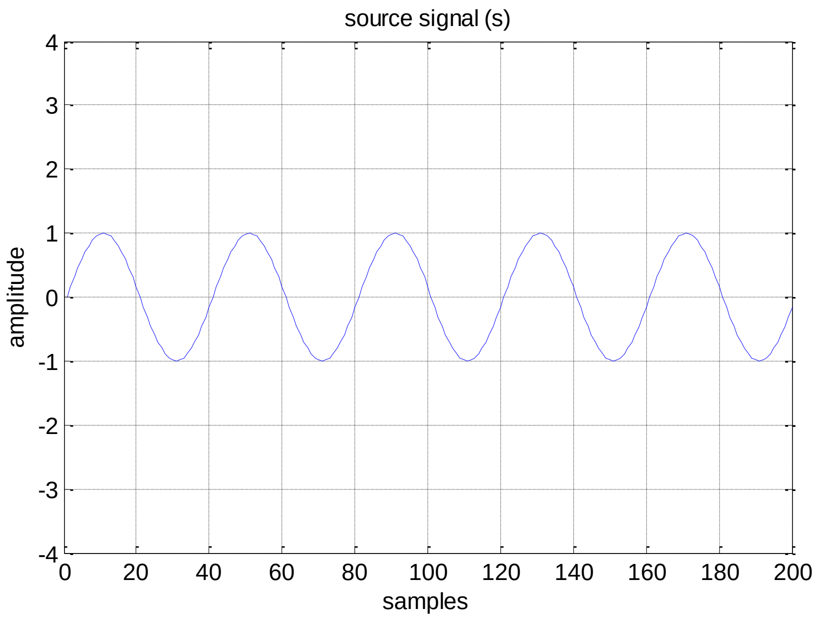


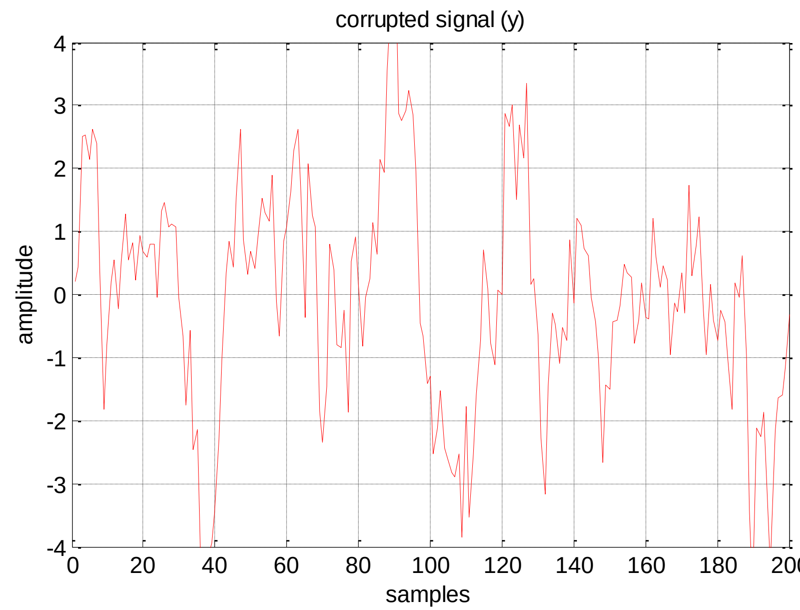
$$\boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}_{dx} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}_{u_2} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}_{u_1 u_2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}_{u_2} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}_{y u_2}$$

$$r_{u_1 u_2}(k) = E\left\{u_1(n) u_2^*(n-k)\right\} = E\left\{[y(n) - s(n)] u_2^*(n-k)\right\}$$

$$= E\left\{y(n) u_2^*(n-k)\right\} - \cancel{E\left\{s(n) u_2^*(n-k)\right\}} = r_{y u_2}(k)$$

Ακύρωση θορύβου (2/3)





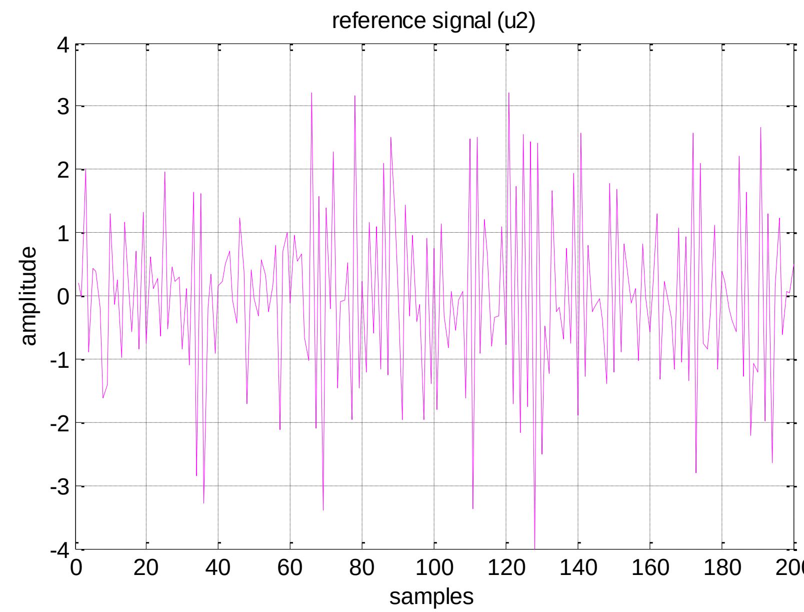
$$s(n) = \sin(2\pi \cdot 0.025 \cdot n)$$

$$u(n) : \mathrm{N}\ (0,1)$$

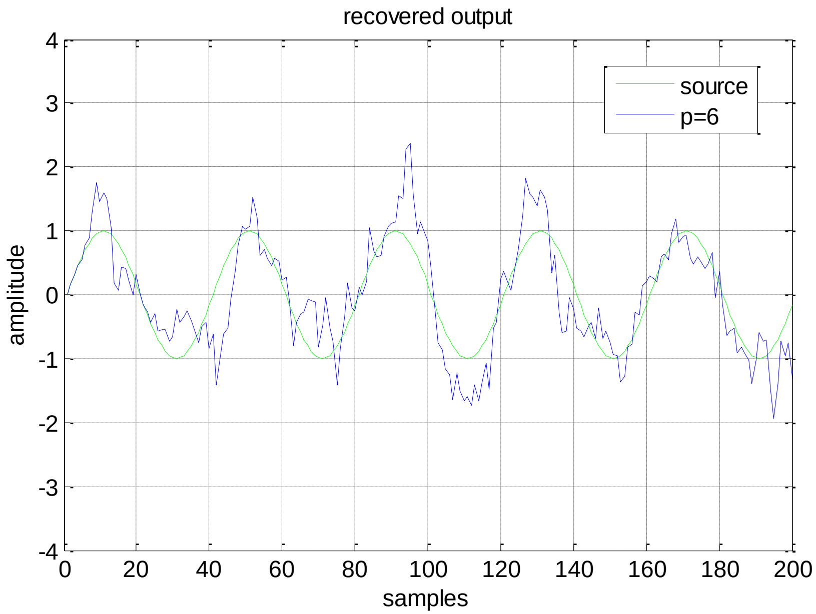
$$u_1(n) = 0.8u_1(n-1) + u(n)$$

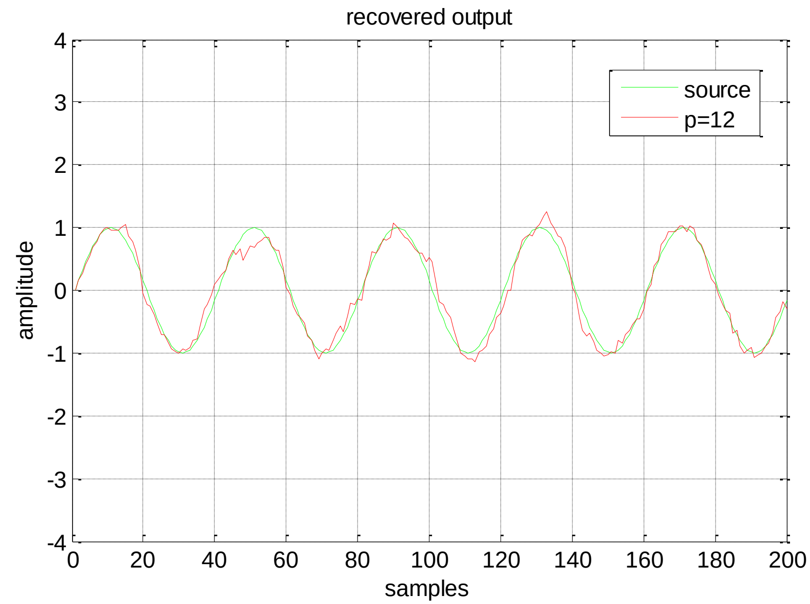
$$u_2(n) = -0.6u_2(n-1) + u(n)$$

Τα σήματα θορύβου εδώ θεωρούνται διαδικασίες AR(1)



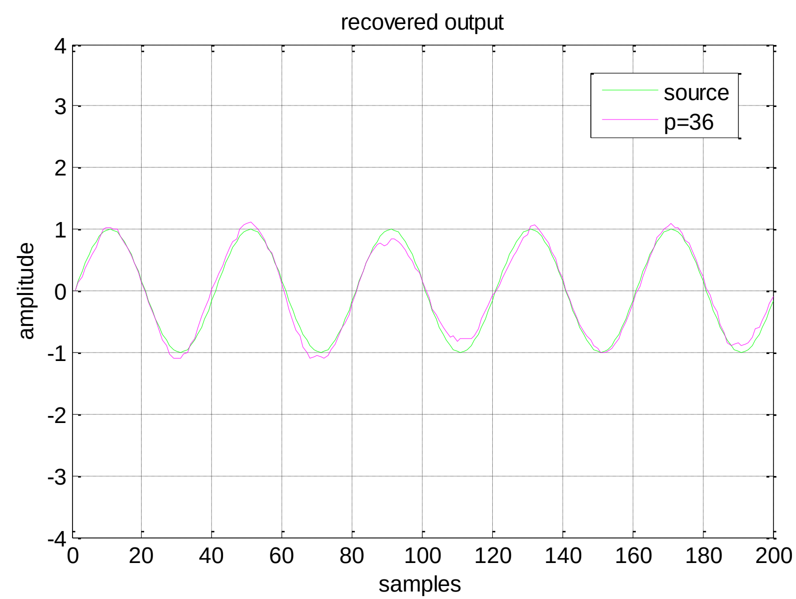
Ακύρωση θορύβου (3/3)





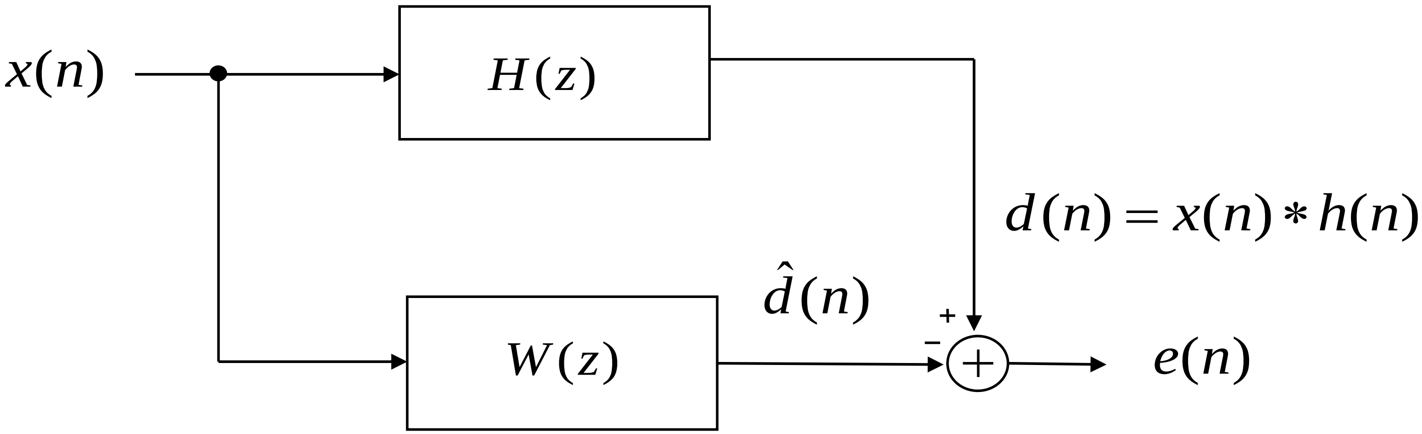
$$\hat{r}_{u_2}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_2(n)u_2(n-k)$$

$$\hat{r}_{yu_2}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)u_2(n-k)$$



Αναγνώριση συστήματος (1/2)

- Θεωρούμε ότι το άγνωστο σύστημα $H(z)$ είναι ένα FIR φίλτρο 2ης τάξης, όπου $h(0) = 0.9$, $h(1) = 0.6$ και $h(2) = 0.2$. Επιπλέον, η είσοδος $x(n)$ είναι τυχαία διαδικασία λευκού θορύβου με μοναδιαία διασπορά. Να υπολογιστεί το φίλτρο Wiener 2ης τάξης.



- Ισχύει:

$$r_x(k) = \sigma_x^2(k)\delta(k) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αναγνώριση συστήματος (2/2)

- Επίσης:

$$r_{dx}(k) = E\{d(n)x(n-k)\} = E\left\{\left[\sum_{l=0}^{2} h(l)x(n-l)\right]x(n-k)\right\}$$

$$= \sum_{l=0}^{2} h(l)E\{x(n-l)x(n-k)\} = \sum_{l=0}^{2} h(l)r_x(k-l) = h(k) \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{r}_{dx} = [r_{dx}(0) \;\; r_{dx}(1) \;\; r_{dx}(2)]^T = [h(0) \;\; h(1) \;\; h(2)]^T = \boldsymbol{h}$$

$$r_d(0) = E\{d^2(n)\} = E\left\{\left[\sum_{k=0}^{2} h(k)x(n-k)\right]\left[\sum_{l=0}^{2} h(l)x(n-l)\right]\right\}$$

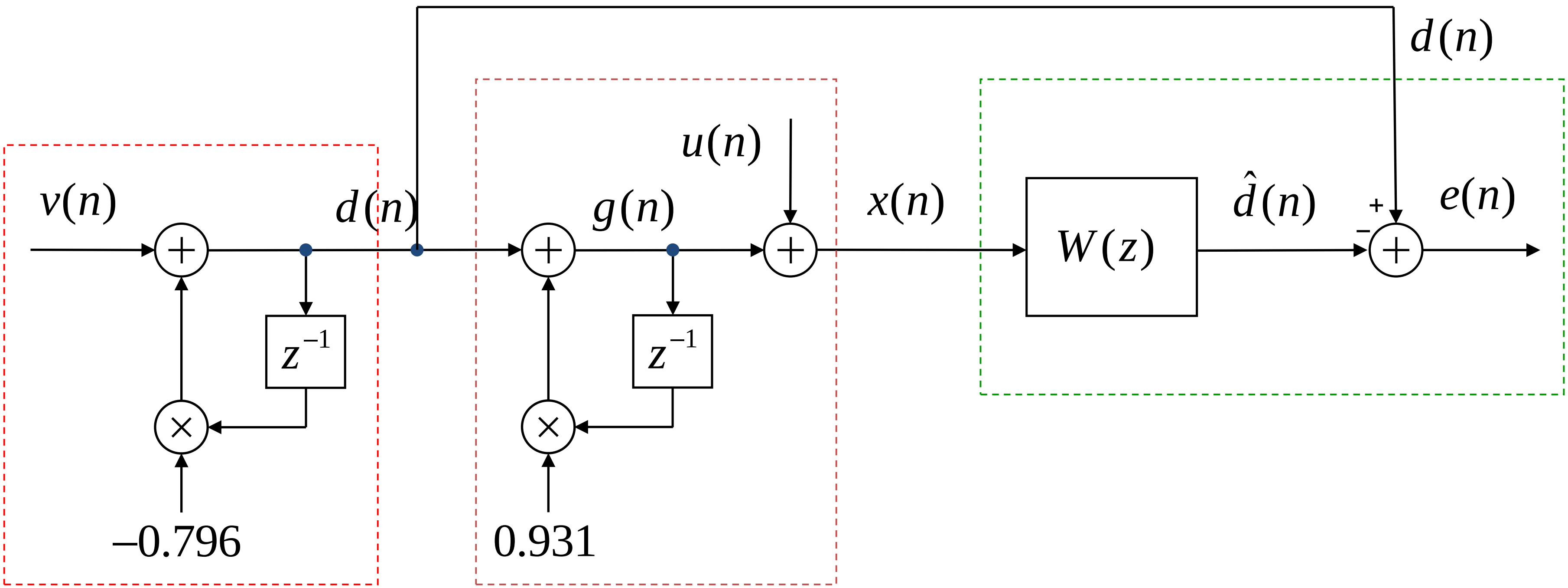
$$= \sum_{k=0}^{2} h(k)\sum_{l=0}^{2} h(l)E\{x(n-l)x(n-k)\} = \sum_{k=0}^{2} h(k)\sum_{l=0}^{2} h(l)r_x(k-l) = \sum_{k=0}^{2} h^2(k)$$

- Άρα:

$$\xi_{\min} = r_d(0) - \boldsymbol{r}_{dx}^T \boldsymbol{R}_x^{-1} \boldsymbol{r}_{dx} \Longrightarrow \xi_{\min} = \sum_{k=0}^{2} h^2(k) - \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{h} = 0$$

Φιλτράρισμα θορύβου (1/9)

- Να υπολογιστεί το FIR φίλτρο Wiener πρώτης τάξης για το σύστημα του σχήματος, όπου $v(n)$ και $u(n)$ ασυσχέτιστες διαδικασίες λευκού θορύβου με $\sigma_v^2 = 0.31$ και $\sigma_u^2 = 0.12$.



Φιλτράρισμα θορύβου (2/9)

- Το σήμα αναφοράς $d(n)$ γράφεται:

$$d(n) = -0.796d(n-1) + v(n) \quad (\alpha)$$

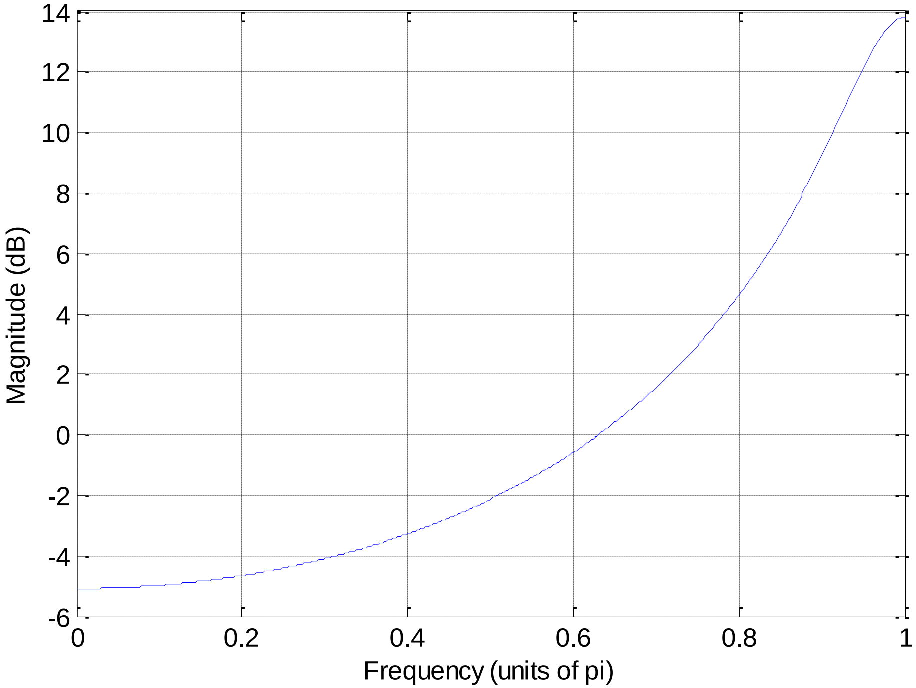
- Πρόκειται για διαδικασία AR(1) με φάσμα:

$$P_d(e^{j\omega}) = \sigma_v^2 \frac{1}{|1 + 0.796e^{-j\omega}|^2}$$

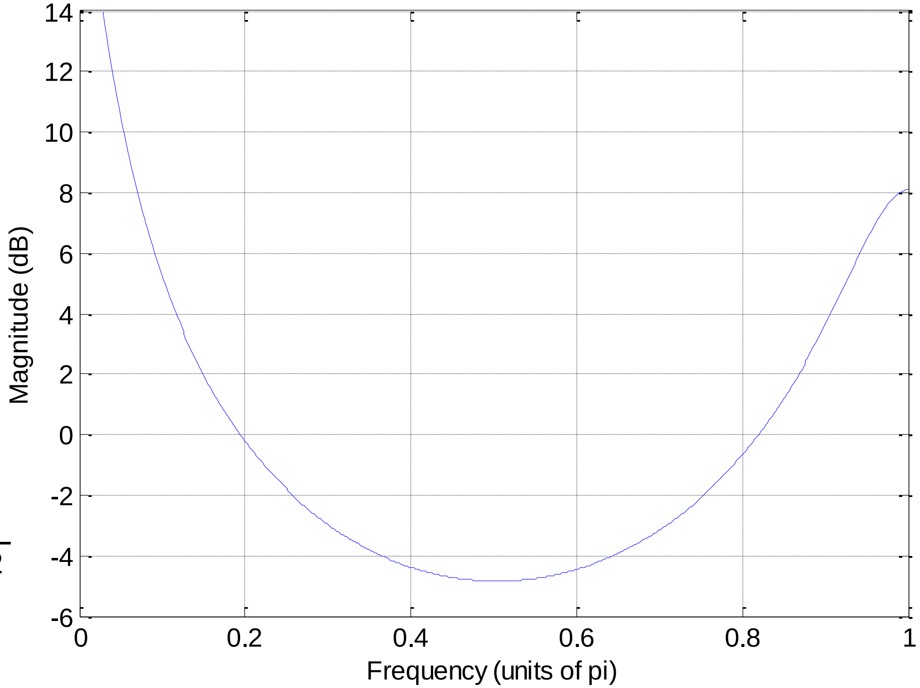
- Το σήμα εισόδου $x(n)$ γράφεται ως $x(n) = g(n) + u(n)$, όπου $g(n) = 0.931g(n-1) + d(n) \quad (\beta)$
- Από (α) και (β) προκύπτει: $d(n) = -0.796d(n-1) + v(n) \Rightarrow$ $[g(n) - 0.931g(n-1)] = -0.796[g(n-1) - 0.931g(n-2) + v(n) \Rightarrow$ $g(n) - 0.135g(n-1) - 0.741g(n-2) = v(n)$
- Πρόκειται για διαδικασία AR(2) με φάσμα:

$$P_d(e^{j\omega}) = \sigma_v^2 \frac{1}{\left|1 - 0.135e^{-j\omega} - 0.741e^{-2j\omega}\right|^2}$$

Φιλτράρισμα θορύβου (3/9)



$$P_d(e^{j\omega}) = \sigma_v^2 \frac{1}{\left|1+0.796e^{-j\omega}\right|^2}$$



$$P_g(e^{j\omega}) = \sigma_v^2 \frac{1}{\left|1-0.135e^{-j\omega}-0.7411e^{-2j\omega}\right|^2}$$

Φιλτράρισμα θορύβου (4/9)

- Οι εξισώσεις Wiener-Hopf γράφονται:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \end{bmatrix}$$

- Η αυτοσυσχέτιση $r_x(k)$ υπολογίζεται ως εξής :

$$r_x(k) = E\{x(n)x(n-k)\} = E\{[g(n)+u(n)][g(n-k)+u(n-k)]\}$$

$$= E\{g(n)g(n-k)\} + E\{g(n)u(n-k)\} + E\{u(n)g(n-k)\} + E\{u(n)u(n-k)\}$$

$$= r_g(k) + \cancel{r_{gu}(k)} + \cancel{r_{gu}(-k)} + r_u(k) = r_g(k) + r_u(k)$$

- όπου: $r_u(k) = \sigma_u^2 \delta(k) \Rightarrow r_u(0) = 0.12$ και $r_u(1) = 0$

Φιλτράρισμα θορύβου (5/9)

- Η διαδικασία g(n) είναι AR(2): $P_d(e^{j\omega}) = \sigma_v^2 \frac{1}{\left|1-0.135e^{-j\omega}-0.741e^{-2j\omega}\right|^2}$
- Άρα, οι εξισώσεις Yule-Walker γράφονται:

$$\begin{bmatrix} r_g(0) & r_g(1) \\ r_g(1) & r_g(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.135 \\ -0.7411 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_g(1) \\ r_g(2) \end{bmatrix}$$

- Και: $\sigma_v^2 = r_g(0) - 0.135 r_g(1) - 0.741 r_g(2)$
- Άρα:

$$\left.\begin{aligned} -0.135 r_g(0) + 0.259 r_g(1) &= 0 \\ -0.741 r_g(0) - 0.135 r_g(1) + r_g(2) &= 0 \\ r_g(0) - 0.135 r_g(1) - 0.741 r_g(2) &= 0.31 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} r_g(0) &= 0.944 \\ r_g(1) &= 0.492 \\ r_g(2) &= 0.766 \end{aligned}$$

Φιλτράρισμα θορύβου (6/9)

- Η ετεροσυσχέτιση $r_{dx}(k)$ υπολογίζεται ως εξής :

$$r_{dx}(k) = E\{d(n)x(n-k)\} = E\{d(n)[g(n-k)+u(n-k)]\}$$

$$= E\{d(n)g(n-k)\} + \cancel{E\{d(n)u(n-k)\}}$$

$$= E\{[g(n)-0.931g(n-1)]g(n-k)\}$$

$$= E\{g(n)g(n-k)\} - 0.931E\{g(n-1)g(n-k)\}$$

$$= r_g(k) - 0.931r_g(k-1)$$

- Άρα:

$$r_{dx}(0) = r_g(0) - 0.931r_g(-1) = 0.486$$

$$r_{dx}(1) = r_g(1) - 0.931r_g(0) = -0.387$$

Φιλτράρισμα θορύβου (7/9)

- Τελικά, από τις εξισώσεις Wiener-Hopf:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} r_g(0) & r_g(1) \\ r_g(1) & r_g(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) \\ r_u(1) & r_u(0) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0.944 & 0.492 \\ 0.492 & 0.944 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.12 & 0 \\ 0 & 0.12 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.486 \\ -0.387 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.795 \\ -0.731 \end{bmatrix}$$

- Το ελάχιστο σφάλμα είναι: $\xi_{min} = r_d(0) - w(0)r_{dx}(0) - w(1)r_{dx}(1)$

Φιλτράρισμα θορύβου (8/9)

- Η διαδικασία $d(n)$ είναι AR(1): $P_d\left(e^{j\omega}\right) = \sigma_v^2 \frac{1}{\left|1+0.796e^{-j\omega}\right|^2}$
- Άρα, οι εξισώσεις Yule-Walker γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} 0.796 r_d(0) &= -r_d(1) \\ \sigma_v^2 &= r_d(0) + 0.796 r_d(1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad r_d(0) = 0.846$$

- Τελικά:

$$\xi_{\min} = 0.177$$

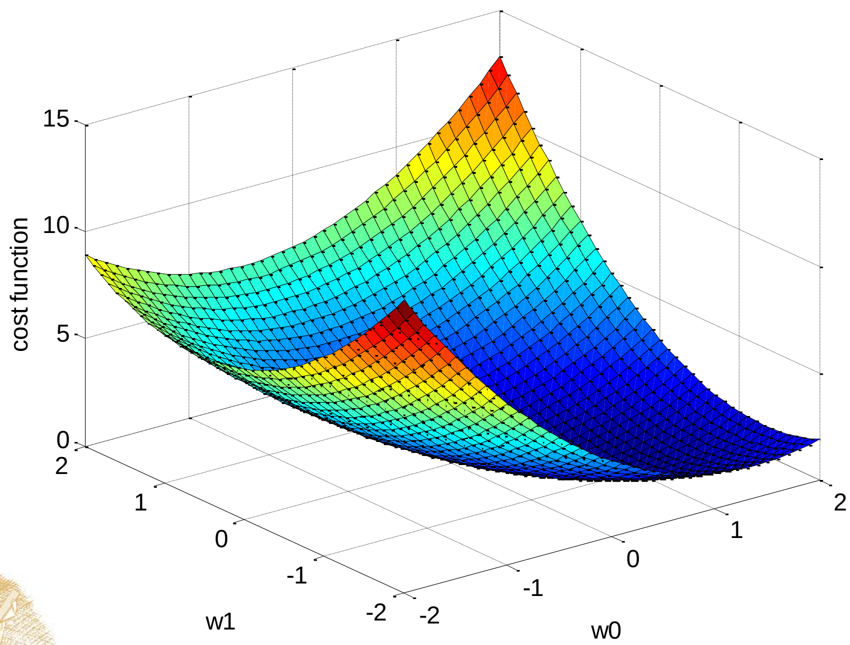
Φιλτράρισμα θορύβου (9/9)

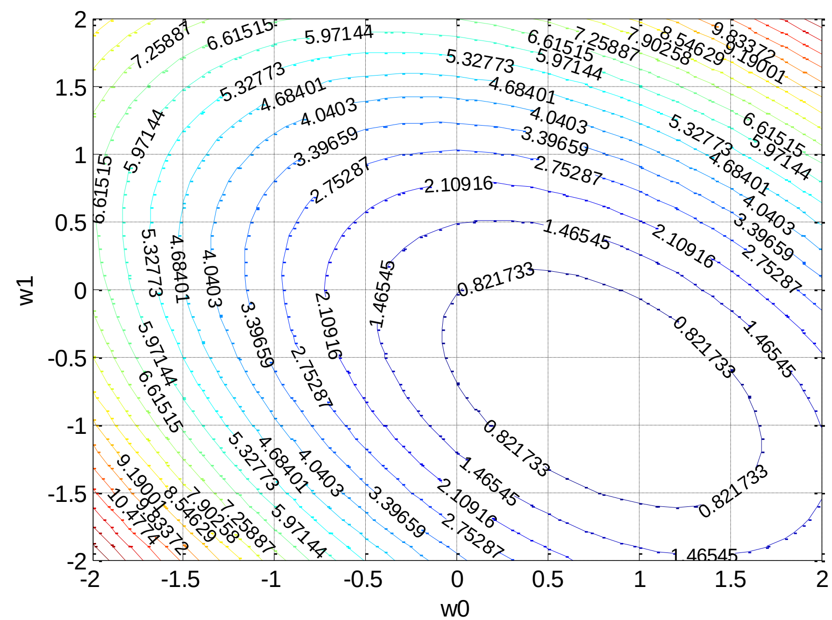
- Η συνάρτηση κόστους είναι:

$$\xi(\boldsymbol{w}) = r_d(0) - 2\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{r}_{dx} + \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w}$$

$$= r_d(0) - 2\begin{bmatrix} w(0) & w(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.486 \\ -0.387 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(0) & w(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.064 & 0.492 \\ 0.492 & 1.064 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix}$$

$$= 0.846 - 0.972w(0) + 0.773w(1) + 1.064w^2(0) + 1.064w^2(1) + 0.985w(0)w(1)$$





Τέλος Ενότητας 4

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κώστας Μπερμπερίδης. «Στοχαστικά Σήματα και Τηλεπικοιωνίες». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1111/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.