



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κινητά Δίκτυα Επικοινωνιών

Ενότητα 8: Πιθανότητα Σφάλματος σε AWGN
Κανάλι

Καθ. Κώστας Μπερμπερίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Σκοποί ενότητας

- Η εξοικείωση του φοιτητή με τεχνικές ανάλυσης της απόδοσης ψηφιακών τηλεπικοινωνιακών συστημάτων



Περιεχόμενα ενότητας

Αντίποδα και ορθογώνια σήματα

PAM

PSK

QAM

PSK versus QAM

M-αδικά Ορθογώνια Σήματα

M-FSK Ασύμφωνης Φώρασης

Συγκρίσεις



Αντίποδα και Ορθογώνια Σήματα

Η πιθανότητα σφάλματος

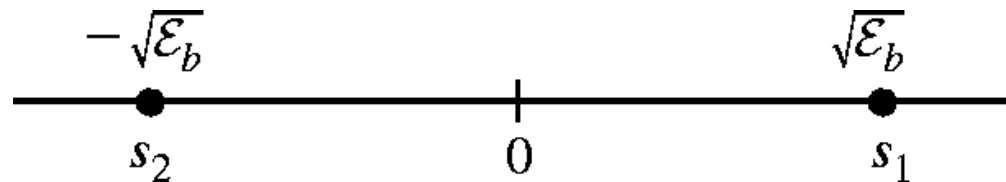
- Βασικό στοιχείο κατά τον σχεδιασμό ενός συστήματος
 - Σχετίζεται άμεσα με την ποιότητα υπηρεσίας (QoS)
- Σε κανάλια AWGN εξαρτάται από:
 - τη μέση ισχύ μετάδοσης
 - την ποσότητα θορύβου στο κανάλι
 - το σύστημα διαμόρφωσης που θα επιλέξουμε
- Σε bandlimited channels εξαρτάται και από πολλούς άλλους παράγοντες (χαρακτηριστικά καναλιού, άλλα υποσυστήματα πομπού και δέκτη κλπ)
- Υπολογισμός της Πιθανότητας Σφάλματος:
 - Κλειστές μορφές (κάποιες δύσκολα υπολογίσιμες)
 - Πειραματικές μετρήσεις
 - Ημιαναλυτικές μέθοδοι

Δυαδικά Αντίποδα Σήματα

- **Δυαδικά Αντίποδα Σήματα Βασικής Ζώνης** : $s_2(t) = -s_1(t)$
- Παράδειγμα: Δυαδικό PAM
 - $s_1(t) = g_T(t)$ (παλμός με ενέργεια E_b σε χρόνο T)
 - $s_2(t) = -g_T(t)$
- $s_i(t) = s_i \psi(t)$, $\psi(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{E_b}}\right) g_T(t)$, $s_i = \pm\sqrt{E_b}$
- Έστω ότι
 - Τα δύο σήματα είναι ισοπίθανα
 - E_b η ενέργεια ανά bit
 - Έχουμε AWGN θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και με διακύμανση $\sigma_n^2 = N_0/2$
- Ληφθέν σήμα: $r = s_i + n = \pm\sqrt{E_b} + n$
- Φωρατής:
 - Αν $r > 0$, τότε στάλθηκε το s_1
 - Αν $r < 0$, τότε στάλθηκε το s_2

Δυαδικά Αντίποδα Σήματα

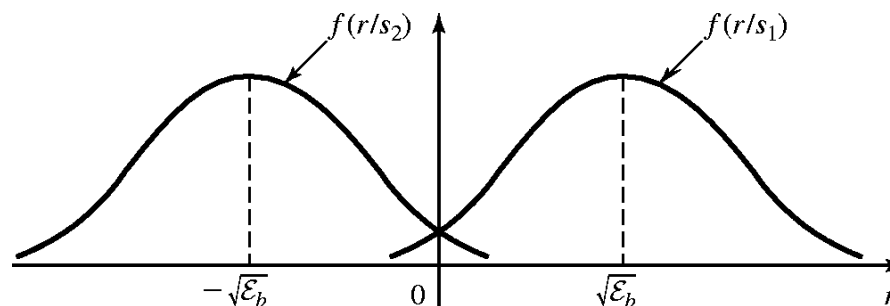
- Χώρος σημάτων: Μονοδιάστατος



- Μέση πιθανότητα σφάλματος:

$$P_b = \frac{1}{2} P(r < 0 | s_1) + \frac{1}{2} P(r > 0 | s_2)$$

- Υπό συνθήκη πιθανότητα σφάλματος:



Δυαδικά Αντίποδα Σήματα

- Υπό συνθήκη PDF του ενός σήματος:

$$P(r < 0 | s_1) = \int_{-\infty}^0 f(r | s_1) dr = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

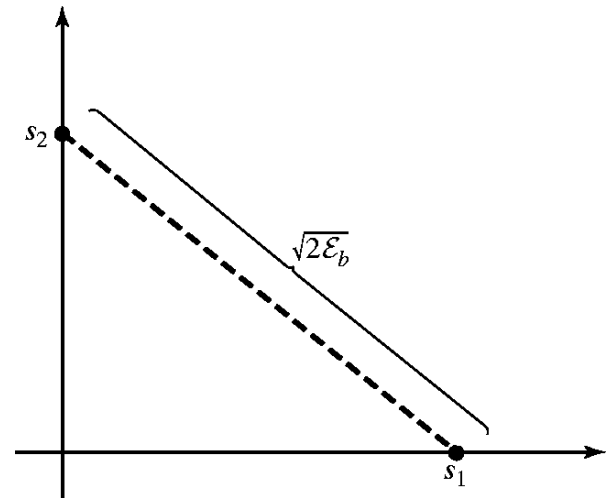
$f(r/s_1)$: Gaussian r.v. με μέση τιμή s_1 και διασπορά $N_0/2$

- Μέση Πιθανότητα Σφάλματος για Δυαδικό PAM (Δυαδικά Αντίποδα Σήματα)

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Δυαδικά Ορθογώνια Σήματα

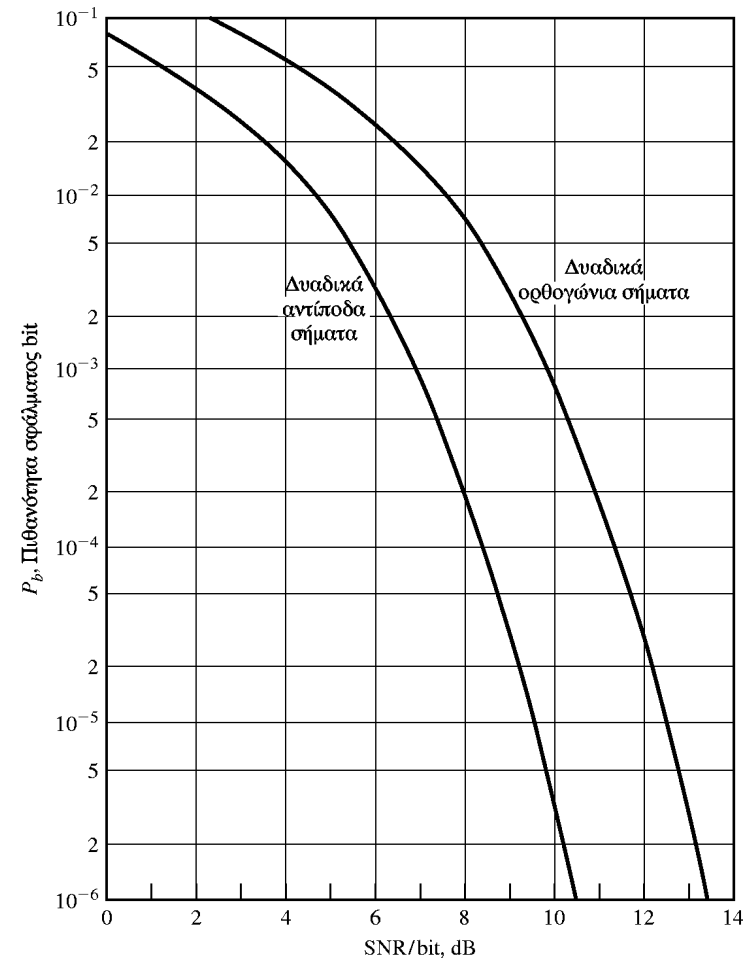
- Ορθογώνια Σήματα: είναι ορθογώνια μεταξύ τους
- Παράδειγμα:
 - Δυαδικό PPM
 - Δυαδικό FSK
 - $s_1 = (\sqrt{E_b}, 0)$
 - $s_2 = (0, \sqrt{E_b})$
- Χώρος σημάτων: Δισδιάστατος
- Πιθανότητα σφάλματος για Δυαδικά Ορθογώνια Σήματα



$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Ορθογώνια vs Αντίποδα

- Τα ορθογώνια σήματα απαιτούν **διπλάσια ενέργεια** για να πετύχουν την ίδια πιθανότητα σφάλματος με τα αντίποδα
- Επειδή
 $10 \log_{10} 2 = 3 \text{ dB}$
λέμε ότι τα ορθογώνια είναι υποδεέστερα των αντίποδων κατά 3dB



PAM

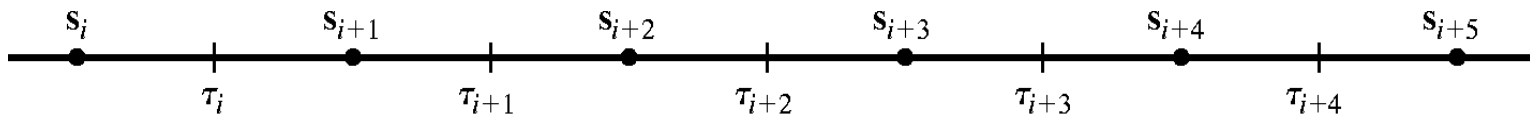
Pulse Amplitude Modulation

M-PAM Βασικής Ζώνης

- Αναπαρίστανται με M μονοδιάστατα διανύσματα

$$s_m = \sqrt{E_g} A_m, m = 1, 2, \dots, M$$

- Όπου E_g : η ενέργεια του βασικού παλμού $g_T(t)$ στη διάρκεια ενός συμβόλου
- Αν τα διαδοχικά σύμβολα είναι ισαπέχοντα,
$$A_m = (2m - 1 - M), m = 1, 2, \dots, M$$
- Ο φωρατής συγκρίνει την έξοδο του αποδιαμορφωτή r με $(M - 1)$ κατώφλια που είναι τα κέντρα των διαδοχικών συμβόλων



s_i – σημεία αστερισμού
 τ_i – κατώφλια

M-PAM

- Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου (SER):

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6E_s}{(M^2-1)N_0}}\right)$$

- E_s : η μέση ενέργεια ανά σύμβολο ($E_s = E_g(M^2 - 1)/3$)
 - Προσοχή, δεν έχουν όλα τα σύμβολα την ίδια ενέργεια
- Το SER ως προς τη μέση ενέργεια ανά bit:

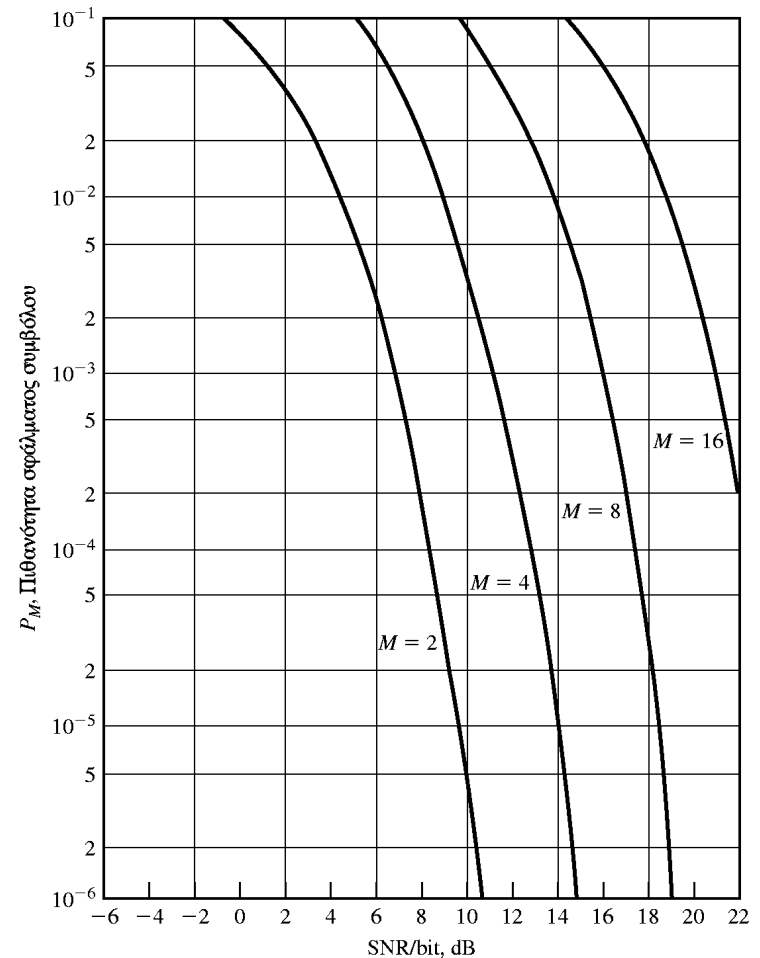
$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M E_{bav}}{(M^2-1)N_0}}\right)$$

- Για $M = 2$, προκύπτει το BER του δυαδικού PAM

Ίδια πιθανότητα σφάλματος ισχύει και για **ζωνοπερατό M-PAM**

M-PAM

- Κάθε φορά που διπλασιάζεται το M , το SNR/bit θα πρέπει να αυξηθεί περισσότερο από 4dB για το ίδιο SER



PSK

Phase Shift Keying

M-PSK Σύμφωνης Φάσης

- M-PSK με αποδιαμόρφωση σύμφωνης φάσης
- Χώρος Σημάτων: Δισδιάστατος
- **M=2 (ισοδύναμο με 2-PAM)**

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- M=4
 - είναι ουσιαστικά δύο δυαδικά διαμορφωμένα (2-PAM) σήματα σε δύο ορθογώνιες φέρουσες
 - με τέλεια εκτίμηση φάσης φέροντος δεν υπάρχει παρεμβολή ανάμεσα στις 2 φέρουσες => το BER είναι ίδιο με το 2-PAM (ακολουθία bits)
 - το SER είναι $SER = 1 - (1 - BER)^2$

$$P_4 = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \left[1 - \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right]$$

M-PSK Σύμφωνης Φάσης

- **M>4**: το SER υπολογίζεται με αριθμητική ολοκλήρωση μιας πολύπλοκης έκφρασης όπου οι 2-D pdf εκφράζονται σε πολικές συντεταγμένες.

- Μια καλή προσέγγιση είναι η:

$$P_M \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{2 \log_2 M E_b}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right)$$

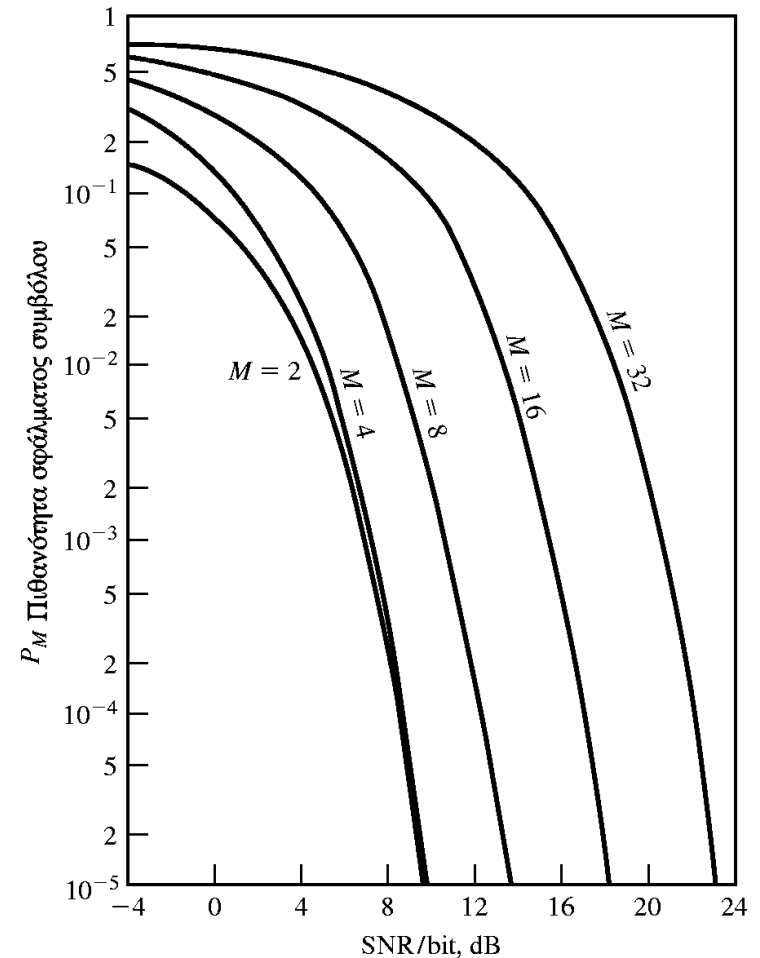
- Πιθανότητα Σφάλματος Bit (BER):

- δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί απευθείας, επειδή εξαρτάται από την αντιστοίχιση σύμβολων – bits
- αν χρησιμοποιείται **κωδικοποίηση Gray**, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα περισσότερα εσφαλμένα σύμβολα περιέχουν ένα μόνον εσφαλμένο bit, οπότε

$$P_b \approx \frac{1}{\log_2 M} P_M$$

M-PSK Σύμφωνης Φάσης

- Κάθε φορά που διπλασιάζεται το M , το SNR/bit θα πρέπει να αυξηθεί από **4dB – 6dB** για το ίδιο **SER**



Διαφορικό PSK (DPSK)

- Τα προηγούμενα αναφέρονται στην περίπτωση της αποδιαμόρφωσης σύμφωνης φάσης όπου χρησιμοποιείται **συμβατικό PSK**
- Όταν η εκτίμηση φάσης από το PLL έχει ασάφειες, τότε χρησιμοποιείται **διαφορικό PSK (DPSK)**
- Προσεγγιστικά, το SER στο DPSK είναι περίπου **διπλάσιο** του SER στο PSK
- Για το δυαδικό DPSK ισχύει:

$$P_2 = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{N_0}}$$

- Η ανάλυση του M-DPSK είναι εξαιρετικά δύσκολη

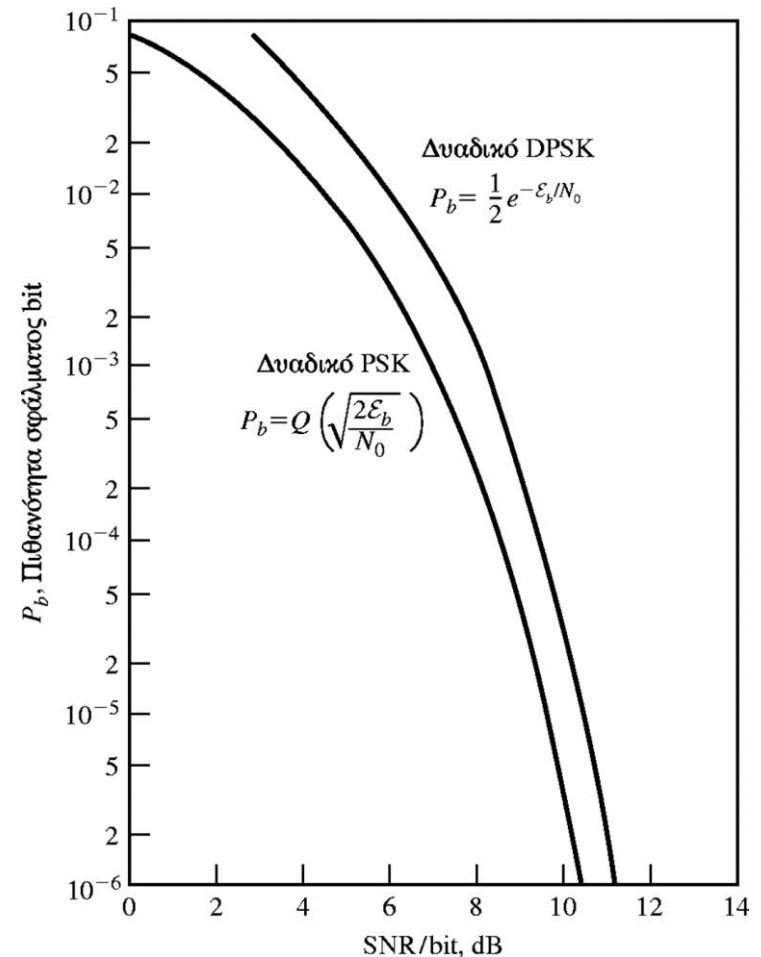
Διαφορικό PSK (DPSK)

2-PSK vs 2-DPSK

- Για $BER < 10^{-4}$ η διαφορά στο SNR/bit ανάμεσα στους δύο τρόπους διαμόρφωσης είναι μικρότερη από 1dB

M-PSK vs M-DPSK

- Το DPSK έχει περίπου 3dB υποδεέστερη επίδοση σε σχέση με το PSK



QAM

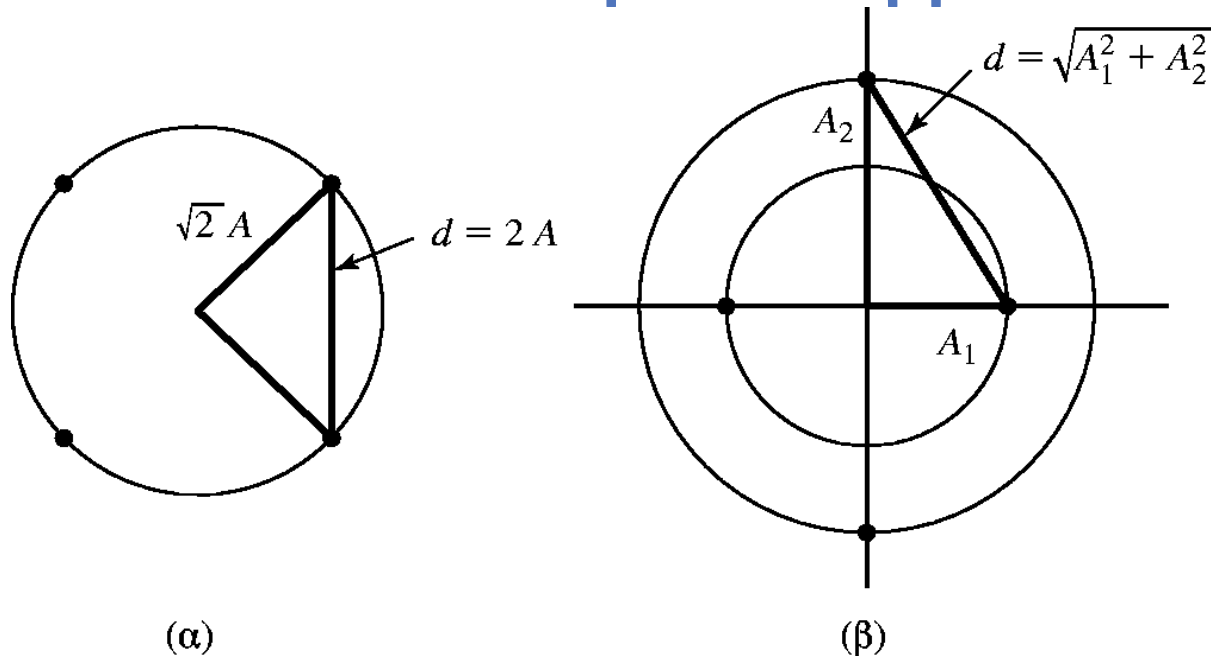
Quadrature Amplitude Modulation

Quadrature Amplitude Modulation (QAM)

$$s(t) = A_{mc}g_T(t) \cos(2\pi f_c t) + A_{ms}g_T(t) \sin(2\pi f_c t)$$
$$m = 1, 2, \dots, M$$

- **Χώρος Σημάτων:** Δισδιάστατος
- Το SER εξαρτάται από τον **αστερισμό συμβόλων** που χρησιμοποιούμε κάθε φορά
- Σε κάθε αστερισμό συμβόλων θα πρέπει να εξετάζουμε:
 - την **ελάχιστη απόσταση** d_{\min} μεταξύ δύο σημείων σήματος
 - τη **μέση μεταδιδόμενη ισχύ**
- * θεωρούμε ότι όλα τα σημεία είναι ισοπίθανα
- Συνήθως προτιμούνται οι ορθογώνιοι αστερισμοί (αν και υποβέλτιστοι)

4-QAM: Παραδείγματα

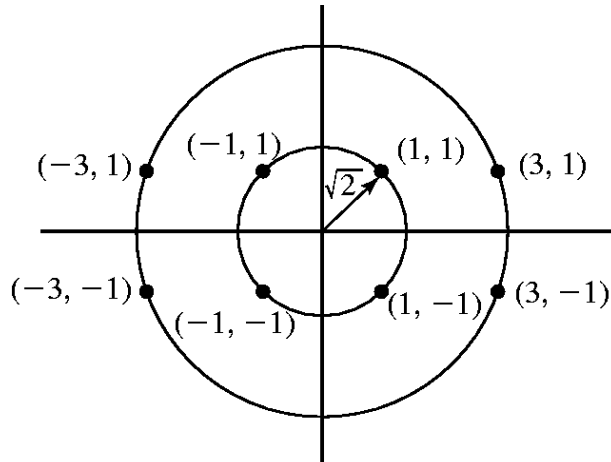


- Ισοδυναμεί με 4-PSK
- $d_{min} = 2A$
- $P_{av} = A^2$

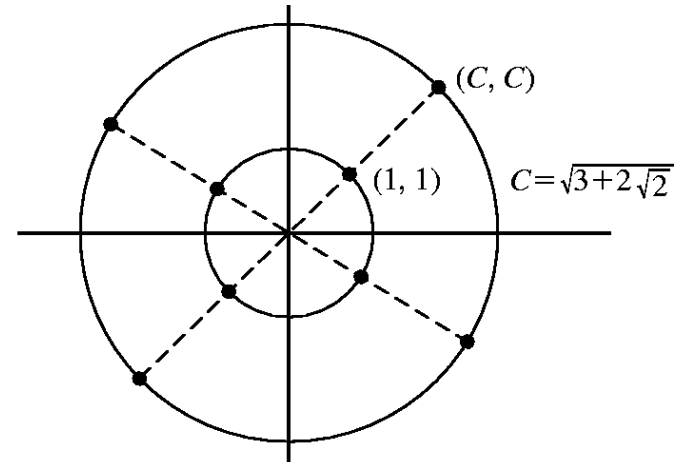
- 2 πλάτη και 4 φάσεις
- $d_{min} = 2A$ ($A_1 = A, A_2 = \sqrt{3}A$)
- $P_{av} = A^2$

Τα δύο 4-QAM είναι ισοδύναμα ως προς το SER

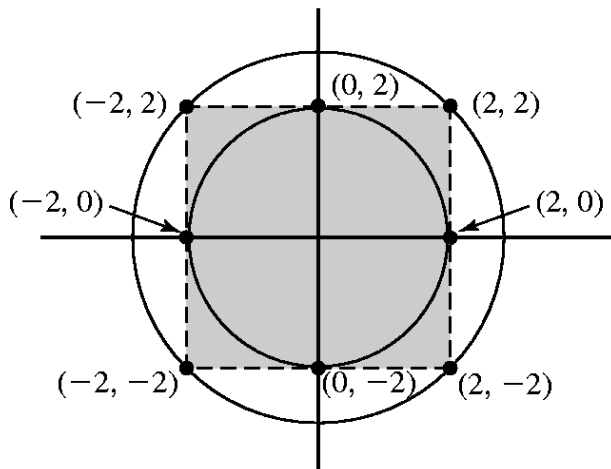
8-QAM: Παραδείγματα



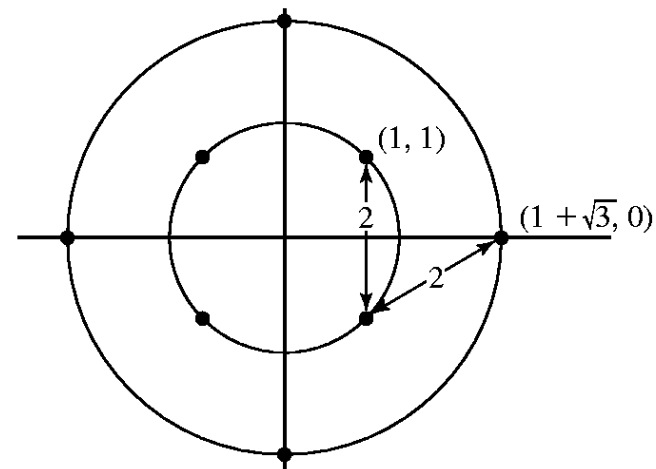
(α)



(γ)



(β)

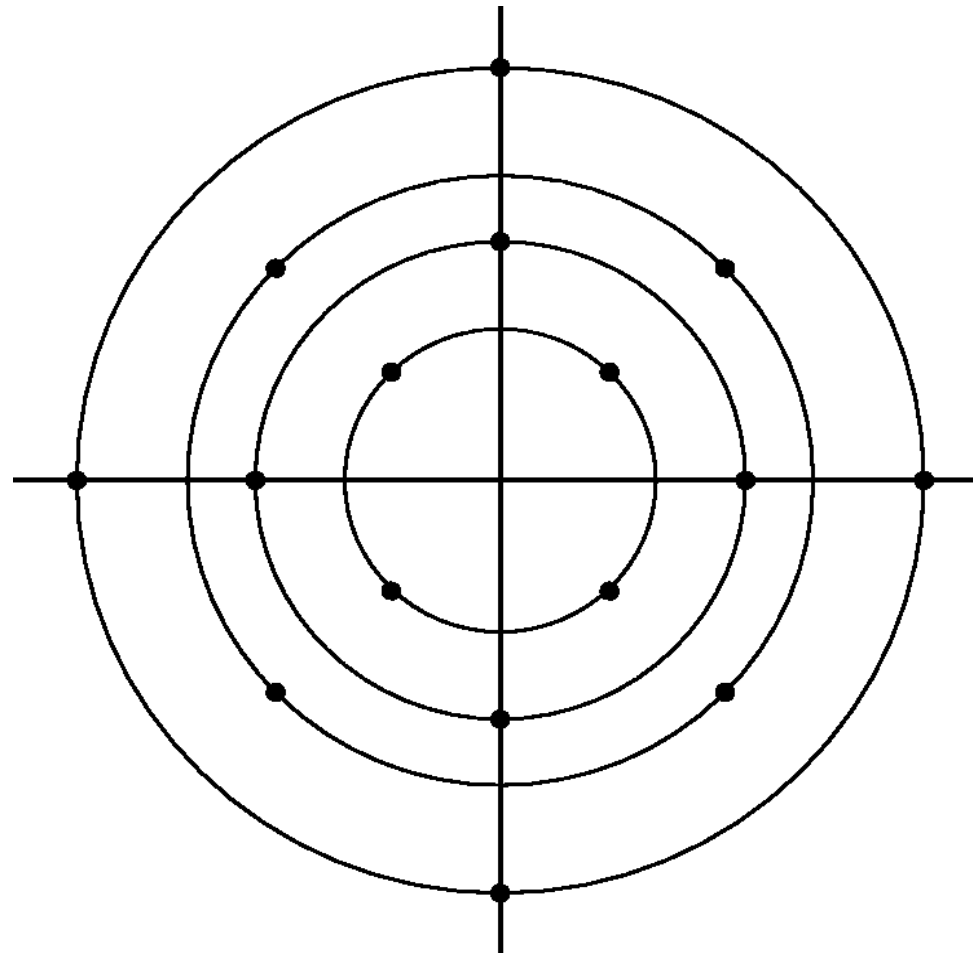


(δ)

8-QAM Ανάλυση

- Και οι τέσσερις αστερισμοί έχουν ελάχιστη απόσταση $d_{\min}=2A$
- Αστερισμοί (α) και (β)
 - ορθογώνιο πλέγμα
 - $P_{av} = 3A^2$
- Αστερισμός (γ)
 - $P_{av} = 3.14A^2$
- Αστερισμός (δ)
 - $P_{av} = 2.36A^2$
- Παρατηρούμε ότι ο (δ) απαιτεί τη λιγότερη ισχύ για να πετύχει την ίδια πιθανότητα σφάλματος
- **Άρα ο (δ) είναι ο καλύτερος 8-QAM αστερισμός μεταξύ αυτών που μελετήθηκαν**

16-QAM



$M = 16$

16-QAM: Ανάλυση

- Για $M \geq 16$, υπάρχουν πολλοί εναλλακτικοί αστερισμοί στο δισδιάστατο χώρο σημάτων
- Ο προηγούμενος αστερισμός 16 σημείων είναι μια **γενίκευση του βέλτιστου 8-QAM αστερισμού**
- Όμως, **δεν** είναι ο βέλτιστος 16-QAM
- **Ορθογώνιοι QAM Αστερισμοί:**
 - δημιουργούνται εύκολα ως δύο PAM σε ορθογώνιες φέρουσες
 - εύκολη αποδιαμόρφωση και φώραση
 - αν και για $M \geq 16$ οι ορθογώνιοι δεν είναι οι βέλτιστοι,
 - ωστόσο είναι πολύ κοντά σε αυτούς, δηλαδή η μέση μεταδιδόμενη ισχύς που απαιτείται για δεδομένη ελάχιστη απόσταση είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από αυτή του βέλτιστου αστερισμού

SER στο M-QAM

- Εστιάζουμε σε:
 - ορθογώνιους αστερισμούς
 - $M = 2^k$ με k = άρτιο (π.χ., $M=16, 64, 256 \dots$)
- Αυτά τα M-QAM ισοδυναμούν με δύο \sqrt{M} -PAM σε ορθογώνιες φέρουσες
- Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για M-QAM

$$P_M = 1 - (1 - P_{\sqrt{M}})^2$$

- όπου

$$P_{\sqrt{M}} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3E_s}{(M-1)N_0}} \right)$$

είναι το SER του \sqrt{M} -PAM με μισή μέση ισχύ (δηλ. $E_s/2$)

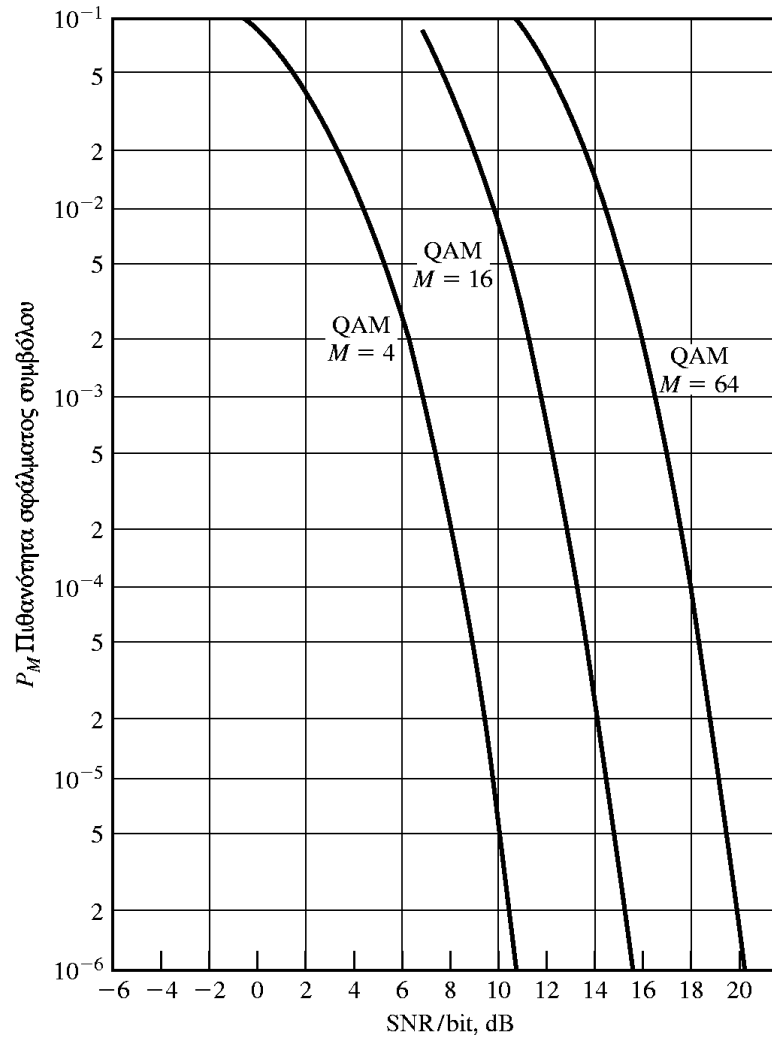
SER στο M-QAM

- Όταν το k ($M = 2^k$) είναι περιττός, τότε δεν υπάρχει το αντίστοιχο \sqrt{M} -PAM σύστημα
- Γενικά, το SER στο M-QAM φράσσεται ως

$$P_M \leq 4Q \left(\sqrt{\frac{3kE_b}{(M-1)N_0}} \right)$$

όπου E_b/N_0 είναι το μέσο SNR/bit

Διαγράμματα SER στο M-QAM



PSK versus QAM

M-QAM vs M-PSK

- Και οι δύο διαμορφώσεις είναι **δισδιάστατες**
- Τις συγκρίνουμε για δεδομένο M
- Στις εκφράσεις του SER, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι **το όρισμα της συνάρτησης Q** (διότι κυρίως από αυτό καθορίζεται η πιθανότητα σφάλματος)
- Ο λόγος των δύο ορισμάτων (M-QAM / M-PSK) είναι

$$R_M = \frac{3}{2 \sin^2 \frac{\pi}{M} (M-1)}$$

M-QAM vs M-PSK

$$R_M = \frac{3}{(M-1)} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{M}}$$

- Για $M = 4$, ο λόγος είναι 1
- Για $M > 4$ είναι $R_M > 1$
- Ο ακόλουθος πίνακας μας δείχνει το πλεονέκτημα του M-QAM vs M-PSK σε ότι αφορά το SNR:

M	$R_M[\text{dB}]$
8	1.65
16	4.20
32	7.02
64	9.95

Μ-αδικά Ορθογώνια Σήματα

M-αδικά Ορθογώνια Σήματα

- Παραδείγματα:
 - M-FSK
 - M-PPM
- Συνήθως, τα ορθογώνια σήματα έχουν ίση ενέργεια E_s
- Ο βέλτιστος φωρατής επιλέγει το σήμα με τη μεγαλύτερη συσχέτιση με το λαμβανόμενο σήμα

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r}^T \mathbf{s}_m, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

- Τα M διανύσματα σήματος είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= [\sqrt{E_s} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \\ &\vdots \\ \mathbf{s}_M &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \sqrt{E_s}]^T \end{aligned}$$

M-αδικά Ορθογώνια Σήματα

- Έστω ότι στάλθηκε το \mathbf{s}_1 . Τότε λαμβάνουμε:

$$\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_M] = [\sqrt{E_s} + n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_M]$$

όπου τα n_i , είναι i.i.d τυχαίες μεταβλητές, Gaussian, με διακύμανση $\sigma_n^2 = N_0/2$

- Οι έξοδοι της συστοιχίας των συσχετιστών του φωρατή (μετά από κανονικοποίηση διαιρώντας με $\sqrt{E_s}$ είναι:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1) &= \sqrt{E_s} + n_1 \\ &\vdots \\ C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_M) &= n_M \end{aligned}$$

- Οι έξοδοι είναι τυχαίες μεταβλητές με Gaussian κατανομή, διασπορά ίση με $\sigma_n^2 = N_0/2$ και μέση τιμή μηδέν (εκτός από του 1ου συσχετιστή)

M-αδικά Ορθογώνια Σήματα

- Η πιθανότητα σωστής απόφασης θα είναι

$$\begin{aligned} P_c &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(r_2 < r_1, r_3 < r_1, \dots, r_M < r_1 | r_1) f_{r_1}(r_1) dr_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1) f_{r_1}(r_1) dr_1 \end{aligned}$$

- Επειδή τα r_m είναι ανεξάρτητα, η συνδυασμένη πιθανότητα αναλύεται σε γινόμενο απλών δεσμευμένων πιθανοτήτων που η κάθε μία είναι της μορφής:

$$P(n_m < r_1 | r_1) = \int_{-\infty}^{r_1} f_{r_m}(x_m) dx_m = 1 - Q\left(\sqrt{\frac{2r_1^2}{N_0}}\right), m = 1, 2, \dots, M$$

- Η PDF του r_1 όταν στέλνεται s_1 , είναι

$$f_{r_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - \sqrt{E_s})^2}{N_0}\right)$$

M-αδικά Ορθογώνια Σήματα

- Οπότε, η πιθανότητα σωστής απόφασης είναι

$$P_c = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - Q \left(\sqrt{\frac{2r_1^2}{N_0}} \right) \right]^{M-1} f_{r_1}(r_1) dr_1$$

- Η ίδια έκφραση βγαίνει και όταν στέλνονται και τα υπόλοιπα σύμβολα.
- Εφόσον αυτά είναι ισοπίθανα, η παραπάνω έκφραση είναι και η πιθανότητα σωστής απόφασης συμβόλου.
- Η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου είναι $P_M = 1 - P_c$, οπότε

$$P_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - [1 - Q(x)]^{M-1}) \exp \left(- \left(x - \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \right)^2 / 2 \right) dx$$

η οποία υπολογίζεται αριθμητικά

M-αδικά Ορθογώνια Σήματα

- Αποδεικνύεται ότι η **πιθανότητα σφάλματος bit** δίνεται ως

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M \approx \frac{P_M}{2}, \quad k \gg 1$$

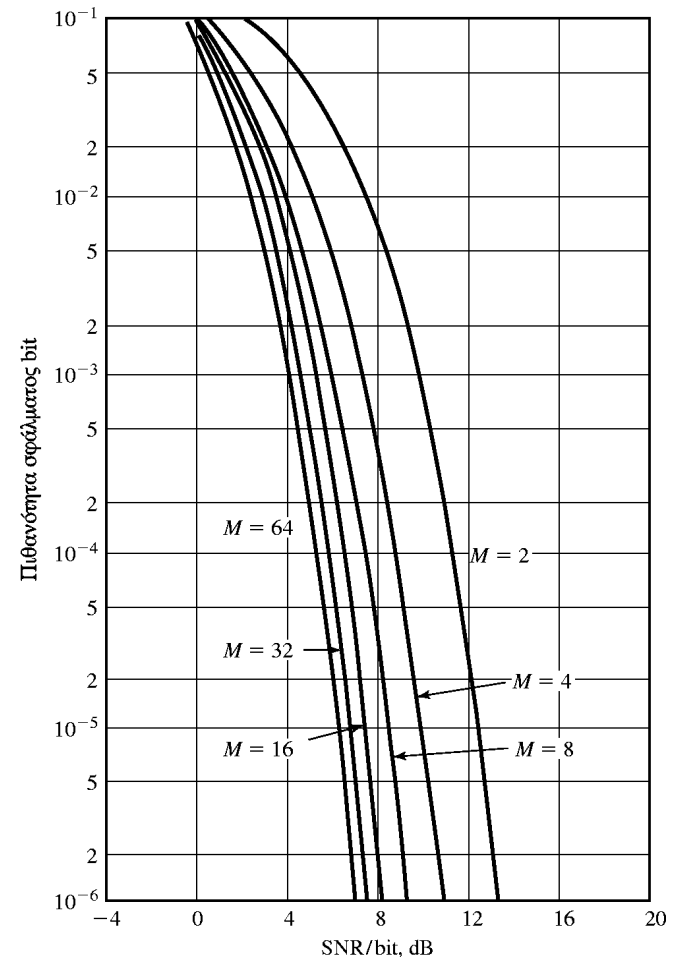
όπου παρατηρούμε πως η P_b είναι αυτή τη φορά σχεδόν μισή της P_M (Γιατί;)

- Για M-αδικά ορθογώνια σήματα προκύπτει ότι:
 - καθώς αυξάνεται το M βελτιώνεται η καμπύλη BER
 - δηλαδή απαιτείται λιγότερο SNR/bit για την ίδια πιθανότητα σφάλματος
- Για παράδειγμα, για BER $P_b = 10^{-5}$
 - με **M=2** απαιτείται SNR/bit = 12dB
 - με **M=64** απαιτείται SNR/bit = 6dB

BER για M-αδικά Ορθογώνια Σήματα (FSK, PPM)

Στα M-αδικά ορθογώνια
σήματα,

- καθώς αυξάνεται το M
- βελτιώνεται η καμπύλη του BER
- δηλαδή επιτυγχάνεται το ίδιο BER με χαμηλότερο SNR/bit



Ένα Φράγμα Ένωσης της SER

- Είδαμε ότι στα M-αδικά ορθογώνια σήματα,
 - καθώς αυξάνεται το M
 - βελτιώνεται η καμπύλη του BER
 - δηλαδή επιτυγχάνεται ανεκτό BER σε χαμηλότερα SNR/bit
- **Ερώτημα: Αν αυξάνουμε συνεχώς το M, υπάρχει κάποια τιμή SNR/bit κάτω από την οποία δε θα μπορούμε να έχουμε αποδεκτό BER (δηλ. όσο θέλουμε μικρό) ;**

Ένα Φράγμα Ένωσης της SER

- Επειδή η ακριβής έκφραση του SER (P_M) είναι αρκετά περίπλοκη, θα βρούμε ένα φράγμα της που να είναι πιο απλό (θεωρούμε ότι ο φωρατής λαμβάνει $M - 1$ δυαδικές αποφάσεις)
- Αν E_i είναι το γεγονός
 - $E_i: C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) > C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)$ (δεδομένου ότι έχει σταλεί \mathbf{s}_1)
- τότε

$$P_M = P\left(\bigcup_{i=1}^{M-1} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M-1} P(E_i)$$

Ένα Φράγμα Ένωσης της SER

- Όμως, το $P(E_i)$ είναι το SER στο 2-FSK, οπότε

$$P_M \leq (M - 1)P_2 = (M - 1)Q(\sqrt{E_s/N_0}) < MQ(\sqrt{E_s/N_0})$$

- Η συνάρτηση Q μπορεί να φραχθεί εκ των άνω ως

$$Q(\sqrt{E_s/N_0}) < e^{-E_s/2N_0}$$

- Δεδομένου ότι $M = 2^k$, μπορεί να δειχθεί ότι το SER των M-αδικών ορθογώνιων σημάτων φράσσεται ως

$$P_M < \exp\left(-\frac{k\left(\frac{E_b}{N_0} - 2 \ln 2\right)}{2}\right)$$

- Καθώς το $k \rightarrow \infty$ (ισοδύναμα $M \rightarrow \infty$), το BER προσεγγίζει εκθετικά το μηδέν, υπό την προϋπόθεση ότι το SNR/bit είναι

$$\frac{E_b}{N_0} > 2 \ln 2 = 1.39 \text{ (1.42 dB)}$$

Ένα Φράγμα Ένωσης της SER

- Ωστόσο, το φράγμα αυτό δεν είναι τόσο αυστηρό, επειδή στα χαμηλά SNR, η συνάρτηση Q δε φράσσεται πολύ αυστηρά από την εκθετική.
- Με ένα αυστηρότερο φράγμα, αποδεικνύεται ότι
- Καθώς το $k \rightarrow \infty$ ($M \rightarrow \infty$), το BER προσεγγίζει εκθετικά το μηδέν, υπό την προϋπόθεση ότι το SNR/bit είναι

$$\frac{E_b}{N_0} > \ln 2 = 0.693 \text{ (-1.6 dB)}$$

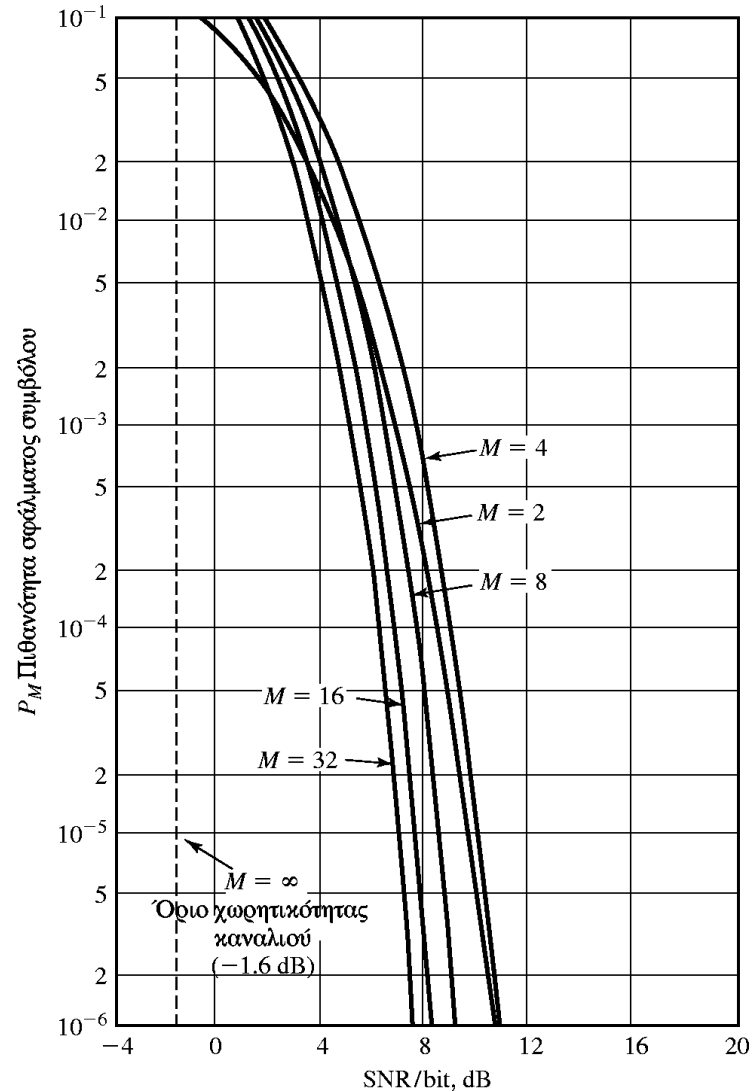
το οποίο έχει 3 dB διαφορά σε σχέση με το προηγούμενο ελάχιστο απαιτούμενο SNR/bit

- Αυτό το ελάχιστο SNR/bit (-1.6dB) για αυθαίρετα μικρό BER καλείται **όριο του Shannon** για κανάλι AWGN.

M-αδικά Διορθογώνια Σήματα

- Διορθογώνια Σήματα:
 - αν θέλουμε να κατασκευάσουμε M διορθογώνια σήματα
 - επιλέγουμε $M/2$ ορθογώνια
 - καθώς και τα αντίποδά τους
- Η έκφραση SER είναι αρκετά περίπλοκη
- Έχουν παρόμοια συμπεριφορά BER-SER με τα ορθογώνια
- Όπως και στα M -αδικά ορθογώνια, όταν $M \rightarrow \infty$, το ελάχιστο απαιτούμενο SNR/bit για αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος είναι το όριο Shannon (-1.6dB)

SER για M-αδικά Διορθογώνια Σήματα



M-FSK Ασύμφωνης Φώρασης

M-FSK Ασύμφωνης Φώρασης

- Η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου είναι

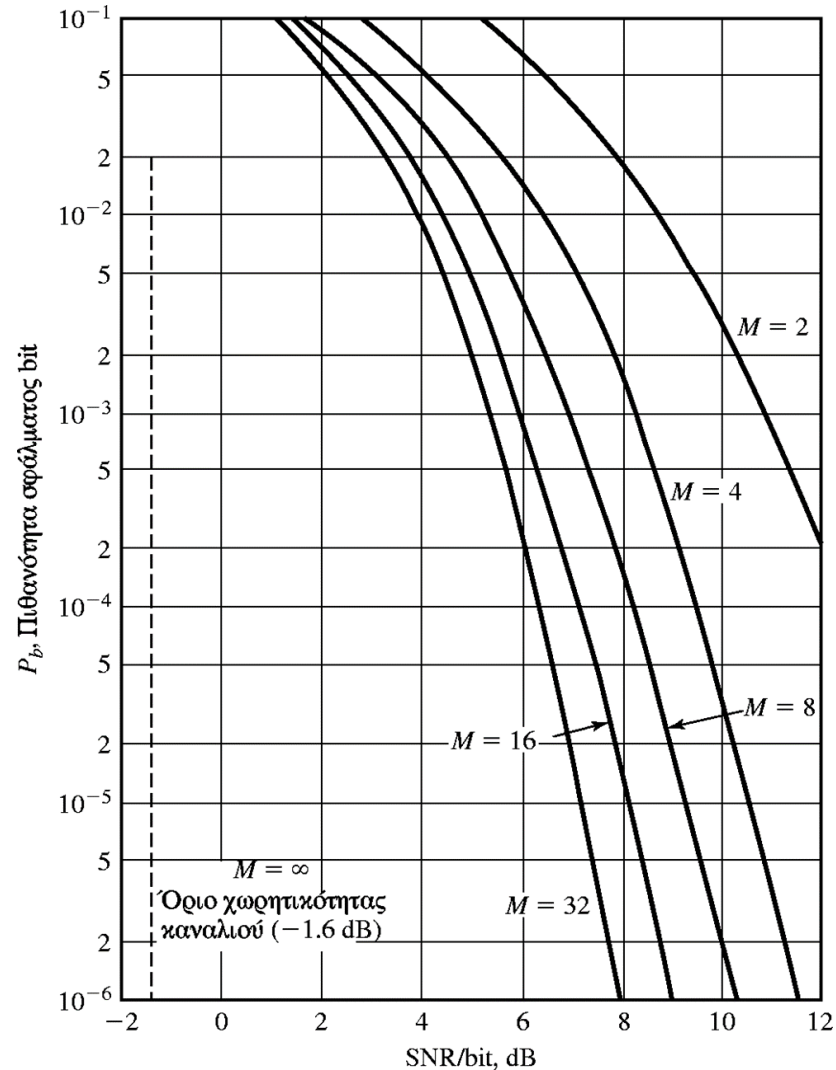
$$P_M = \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp\left(-\frac{nkE_b}{(n+1)N_0}\right)$$

- Για $M = 2$ η P_M είναι 3dB χειρότερη σε σχέση με το 2-DPSK
- Όπως και στο M-FSK, το BER συνδέεται με το SER ως

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M$$

- Σύγκριση με συμβατικό M-FSK:
 - το M-FSK ασύμφωνης φώρασης έχει **χειρότερο SER**
 - όπως και στο M-FSK, **αυξανόμενου του M, βελτιώνεται το SER**
 - όπως και στο M-FSK, ισχύει το **όριο Shannon** για $M \rightarrow \infty$

BER για M-FSK Ασύμφωνης Φώρασης



Συγκρίσεις

Σύγκριση των Μεθόδων Διαμόρφωσης

- Για να συγκρίνουμε τις διάφορες μεθόδους διαμόρφωσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορα κριτήρια
 - Π.χ. **ποιο είναι το απαιτούμενο SNR για να πετύχουμε κάποιο συγκεκριμένο BER;**
 - Ωστόσο, αυτό δεν είναι δίκαιο, επειδή δεν περιλαμβάνει την έννοια του εύρους ζώνης που μας διατίθεται, και του ρυθμού με τον οποίο στέλνουμε τα bits
 - Για το λόγο αυτό, θα προσπαθήσουμε επιπλέον του SNR να συνδέσουμε και τις παραμέτρους:
 - Ρυθμός bit, R_b
 - Απαιτούμενο εύρος ζώνης, W
- * Κατά τη σύγκριση θα πρέπει να θεωρούμε ότι κάποια παράμετρος είναι προκαθορισμένη και σταθερή (π.χ. ο ρυθμός R_b).

Σύγκριση (1)

- **M-PAM βασικής ζώνης:**

- παλμός $g_T(t)$ διάρκειας T
- το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι $\approx W = 1/(2T)$
- Σε χρόνο T μεταδίδονται $k = \log_2 M$ bits, άρα $T = k/R_b$ sec

$$W = \frac{R_b}{2k} = \frac{R_b}{2 \log_2 M} \text{ Hz}$$

- **Ζωνοπερατή μετάδοση M-PAM:**

- αν είχαμε DSB-SC, τότε χρειαζόμαστε το **διπλάσιο** εύρος ζώνης σε σχέση με τη βασική ζώνη
- αν είχαμε SSB-SC, τότε απαιτείται **το ίδιο**

Σύγκριση (2)

- **M-QAM:**

- το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι περίπου $W = 1/T$ (και για τις δύο φέρουσες)
- επίσης, επειδή η πληροφορία μεταφέρεται σε δύο ορθογώνιες φέρουσες έχουμε $T = 2k'/R_b$ (όπου k' ο αριθμός bits/φέρουσα, $k' = \log_2(M) / 2$)

$$W = \frac{R_b}{2k'} = R_b / \log_2 M \text{ Hz}$$

- **M-PSK:**

- εύρος ζώνης $W = 1/T$
- $T = \frac{k}{R_b}$

$$W = \frac{R_b}{k} = R_b / \log_2 M \text{ Hz}$$

PAM- QAM -PSK

- Κοινό χαρακτηριστικό των τριών διαμορφώσεων είναι ότι για καθορισμένο ρυθμό bit R_b , όταν αυξάνεται το M
 - **μειώνεται το απαιτούμενο εύρος ζώνης**
 - Αλλά (όπως έχουμε ήδη δει) **αυξάνεται η πιθανότητα SER**
- Με άλλα λόγια: η αύξηση του M
 - αυξάνει την απόδοση εύρους ζώνης
 - μειώνει την απόδοση ισχύος
- Που οφείλεται;
 - **η διάσταση του χώρου σημάτων είναι σταθερή και ανεξάρτητη του M ($N=1$ για PAM, $N=2$ για QAM και PSK)**

Σύγκριση: Ορθογώνια

- **PPM:**

- παλμός $g_T(t)$ διάρκειας T διαιρείται σε M υποδιαστήματα διάρκειας T/M
- στα αντίστοιχα υποδιαστήματα μεταδίδονται παλμοί εύρους T/M
- σε χρόνο T μεταδίδονται $k = \log_2 M$ bits, άρα $T = k/R_b$ sec

$$W = \frac{M}{2T} = MR_b/2 \log_2 M \text{ Hz}$$

- **FSK:**

- ελάχιστη συχνοτική απόσταση $1/2T$ για διατήρηση ορθογωνιότητας
- προκύπτει η ίδια σχέση με το PPM

- **Διορθογώνια – Simplex:**

- ισχύουν παρόμοιες σχέσεις με τα PPM
- τα διορθογώνια απαιτούν το μισό εύρος ζώνης σε σχέση με τα ορθογώνια

PPM - FSK

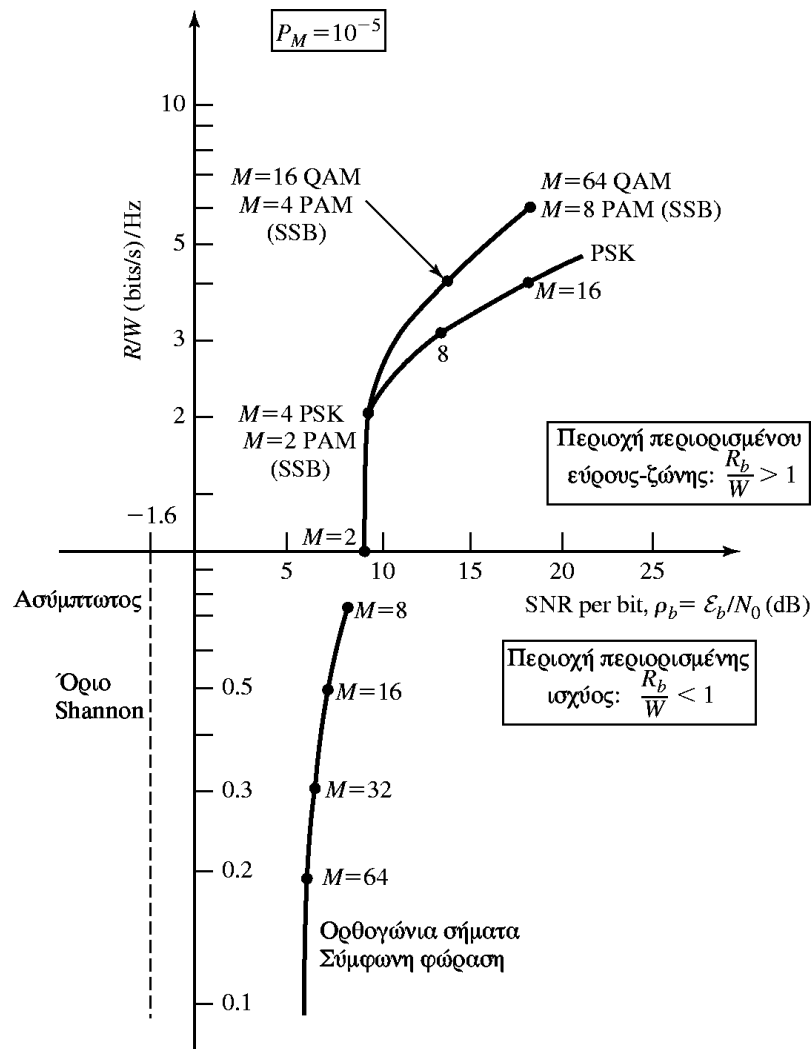
- Κοινό χαρακτηριστικό των ορθογώνιων διαμορφώσεων είναι ότι για καθορισμένο ρυθμό bit R_b , όταν αυξάνεται το M
 - αυξάνεται και το απαιτούμενο εύρος ζώνης κατά $\frac{M}{2\log_2 M}$
 - αλλά μειώνεται η πιθανότητα SER
- Με άλλα λόγια: η αύξηση του M
 - μειώνει την απόδοση εύρους ζώνης
 - αυξάνει την απόδοση ισχύος
 - δηλαδή τα ακριβώς αντίθετα από τα PAM-QAM-PSK
- Που οφείλεται;
 - η διάσταση του χώρου σημάτων είναι M οπότε αυξάνεται όταν αυξάνεται και το M

Σύγκριση

- Με βάση τα παραπάνω, μια σύγκριση που θα είχε νόημα είναι η σχέση ανάμεσα
 - στον **κανονικοποιημένο**, ως προς το εύρος ζώνης, **ρυθμό δεδομένων** R_b/W (bits/s/Hz) (**spectral efficiency**)
 - και το **απαιτούμενο SNR/bit**, δηλ. E_b/N_0 (dB) για να επιτευχθεί μια **δεδομένη πιθανότητα σφάλματος**
 - οπότε για κάθε M μπορούμε να έχουμε **τα αντίστοιχα** R_b/W και E_b/N_0

Διαμόρφωση	R_b/W
PAM	$2\log_2 M$
QAM	$\log_2 M$
PSK	$\log_2 M$
Ορθογώνια (PPM, FSK)	$2\log_2 M/M$

R_b/W ως προς το SNR/bit για $SER=10^{-5}$



Αποτελέσματα Σύγκρισης (1)

PAM-QAM-PSK:

- η αύξηση του M οδηγεί σε αύξηση του R_b/W , αλλά χειροτερεύει η πιθανότητα σφάλματος (ή ισοδύναμα, μεγαλώνει η απαίτηση σε SNR/bit)
- επιτυγχάνουν $R_b/W > 1$
- είναι κατάλληλα για **κανάλια περιορισμένου εύρους ζώνης** όπου θέλουμε υψηλούς ρυθμούς μετάδοσης και έχουμε **αρκετό SNR/bit**
- το τίμημα του διπλασιασμού του M
 - στο PSK είναι 6dB
 - στο QAM είναι 3dB
- το QAM είναι προτιμότερο του PSK για αστερισμούς πολλών σημείων

Αποτελέσματα Σύγκρισης (2)

- **M-αδικά Ορθογώνια:**

- η αύξηση του M οδηγεί σε μείωση του R_b/W , επειδή αυξάνεται το απαιτούμενο εύρος ζώνης W
- Όμως, μειώνεται το SNR/bit που απαιτείται για δεδομένη πιθανότητα σφάλματος
- επιτυγχάνουν $\frac{R_b}{W} \leq 1$
- είναι κατάλληλα για **κανάλια περιορισμένης ισχύος (δηλαδή περιορισμένου SNR/bit)** όπου όμως προσφέρεται **αρκετό εύρος ζώνης**
- Καθώς το $M \rightarrow \infty$ και $W \rightarrow \infty$, η πιθανότητα σφάλματος μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή, υπό την προϋπόθεση ότι $E_b/N_0 > -1.6$ dB (**όριο Shannon**)

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Καθ. Κώστας Μπερμπερίδης 2014.

Κώστας Μπερμπερίδης. «Κινητά Δίκτυα Επικοινωνιών. Πιθανότητα Σφάλματος σε AWGN Κανάλι».

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1109/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Οι εικόνες στις σελίδες: 7, 9, 10, 12, 14, 18, 20, 23, 24, 26, 30, 40, 46, 49, 58, έχουν δημιουργηθεί με βάση αντίστοιχες εικόνες του βιβλίου: «Συστήματα Επικοινωνιών» των J. G. Proakis και M. Salehi, μετάφραση στα ελληνικά από τους Κ. Καρούμπαλο, Ε. Ζέρβα, Σ. Καραμπογιά και Ε. Σαγκριώτη, εκδόσεις Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.