Στοχαστικά Σήματα και Τηλεπικοινωνιές

Ενότητα 2: Ανασκόπηση Στοιχείων Γραμμικής Άλγεβρας

Καθηγητής Κώστας Μπερμπερίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Σκοποί ενότητας

- Παρουσίαση/υπενθύμιση βασικών εννοιών από την θεωρία Γραμμικής Άλγεβρας που απαιτούνται ως σχετικό υπόβαθρο στις υπόλοιπες ενότητες του μαθήματος.

Περιεχόμενα ενότητας

- Έννοιες διανυσμάτων
  - Ορισμοί (βασικοί, νόρμες, εσωτερικό γινόμενο, γεωμετρική σχέση
  - Σήματα και συστήματα
  - Διανυσματικοί χώροι
- Έννοιες πινάκων
  - Ορισμοί (βασικοί, τάξη, αντίστροφος)
  - Ειδικοί πίνακες
  - Τετραγωνική μορφή πίνακα
- Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα
  - Εισαγωγικές έννοιες
  - Ιδιότητες

Διανύσματα

Διανύσματα – Βασικοί Ορισμοί

- Ορίζουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ με N στοιχεία x_i ως τον πίνακα στήλη N θέσεων:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

Ο αριθμός N ορίζει την διάσταση του διανύσματος

- Ο ανάστροφος (transpose) $\boldsymbol{x}^T$ του διανύσματος $\boldsymbol{x}$ είναι ο πίνακας γραμμή N θέσεων με στοιχεία:

$$\boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}$$

- Ο ερμιτιανός ανάστροφος (hermitian transpose) $\boldsymbol{x}^H$ είναι ο συζυγής μιγαδικός ανάστροφος με στοιχεία:

$$\boldsymbol{x}^H = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & \dots & x_N^* \end{bmatrix}$$

Διανύσματα – Νόρμες και Απόσταση

- Για ένα διάνυσμα $\boldsymbol{x}$, N-διαστάσεων, ορίζουμε τις νόρμες

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \qquad \text{νόρμα } L_1$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2} \qquad \text{νόρμα } L_2 \text{ ή Ευκλείδεια νόρμα}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \qquad \text{νόρμα } L_\infty$$

Η L_2 στην συνέχεια θα συμβολίζεται απλά ως $\| \quad \|$

- Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διανύσματα $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ ορίζεται ως:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^2}$$

Διανύσματα – Εσωτερικό Γινόμενο

- Το εσωτερικό_γινόμενο δυο διανυσμάτων $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ ορίζεται ως:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^* \cdot y_i$$

$$\Downarrow$$

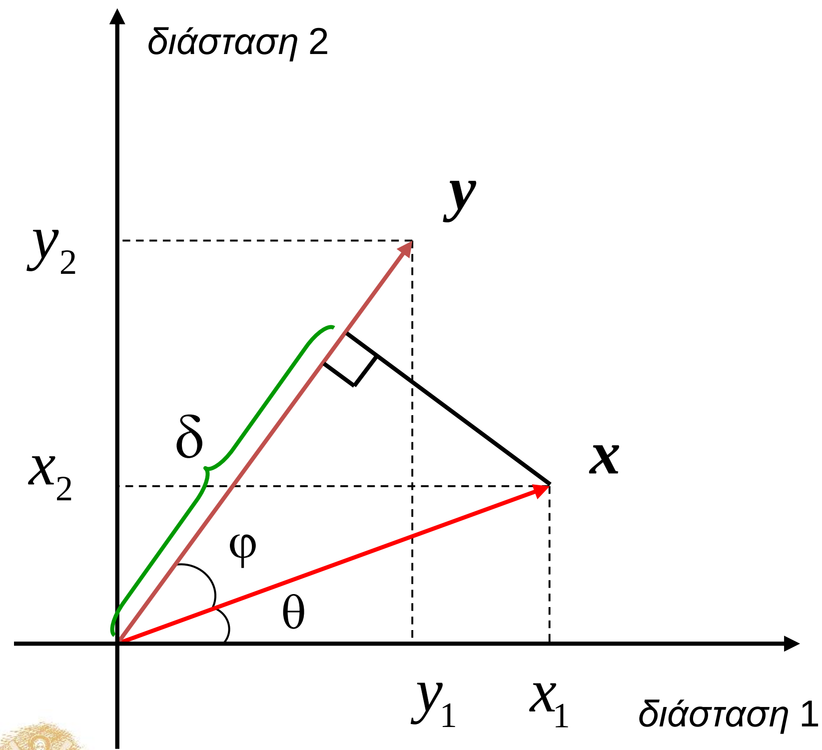
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & \dots & x_N^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^H \cdot \boldsymbol{y}$$

- Το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος
- Το εσωτερικό γινόμενο εκφράζει τη γεωμετρική σχέση των δυο διανυσμάτων

Διανύσματα – Γεωμετρική Σχέση (1/2)

Παράδειγμα σε 2 διαστάσεις

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$



- Μέτρο διανυσμάτων

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

- Συνιστώσες διανυσμάτων

$$x_1 = \cos(\theta)\|\boldsymbol{x}\| \qquad y_1 = \cos(\theta + \phi)\|\boldsymbol{y}\|$$

$$x_2 = \sin(\theta)\|\boldsymbol{x}\| \qquad y_2 = \sin(\theta + \phi)\|\boldsymbol{y}\|$$

- Αποδεικνύεται ότι:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos(\phi)$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \delta \|\boldsymbol{y}\| \Rightarrow \delta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{y}\|}$$

Προβολή του ***x*** στο ***y***

- Για κάθετα διανύσματα $(\varphi = \pi/2)$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$$

Διανύσματα – Γεωμετρική Σχέση (2/2)

- Όταν $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ τα δύο διανύσματα ονομάζονται ορθογώνια.
- Όταν επιπλέον ισχύει $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$ τα δύο διανύσματα ονομάζονται ορθοκανονικά.
- Επειδή $|\cos(\varphi)| \leq 1$, προκύπτει η ανισότητα_Cauchy-Schwartz:
  - Η ισότητα ισχύει όταν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, δηλαδή όταν $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y}$, όπου c είναι σταθερά.

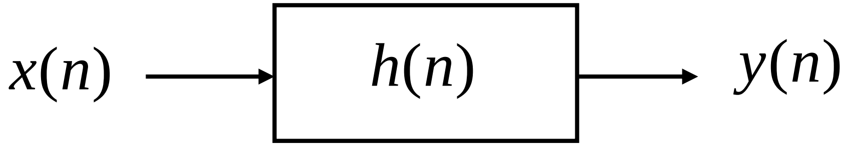
$$\left|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle\right| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

- Επιπλέον ισχύει η ιδιότητα:

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 2\left|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle\right|$$

Διανύσματα – Σήματα και Συστήματα (1/2)

- Θεωρούμε ένα σύστημα FIR με κρουστική απόκριση $h(n)$ μήκους N



- Ορίζουμε το διάνυσμα με συντελεστές της κρουστικής απόκρισης

$$\boldsymbol{h} = [h(0) \quad h(1) \quad \cdots \quad h(N-1)]^T$$

- Ορίζουμε το διάνυσμα με τα N πιο πρόσφατα δείγματα εισόδου

$$\boldsymbol{x}(n) = [x(n) \quad x(n-1) \quad \cdots \quad x(n-N+1)]^T$$

- Η έξοδος $y(n)$ (μέσω γραμμικής συνέλιξης) γράφεται:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

$$= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \ldots + h(N-1)x(n-N+1)$$

$$\Rightarrow \quad y(n) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{x}(n)$$

Διανύσματα – Σήματα και Συστήματα (2/2)

- Θεωρούμε ένα σήμα x(t) καθώς και N μετρήσεις (δείγματά) του

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{ADC}} \longrightarrow x(n)$$

- Ορίζουμε ένα διάνυσμα με τα N δείγματα ως στοιχεία

$$\boldsymbol{x} = [x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{\mathrm{N}}]^T$$

- Το τετράγωνο της νόρμας L_2 του $\boldsymbol{x}$ εκφράζει την ενέργεια του σήματος:

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{N-1}^2 = \mathrm{E}_x$$

- Άρα, όταν $||\boldsymbol{x}|| = 1$, σημαίνει ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ έχει μοναδιαία ενέργεια.

Διανυσματικοί χώροι (1/2)

- Τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_N$ (διάστασης N) είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν η παρακάτω ισότητα ισχύει μόνο για $a_i \neq 0$, για κάθε $i = 1,2,\dots,N$:

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + a_N\boldsymbol{x}_N = \sum_{i=1}^{N} a_i\boldsymbol{x}_i = 0$$

- Αν, ωστόσο, υπάρχουν $a_i \neq 0$, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα, π.χ. το $\boldsymbol{x}_i$, που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων:

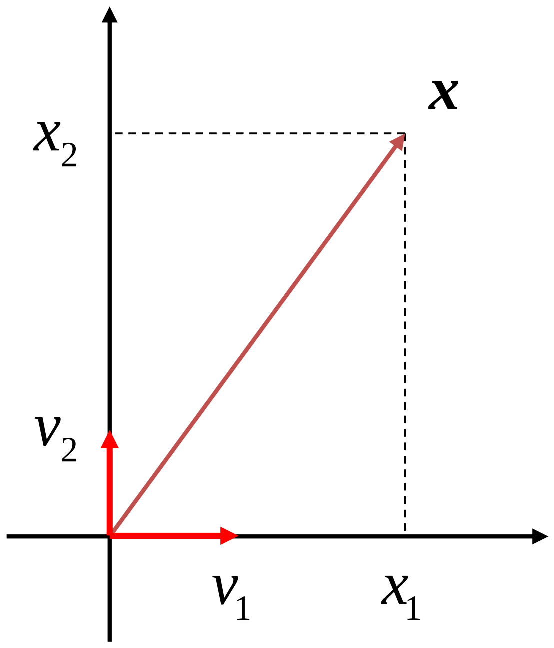
$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_j\boldsymbol{x}_j$$

- Ο διανυσματικός χώρος V είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων, τα οποία προκύπτουν από το γραμμικό συνδυασμό των $\boldsymbol{x}_i$:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} c_i\boldsymbol{x}_i, \qquad \boldsymbol{v} \in V$$

Διανυσματικοί χώροι (2/2)

- Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε ονομάζονται βάση του διανυσματικού χώρου.



Παράδειγμα:

- Έστω το σύνολο των διανυσμάτων 2 διαστάσεων με πραγματικές τιμές

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T, \mathrm{x_i} \in R$$

- Το σύνολο ορίζει τον διανυσματικό χώρο R^2 (επίπεδο) με βάση:

$$\boldsymbol{v}_1 = [1 \quad 0]^T, \boldsymbol{v}_2 = [0 \quad 1]^T$$

- Γράφονται ως $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{2} x_i \boldsymbol{v}_i$

Πίνακες

Πίνακες – Βασικοί Ορισμοί (1/2)

- Ορίζουμε τον πίνακα $\boldsymbol{A}$ με στοιχεία $\alpha_{i,j}$, ο οποίος έχει n γραμμές και m στήλες:

$$\boldsymbol{A} = \{a_{i,j}\} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

- Αν $n = m$, ο πίνακας ονομάζεται τετραγωνικός
- Ο ανάστροφος_πίνακας $\boldsymbol{A}^T$ έχει ως γραμμές τις στήλες και ως στήλες τις γραμμές του πίνακα $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^T = \{a_{j,i}\} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Πίνακες – Βασικοί Ορισμοί (2/2)

- Ο $\boldsymbol{A}$ ονομάζεται συμμετρικός_πίνακας αν είναι τετραγωνικός και ισχύει $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$. Για παράδειγμα:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

- Ο ερμητιανός_ανάστροφος $\boldsymbol{A}^H$ είναι ο συζηγής ανάστροφος του $\boldsymbol{A}$, δηλαδή, $\boldsymbol{A}^H = (\boldsymbol{A}^*)^T = (\boldsymbol{A}^T)^*$, ενώ ισχύουν:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^H = \boldsymbol{A}^H + \boldsymbol{B}^H, \quad (\boldsymbol{A}^H)^H = \boldsymbol{A}, \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^H = \boldsymbol{B}^H \boldsymbol{A}^H$$

- Ο $\boldsymbol{A}$ ονομάζεται ερμητιανός όταν είναι τετραγωγικός και $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$

- Ονομάζουμε ίχνος (trace) ενός τετραγωνικού πίνακα το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή $tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{N} a_{i,i}$

Πίνακες – Η έννοια της τάξης (1/2)

- Θεωρούμε τον πίνακα $\boldsymbol{A}$, διαστάσεων $(n \times m)$, τον οποίο γράφουμε με τη βοήθεια διανυσμάτων στήλης, ως:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{c}_m] \text{ όπου } \boldsymbol{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$$

- Η τάξη (rank) $\rho(\boldsymbol{A})$ του πίνακα $\boldsymbol{A}$ ισούται με τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα ή αλλιώς τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\boldsymbol{c}_i$.
- Ισχύουν οι ιδιότητες *(i)* $\rho(\boldsymbol{A}) = \rho(\boldsymbol{A}^H)$ και *(ii)* $\rho(\boldsymbol{A}) \leq min(n, m)$
- Αν $\rho(\boldsymbol{A}) = min(n, m)$, ο $\boldsymbol{A}$ ονομάζεται μέγιστης τάξης (full rank)

Πίνακες – Η έννοια της τάξης (2/2)

- Στη συνέχεια, γράφουμε τον πίνακα $\boldsymbol{A}$ με τη βοήθεια διανυσμάτων γραμμής και, αντίστοιχα, τον $\boldsymbol{A}^H$ με διανύσματα στηλών:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1^H \\ \boldsymbol{r}_2^H \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n^H \end{bmatrix}, \text{ όπου } \boldsymbol{r}_j^H = \begin{bmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,m} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^H = \begin{bmatrix} a_{1,1}^* & a_{2,1}^* & \cdots & a_{n,1}^* \\ a_{1,2}^* & a_{2,2}^* & \cdots & a_{n,1}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m}^* & a_{2,m}^* & \cdots & a_{n,m}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \cdots & \boldsymbol{r}_n \end{bmatrix}$$

- Μέσω ορισμού, η τάξη $\rho(\boldsymbol{A}^H)$ ισούται με τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\boldsymbol{r}_i$. Μέσω ιδιότητας, $\rho(\boldsymbol{A}) = \rho(\boldsymbol{A}^H)$. Οπότε, η τάξη $\rho(\boldsymbol{A})$ ισούται με τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών (ορισμός) αλλά και γραμμών του $\boldsymbol{A}$.

Αντίστροφος Πίνακας

- Αν ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι τετραγωνικός και μέγιστης τάξης τότε ορίζεται ο αντίστροφός του $\boldsymbol{A}^{-1}$ ως:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- Ο πίνακας $\boldsymbol{A}$, στην περίπτωση αυτή, ονομάζεται αντιστρέψιμος ή μη_ιδιάζων (non-singular)
- Ισχύουν οι εξής ιδιότητες *(i)* $(\boldsymbol{A}^{H})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{H}$, *(ii)* $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
- Αν $\rho(\boldsymbol{A}) < n$, ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι μη_αντιστρέψιμος ή ιδιάζων
- Συνθήκη_αντιστρεψιμότητας: Ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι μη μηδενική, δηλαδή, $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$
- Η ορίζουσα του πίνακα $\boldsymbol{A}(n \times n)$ υπολογίζεται ως:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\boldsymbol{A}_{i,j})$$

Ειδικοί Πίνακες (1/2)

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $\boldsymbol{A}$ (n x n) ονομάζεται Toeplitz, αν όλα τα στοιχεία σε κάθε διαγώνιο είναι ίσα, δηλαδή $\alpha_{i,j} = a_{i+1,j+1}$, για κάθε $i, j < n$. Για παράδειγμα:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ένας πίνακας Toeplitz ορίζεται πλήρως από τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και της πρώτης στήλης

- Αν ο πίνακας $\boldsymbol{A}(n \times n)$ είναι συμμετρικός (ή ερμιτιανός) και Toeplitz, τότε ο πίνακας περιγράφεται πλήρως από τα στοιχεία της πρώτης γραμμής ή στήλης. Για παράδειγμα:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ένας συνηθισμένος συμβολισμος για αυτή την περίπτωση είναι ο $\boldsymbol{A} = \mathrm{Toep}(1,3,5,7)$

Ειδικοί Πίνακες (2/2)

- Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $\boldsymbol{A}(n \times n)$ και η ανάλυσή του σε στήλες

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n]$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $\boldsymbol{A}(n \times n)$ με πραγματικά στοιχεία ονομάζεται ορθογώνιος (orthogonal), αν τα διανύσματα που ορίζονται από τις στήλες (και τις γραμμές) είναι ορθοκανονικά.

$$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$$

- Ομοίως, αν ο πίνακας έχει μιγαδικά στοιχεία, τότε ονομάζεται ορθομοναδιαίος (unitary), και ισχύει:

$$\boldsymbol{a}_i^H \boldsymbol{a}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^H$$

Τετραγωνική Μορφή Πίνακα (1/2)

- Θεωρούμε ένα πραγματικό και συμμετρικό πίνακα $\boldsymbol{A}(n \times n)$ και ένα πραγματικό διάνυσμα $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$
- Η τετραγωγική_μορφή (quadratic form) του πίνακα $\boldsymbol{A}$ ορίζεται ως:

$$Q_{\boldsymbol{A}}(x) = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{i,j} x_j$$

- Η παραπάνω εξίσωση είναι στην πραγματικότητα μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Το μέγεθος $Q_A(\boldsymbol{x})$ είναι βαθμωτό μέγεθος. Για παράδειγμα:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad Q_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

Τετραγωνική Μορφή Πίνακα (2/2)

- Θεωρούμε, ομοίως, ένα μιγαδικό και ερμητιανό πίνακα $\boldsymbol{A}(n \times n)$ και ένα μιγαδικό διάνυσμα $\boldsymbol{x}^H = [x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*]$
- Η ερμητιανή/τετραγωνική_μορφή του πίνακα $\boldsymbol{A}$ ορίζεται ως:

$$Q_A(x) = \boldsymbol{x}^H \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{i,j} x_j$$

- Αν $Q_A(\boldsymbol{x}) > 0$, για κάθε $\boldsymbol{x} \neq 0$, τότε ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ ονομάζεται θετικά ορισμένος (positive definite) και συμβολίζεται ως $\boldsymbol{A} \succ 0$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Ιδιοτιμές – Εισαγωγικές Έννοιες (1/2)

- Θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα $\boldsymbol{A}(n \times n)$ και σχηματίζουμε το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{c} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \ldots + a_{1,n}v_n = \lambda v_1 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \ldots + a_{2,n}v_n = \lambda v_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}v_1 + a_{n,2}v_2 + \ldots + a_{n,n}v_n = \lambda v_\nu \end{array}\right\} \qquad \boldsymbol{Av} = \lambda \boldsymbol{v}$$

- Το λ είναι σταθερός αριθμός και το $\boldsymbol{v}$ είναι το άγνωστο διάνυσμα n-διαστάσεων του συστήματος
- Στη συνέχεια, γράφουμε το σύστημα στη μορφή ομογενών γραμμικών εξισώσεων:

$$\boldsymbol{Av} = \lambda \boldsymbol{v} \Rightarrow (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Ιδιοτιμές – Εισαγωγικές Έννοιες (2/2)

- Η αντιστρεψιμότητα του πίνακα $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ εξασφαλίζει μη μηδενική λύση στο σύστημα και για να ισχύει πρέπει $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$
- Η ορίζουσα $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ. Για παράδειγμα:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}3-\lambda & 2\\ 1 & 4-\lambda\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}\det\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right) &= (3-\lambda)(4-\lambda)-2\\ &= \lambda^2-7\lambda+10\end{aligned}$$

- Το παραπάνω πολυώνυμο ονομάζεται χαρακτηριστικό_πολυώνυμο του πίνακα $\boldsymbol{A}$ και έχει n ρίζες, τις οποίες συμβολίζουμε λ_i. Οι ρίζες αυτές ονομάζονται ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{A}$.
- Για κάθε ιδιοτιμή λ_i το διάνυσμα $\boldsymbol{v}_i$ που είναι λύση της εξίσωσης $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα.

Βασικές Ιδιότητες Ιδιοτιμών

- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους γραμμικά_ανεξάρτητα.
- Η ορίζουσα ενός πίνακα ισούται με το γινόμενο_των_ιδιοτιμών, δηλαδή $\det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
- Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές.
- Αν ο πίνακας $\boldsymbol{A}(n \times n)$ έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, μπορεί να διαγωνιοποιηθεί (eigenvalue decomposition) ως:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{V}^{-1}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Απόδειξη διαγωνιοποίησης (1/2)

- Για κάθε ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα ισχύει:

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \lambda_2\boldsymbol{v}_2 & \dots & \lambda_n\boldsymbol{v}_n\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A}\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\Lambda}$$

Απόδειξη διαγωνιοποίησης (2/2)

- Οπότε, δείχθηκε ότι για κάθε ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα ισχύει:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\Lambda}$$

- Επειδή τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ιδιότητα), η τάξη του πίνακα $\boldsymbol{V}$ είναι $\rho(\boldsymbol{V}) = n$, δηλαδή ο πίνακας $\boldsymbol{V}$ είναι πλήρης τάξης (full-rank) και άρα είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς υπάρχει ο αντίστροφος $\boldsymbol{V}^{-1}$ και μπορούμε να γράψουμε:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{V}^{-1}$$

Ιδιοτιμές και ειδικοί πίνακες (1/2)

- Οι συμμετρικοί πίνακες $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ (ή ερμιτιανοί) συνδέονται με κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες
- Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή $\lambda_i \in R$
- Ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι θετικά_ορισμένος, αν και μόνον αν, οι ιδιοτιμές είναι θετικοί αριθμοί $\lambda_i > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ και άρα ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι αντιστρέψιμος
- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, δηλαδή για $\lambda_i \neq \lambda_j$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια, δηλαδή $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$
- Για κάθε ερμιτιανό πίνακα μπορούμε πάντα να βρούμε ένα σύνολο από ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα, δηλαδή:

$$\left\langle \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad i \neq j \\ 0 & \alpha\nu \quad i = j \end{cases}$$

Ιδιοτιμές και ειδικοί πίνακες (2/2)

- Με βάση τις δυο προηγούμενες ιδιότητες, αν ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ έχει πραγματικά στοιχεία, τότε ο πίνακας $\boldsymbol{V}$ (που έχει οριστεί στη διαδικασία διαγωνοποίησης) είναι ορθογώνιος
- Αντίστοιχα, αν ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ έχει μιγαδικά στοιχεία τότε ο $\boldsymbol{V}$ είναι ορθομοναδιαίος
- Και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις ισχύει ότι $\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{V}^{T}$ ή $\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{V}^{H}$, αντίστοιχα
- Το φασματικό θεώρημα (spectral theorem), μέσω της ιδιότητα της διαγωνοποίησης σε έναν ερμιτιανό πίνακας $\boldsymbol{A}$, ορίζει πως:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{V}^{H} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^{H}$$

‘Άλλες ιδιότητες – Βελτίωση κατάστασης

- Δίνεται ο πίνακας $\boldsymbol{B}(n \times n)$ με ιδιοτιμές λ_i και ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_i$. Θεωρούμε τον πίνακα $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \alpha\boldsymbol{I}$, όπου α είναι μία σταθερά. Ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_i$ και ιδιοτιμές $\lambda_i + \alpha$.
- Σε διάφορες εφαρμογές επεξεργασίας σημάτων χρειάζεται να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα, π.χ. για να βρούμε τη λύση ενός συστήματος της μορφής $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{B}$.
- Ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ μπορεί να είναι ιδιάζων $(\det(\boldsymbol{A}) = 0)$ ή κακής κατάστασης (ill-conditioned), δηλαδή κάποιες από τις ιδιοτιμές του να είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Αυτή η κατάσταση μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια της λύσης.
- Για να βελτιωθεί η κατάσταση, προσθέτουμε ένα μικρό όρο στα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα $\mathbf{A}$, με αποτέλεσμα να μεταβάλλονται κατάλληλα οι ιδιοτιμές, αφήνοντας συγχρόνως τα ιδιοδιανύσματα αμετάβλητα.

Τέλος Ενότητας 2

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κώστας Μπερμπερίδης. «Στοχαστικά Σήματα και Τηλεπικοιωνίες». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1111/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.