ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ ΦΓ→ΚΛΠΤ ΚΑΙ ΚΛΠΤ→ΠΜ

Αρχικά, ας θυμηθούμε τη **διαδικασία υποβοήθησης της μετατροπής ΦΓ σε ΚΛΠΤ**:

1. Προσδιορισμός κατηγορημάτων/συναρτήσεων
2. Προσδιορισμός ορισμάτων (αριθμός, τύπος, σύμβολα)
3. Προσδιορισμός ποσοδεικτών μεταβλητών
4. Σχηματισμός ατομικών εκφράσεων (ατόμων)
5. Σχηματισμός ομάδων ατόμων ίδιου επιπέδου
6. Προσδιορισμός συνδετικών ατόμων ομάδων και σχηματισμός αντίστοιχων τύπων
7. Προσδιορισμός ομάδων τύπων ίδιου επιπέδου
8. Στην περίπτωση μιας ομάδας, προσδιορισμός συνδετικών τύπων ομάδας, σχηματισμός τελικού τύπου και προχωρούμε στο 10.
9. Προσδιορισμός συνδετικών τύπων ομάδων, σχηματισμός τύπων επόμενου επιπέδου και επιστρέφουμε στο 6.
10. Τοποθέτηση ποσοδεικτών στον τελικό τύπο και δημιουργία τελικής πρότασης

Και την αυτόματη **διαδικασία μετατροπής ΚΛΠΤ σε ΠΜ:**

1. Απαλοιφή συνεπαγωγών
2. Περιορισμός εμβέλειας αρνήσεων
3. Μετονομασία μεταβλητών με το ίδιο όνομα που δεσμεύονται από διαφορετικούς ποσοδείκτες
4. Μετατροπή σε ΚΜΡ (PNF)
5. Απαλοιφή υπαρξιακών ποσοδεικτών (Skolemisation)
6. Απαλοιφή καθολικών ποσοδεικτών
7. Μετατροπή σε ΣΚΜ (CNF)
8. Απαλοιφή διασυνδετικών και καταγραφή των παραχθέντων προτάσεων
9. Μετονομασία μεταβλητών (περίπτωση περισσοτέρων της μιας προτάσεων με κοινές μεταβλητές)

★ ★ ★

Α. Μετατρέψτε τα παρακάτω σε ΚΛΠΤ και κατόπιν σε ΠΜ:

(1) «Σε όποιον δεν αρέσει το χιόνι δεν είναι σκιέρ»

(2) «Όλοι οι άνθρωποι τρώνε κάποιο φαγητό»

(3) α) Για κάθε φυσικό αριθμό, υπάρχει μεγαλύτερός του φυσικός αριθμός
β) Ο επόμενος αριθμός κάθε φυσικού αριθμού είναι μεγαλύτερός του
(χρησιμοποιείστε τα *κατηγορήματα*: φυσ(x), μεγαπο(x,y) και τη *συνάρτηση* επομ(x))

(4) Τα στρείδια και τα μύδια είναι όστρακα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(1) «Σε όποιον δεν αρέσει το χιόνι δεν είναι σκιέρ»

<u>Μετατροπή ΦΓ → ΚΛΠΤ:</u>

1. Αρχικά πρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις και τα κατηγορήματα

   Στη συγκεκριμένη φράση έχουμε <u>δύο κατηγορήματα</u>: ***αρέσει***, ***σκιέρ***. Δεν έχουμε συναρτήσεις.

2. Έπειτα πρέπει να βρούμε τα ορίσματα για τα κατηγορήματά μας (αριθμός, τύπος, σύμβολα)

Κατηγόρημα	Αριθμός Ορισμάτων	Τύπος Ορισμάτων	Σύμβολα
σκιέρ	1	Μεταβλητή	x
αρέσει	2	Μεταβλητή, Σταθερά	x, χιόνι

3. Το επόμενο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τις ποσοδείκτες για τις μεταβλητές μας

   x → ∀

   επειδή το «Σε όποιον δεν αρέσει ...» ουσιαστικά υπονοεί το «Σε **όλους** όσους δεν αρέσει ...».

4. Τώρα πρέπει να φτιάξουμε τις ατομικές εκφράσεις (άτομα)

   Βασιζόμαστε στην πρόταση και τον παραπάνω πίνακα και έχουμε τα εξής άτομα: **¬*αρέσει*(x, χιόνι), ¬*σκιέρ*(x)**

5. Το επόμενο βήμα είναι να ενώσουμε τις ατομικές εκφράσεις που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο

   Έχουμε ένα επίπεδο, και μία ομάδα από ατομικές εκφράσεις, οπότε και έχουμε (η σειρά είναι σημαντική):

   {¬*αρέσει*(x, χιόνι), ¬*σκιέρ*(x)}

6. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την σχέση που διέπει κάθε ομάδα ατομικών εκφράσεων

   Η σχέση που διέπει την ομάδα που έχουμε φτιάξει είναι προφανώς η συνεπαγωγή, οπότε γράφουμε:

   {¬*αρέσει*(x, χιόνι) ⟹ ¬*σκιέρ*(x)}

Τα βήματα 7-9 δεν εφαρμόζονται, οπότε και πάμε στο βήμα 10. Η τελική μας πρόταση είναι:

(∀x)¬*αρέσει*(x, χιόνι) ⟹ ¬*σκιέρ*(x)

<u>Μετατροπή ΚΛΠΤ → ΦΓ</u>

1. Απαλοιφή συνεπαγωγής: **(∀x) ¬(¬*αρέσει*(x, χιόνι))** ∨ **¬*σκιέρ*(x)**
2. Περιορισμός άρνησης: **(∀x) (*αρέσει*(x, χιόνι)** ∨ **¬*σκιέρ*(x))**
3. 4 και 5 Μη εφαρμόσιμα
6. **(*αρέσει*(x, χιόνι)** ∨ **¬*σκιέρ*(x))**
7. Μη εφαρμόσιμο
8. { **_αρέσει_(x, χιόνι), ¬_σκιέρ_(x)}**
9. Μη εφαρμόσιμο

{**_αρέσει_(x, χιόνι), ¬_σκιέρ_(x)}**

(2) «Όλοι οι άνθρωποι τρώνε κάποιο φαγητό»

<u>Μετατροπή ΦΓ → ΚΛΠΤ:</u>

1. Αρχικά πρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις και τα κατηγορήματα

   Στη συγκεκριμένη φράση έχουμε <u>τρία κατηγορήματα</u>: *άνθρωπος*, *τρώει*, *φαγητό*. Δεν έχουμε συναρτήσεις.

2. Έπειτα πρέπει να βρούμε τα ορίσματα για τα κατηγορήματά μας (αριθμός, τύπος, σύμβολα)

Κατηγόρημα	Αριθμός Ορισμάτων	Τύπος Ορισμάτων	Σύμβολα
άνθρωπος	1	Μεταβλητή	x
φαγητό	1	Μεταβλητή	y
τρώει	2	Μεταβλητή, Μεταβλητή	x, y

3. Το επόμενο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τις ποσοδείκτες για τις μεταβλητές μας

   x → ∀

   (λόγω του «Όλοι οι άνθρωποι ...»

   y → ∃

   (λόγω του «...κάποιο φαγητό»)

4. Τώρα πρέπει να φτιάξουμε τις ατομικές εκφράσεις (άτομα)

   Βασιζόμαστε στην πρόταση και έχουμε τα εξής άτομα: ***άνθρωπος*(x)**, ***φαγητό*(y)**, ***τρώει*(x,y)**

5. Το επόμενο βήμα είναι να ενώσουμε τις ατομικές εκφράσεις που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο

   Έχουμε ένα επίπεδο, και δύο ομάδες από ατομικές εκφράσεις οπότε και έχουμε (η σειρά είναι σημαντική): **{*άνθρωπος*(x), *φαγητό*(y)}**, **{*τρώει*(x,y)}**

6. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την σχέση που διέπει κάθε ομάδα ατομικών εκφράσεων

   Η σχέση που διέπει την πρώτη ομάδα που έχουμε φτιάξει είναι προφανώς το λογικό and, οπότε γράφουμε:

   {άνθρωπος(x) ∧ φαγητό(y)}

   Η δεύτερη ομάδα περιέχει μόνο ένα άτομο και οπότε δεν υπάρχει κάποια σχέση.

7. Σε αυτό το βήμα ομαδοποιούμε τις ομάδες που βρήκαμε σε κάθε επίπεδο

   {(άνθρωπος(x) ∧ φαγητό(y)), τρώει(x,y)}

8. Σε αυτό το βήμα βρίσκουμε τις σχέσεις για τις ομάδες που φτιάξαμε

   (άνθρωπος(x) ∧ φαγητό(y)) ⟹ τρώει(x,y)

Το βήμα 9 δεν εφαρμόζεται, οπότε και πάμε στο βήμα 10. Η τελική μας πρόταση είναι:

(∀x)(∃y)(*άνθρωπος*(x) ∧ *φαγητό*(y)) ⟹ *τρώει*(x,y)

Μετατροπή ΚΛΠΤ → ΦΓ

1. Απαλοιφή συνεπαγωγής: (∀x)(∃y) ¬(*άνθρωπος*(x) ∧ *φαγητό*(y)) ∨ *τρώει*(x,y)
2. Περιορισμός άρνησης: (∀x)(∃y) (¬*άνθρωπος*(x) ∨ ¬*φαγητό*(y)) ∨ *τρώει*(x,y)
3. Μη εφαρμόσιμο
4. Είναι έτοιμη
5. (∀x) (¬*άνθρωπος*(x) ∨ ¬*φαγητό*(f(x))) ∨ *τρώει*(x,f(x)) (λόγω ύπαρξης ∀ πριν από το ∃)
6. (¬*άνθρωπος*(x) ∨ ¬*φαγητό*(f(x))) ∨ *τρώει*(x,f(x))
7. Μη εφαρμόσιμο
8. {¬*άνθρωπος*(x), ¬*φαγητό*(f(x), *τρώει*(x,f(x))}
9. Μη εφαρμόσιμο

{¬*άνθρωπος*(x), ¬*φαγητό*(f(x), *τρώει*(x,f(x))}

<u>Υπάρχει και εναλλακτική απάντηση:</u>

Στο βήμα 5 να ομαδοποιήσουμε τα άτομα ως εξής: **{*άνθρωπος*(x)}, {*φαγητό*(y)**, ***τρώει*(x,y)}**

Οπότε στο βήμα 6: **{*φαγητό*(y) ⟹ *τρώει*(x,y)}**

στο βήμα 7: **{*άνθρωπος*(x), (*φαγητό*(y) ⟹ *τρώει*(x,y))}**

στο βήμα 8: ***άνθρωπος*(x) ⟹ (*φαγητό*(y) ⟹ *τρώει*(x,y))** και τελικά

βήμα 10: **(∀x)(∃y) *άνθρωπος*(x) ⟹ (*φαγητό*(y) ⟹ *τρώει*(x,y))**

η οποία είναι λογικά ισοδύναμη με την παραπάνω (λόγω του (Α ∧ Β) ⟹ Γ ≡ Α ⟹ (Β ⟹ Γ))

Προφανώς προκύπτει η ίδια ΠΜ.

(3) α) Για κάθε φυσικό αριθμό, υπάρχει μεγαλύτερός του φυσικός αριθμός
β) Ο επόμενος αριθμός κάθε φυσικού αριθμού είναι μεγαλύτερός του

<u>Μετατροπή ΦΓ → ΚΛΠΤ:</u>

Με τον ίδιο τρόπο, που μετά κάποια εξοικείωση χρησιμοποιείται σχεδόν αυτόματα, χωρίς κάποια συγκεκριμένη αναφορά στα βήματα, και με βάση τα δοθέντα κατηγορήματα, έχουμε:

α) Για κάθε φυσικό αριθμό, υπάρχει μεγαλύτερός του φυσικός αριθμός

$$(\forall x)\ \boldsymbol{\varphi\upsilon\sigma}(x) \Longrightarrow (\exists y)\ (\boldsymbol{\varphi\upsilon\sigma}(y) \land \boldsymbol{\mu\varepsilon\gamma\alpha\pi o}(y,x))$$

β) Ο επόμενος αριθμός κάθε φυσικού αριθμού είναι μεγαλύτερός του

$$(\forall x)\ \boldsymbol{\varphi\upsilon\sigma}(x) \Longrightarrow \boldsymbol{\mu\varepsilon\gamma\alpha\pi o}(\mathbf{\varepsilon\pi o\mu}(x),x))$$

<u>Μετατροπή ΚΛΠΤ → ΠΜ:</u>

α) (∀x) φυσ(x) ⟹ (∃y) (φυσ(y) Λ μεγαπο(y,x))

1. Απαλοιφή συνεπαγωγής: (∀x) (¬*φυσ*(x) V (∃y) (*φυσ*(y) Λ *μεγαπο*(y,x)))
2. Μη εφαρμόσιμο
3. Μη εφαρμόσιμο
4. (∀x) (∃y) (¬*φυσ*(x) V (*φυσ*(y) Λ *μεγαπο*(y,x)))
5. (∀x) (¬*φυσ*(x) V (*φυσ*(f(x)) Λ *μεγαπο*(f(x),x))) (λόγω ύπαρξης ∀ πριν από το ∃)
6. (¬*φυσ*(x) V (*φυσ*(f(x)) Λ *μεγαπο*(f(x),x)))
7. (¬*φυσ*(x) V *φυσ*(f(x))) Λ (¬*φυσ*(x) V *μεγαπο*(f(x),x))
8. {¬*φυσ*(x), *φυσ*(f(x))} και {¬*φυσ*(x), *μεγαπο*(f(x),x)}
9. {¬*φυσ*(x1), *φυσ*(f(x1))} και {¬*φυσ*(x2), *μεγαπο*(f(x2),x2)}

{¬*φυσ*(x1), *φυσ*(f(x1))}
{¬*φυσ*(x2), *μεγαπο*(f(x2),x2)}

Παράγονται δύο προτάσεις ΠΜ.

β) (∀x) φυσ(x) ⟹ μεγαπο(επομ(x),x))

Με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει (εφαρμόσιμα βήματα 1, 6 και 8):

{¬***φυσ*(x), *μεγαπο*(επομ(x),x))}**

(4) Τα στρείδια και τα μύδια είναι όστρακα.

<u>Μετατροπή ΦΓ → ΚΛΠΤ:</u>

(∀x) (*στρείδι*(x) ∨ *μύδι*(x)) ⟹ *όστρακο*(x)

<u>Μετατροπή ΚΛΠΤ → ΠΜ:</u>

1. Απαλοιφή συνεπαγωγής: (∀x) ¬ (*στρείδι*(x) ∨ *μύδι*(x)) ∨ *όστρακο*(x)
2. (∀x) (¬*στρείδι*(x) ∧ ¬*μύδι*(x)) ∨ *όστρακο*(x)
3. Μη εφαρμόσιμο
4. Μη εφαρμόσιμο
5. Μη εφαρμόσιμο
6. (¬*στρείδι*(x) ∧ ¬*μύδι*(x)) ∨ *όστρακο*(x)
7. (¬*στρείδι*(x) ∨ *όστρακο*(x)) ∧ (¬*μύδι*(x) ∨ *όστρακο*(x))
8. {¬*στρείδι*(x) ∨ *όστρακο*(x)} και {¬*μύδι*(x) ∨ *όστρακο*(x)}
9. {¬*στρείδι*(x1), *όστρακο*(x1)} και {¬*μύδι*(x2), *όστρακο*(x2)}

{¬*στρείδι*(x1), *όστρακο*(x1)}
{¬*μύδι*(x2), *όστρακο*(x2)}

Προκύπτουν δύο προτάσεις ΠΜ.

★ ★ ★

Β. Για την μετατροπή της πρότασης ΦΓ

«Αν ένα σκεύασμα τροφίμων είναι αποστειρωμένο, τότε δεν περιέχει ζωντανά βακτήρια»

δοθήκαν οι παρακάτω απαντήσεις:

(1) (∀x) (σκ(x) Λ αποστ(x)) ⇒ ¬(∃y) (βακτ(y) Λ περ(y,x) Λ ζωντ(y))
(2) (∀x) (∀y) (σκ(x) Λ αποστ(x) Λ βακτ(y) Λ ζωντ(y)) ⇒ ¬περ(y,x)
(3) (∀x) (σκ(x) Λ αποστ(x)) ⇒ ((∀y) (βακτ(y) Λ ζωντ(y)) ⇒ ¬περ(y,x))
(4) (∀x) (∀y) (σκ(x) Λ αποστ(x) Λ βακτ(y) Λ περ(y,x)) ⇒ ¬ ζωντ(y)

Ποια ή ποιες από αυτές είναι σωστή/ές;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Φαίνεται καθαρά ότι η πρόταση (1) ανταποκρίνεται στην πρόταση ΦΓ. Όμως αν μετατρέψουμε όλες τις προτάσεις σε ΠΜ, θα διαπιστώσουμε ότι όλες καταλήγουν στην ίδια ΠΜ:

{¬σκ(x), ¬αποστ(x), ¬βακτ(y), ¬ζωντ(y), ¬περ(y,x)}

επομένως είναι ισοδύναμες, άρα **όλες είναι σωστές**.

Γενικά, δύο λογικά ισοδύναμες προτάσεις ΚΛΠΤ έχουν την ίδια ΠΜ.