Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα 7 : Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Η έννοια του Γραμμικού Μετασχηματισμού
- Το μητρώο Γραμμικού Μετασχηματισμού
- Αλλαγή βάσης
- Διαγωνοποίηση και Ψευδοαντίστροφος

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

1. Σχετικά με το SVD.
2. Ιδιότητες και χρήση στην προσέγγιση μητρώου με μητρώα μειωμένης τάξης
3. Σχετικά με τον υπολογισμό του SVD.
4. Ψευδοαντίστροφο μητρώο και SVD.
5. Εισαγωγή στους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς.

Σήμερα συζητάμε τους **Γραμμικούς Μετασχηματισμούς:**

1. Ορισμένοι ενδιαφέροντες στοιχειώδεις γραμμικοί μετασχηματισμοί
2. Αναπαράσταση γραμμικών μετασχηματισμών με μητρώα
3. Επίλυση γραμμικού συστήματος: Ερμηνεία ως αλλαγή βάσης αναπαράστασης
4. Πολλαπλασιασμός μητρώου-διανύσματος: Ερμηνεία βάσει ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοτιμών
5. Σύνθεση Γραμμικών Μετασχηματισμών

Υπό συζήτηση ενότητες

Μητρώα και Γραμμικοί μετασχηματισμοί (Strang, κεφ. 7)

Ορισμός

Ένας μετασχηματισμός $\mathcal{T} : V \to W$ μεταξύ δ.χ. V και W για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathcal{T}(\alpha v + \beta w) = \alpha \mathcal{T}(v) + \beta \mathcal{T}(w)$$

καλείται γραμμικός μετασχηματισμός (ΓΜ). Από τη γραμμικότητα έπεται ότι $\mathcal{T}(0) = 0$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα: $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}$ και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x - 2y + z.$

Παράδειγμα $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ (προβολή)

Παράδειγμα $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}.$

Παράδειγμα: $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3, \mathcal{W} = \mathbb{R}^2$, και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\xi_1 \\ \gamma_2\xi_2 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα: $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2, \mathcal{W} = \mathbb{R}^3$, και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\xi_1 \\ \gamma_2\xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ποικιλία μετασχηματισμών

Κλιμάκωση, **Διάτμηση**, **Προβολή**, **Περιστροφή**, **Ανάκλαση**, **Ανύψωση**

Παρατήρηση:

- Οι παραπάνω ΓΜ αναπαρίστανται με μητρώα με ειδική δομή.
- Σε πολλές περιπτώσεις, το σύνολο των ΓΜ μιας κατηγορίας ικανοποιεί τις απαραίτητες συνθήκες ως προς τη σύνθεση ΓΜ για να χαρακτηριστεί αλγεβρική **ομάδα**.
- Τα αντίστοιχα μητρώα αποτελούν ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό.
- Για παράδειγμα, οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, δηλ. όσοι διατηρούν την ευκλείδεια απόσταση.

Ορθογώνια ομάδα $O(n)$ I

Αποτελείται από τους ΓΜ που διατηρούν τις ευκλείδειες αποστάσεις και το ευκλείδειο μέτρο:

$$O(n) = \{\mathcal{T} | \|u\|_2 = \|\mathcal{T}(u)\|_2, \forall u \in \mathcal{V}\}$$

Τα μητρώα που αναπαριστούν αυτούς τους μετασχηματισμούς είναι ορθογώνια.

- Τα μητρώα που αναπαριστούμε αυτούς τους μετασχηματισμούς είναι ορθογώνια.
- η ορίζουσα των μητρώων της $O(n)$ είναι ± 1.
- Τα μητρώα με ορίζουσα 1 αντιστοιχούν σε ειδική ορθογώνια ομάδα με το όνομα $SO(n)$.

Ορθογώνια ομάδα $O(n)$ II

Το σύνολο των ΓΜ $O(n)$ είναι αλγεβρική ομάδα ως προς τη σύνθεση (πολλαπλασιασμό μητρώων) γιατί:

1. είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση (αντίστοιχα, ως προς τον πολλαπλασιασμό)
2. ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα
3. περιέχει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό
4. περιέχει τον αντίστροφο μετασχηματισμό

Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί

Οποιοδήποτε ορθογώνιο μητρώο 2×2 θα είναι της μορφής $\begin{pmatrix} \pm\zeta & \pm\sqrt{1-\zeta^2} \\ \pm\sqrt{1-\zeta^2} & \pm\zeta \end{pmatrix}$ για παράδειγμα

<u>περιστροφή</u> $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$,

<u>ανάκλαση</u> $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$

Υπερβολική περιστροφή

Είναι μετασχηματισμοί της μορφής

$$\begin{pmatrix} \cosh(\psi) & \sinh(\psi) \\ \sinh(\psi) & \cosh(\psi) \end{pmatrix}$$

Ονομάζονται υπερβολικές περιστροφές γιατί αν $[\alpha, \beta]$ είναι οποιοδήποτε σημείο που κείται επί της μοναδιαίας υπερβολής, δηλ.

$$\{(\alpha, \beta) | \alpha^2 - \beta^2 = 1\}$$

οπότε υπάρχει θ τ.ώ.

$$\alpha = \cosh(\theta), \beta = \sinh(\theta)$$

ισχύει ότι

$$\begin{pmatrix} \cosh(\psi) & \sinh(\psi) \\ \sinh(\psi) & \cosh(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\theta) \\ \sinh(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\psi)\cosh(\theta) + \sinh(\psi)\sinh(\theta) \\ \sinh(\psi)\cosh(\theta) + \cosh(\psi)\sinh(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\theta + \psi) \\ \sinh(\theta + \psi) \end{pmatrix}$$

Μετατόπιση κατά $u_0 \neq 0$ $\mathcal{T} v = v + u_0$ δεν είναι ΓΜ

Παραγώγιση $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής που διαθέτουν παραγώγους όλων των τάξεων και D ο τελεστής παραγώγισης.

Θεμελιώδης γραμμικός μετασχηματισμός

Αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και ορίσουμε

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ ως } \mathcal{T}(v) = Av$$

ο μετασχηματισμός $\mathcal{T}$ είναι γραμμικός.

Απόδειξη.

$$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2). \quad \square$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Αυτό είναι το πιο σημαντικό και γενικό είδος ΓΜ. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιονδήποτε ΓΜ με μητρώο.

Πυρήνας και εικόνα

Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$,

Πεδίο ορισμού ο δ.χ. $\mathcal{V}$ επί των στοιχείων του οποίου εφαρμόζεται ο $\mathcal{T}$.

Συμπεδίο ο δ.χ. $\mathcal{W}$ στον οποίον απεικονίζονται τα στοιχεία του $\mathcal{V}$ με την εφαρμογή του $\mathcal{T}$.

Πεδίο τιμών $\text{image}(\mathcal{T}) := \{\mathcal{T}v | v \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{W}$ (σύνολο εξαγομένων στοιχείων)

Πυρήνας $\text{kernel}(\mathcal{T}) := \{v \in \mathcal{V} | \mathcal{T}v = 0\} \subseteq \mathcal{V}$

Αν $A_{\mathcal{T}}$ είναι μητρώο που αντιστοιχεί στον $\mathcal{T}$ τότε

$$\text{image}(\mathcal{T}) = \text{range}(A_{\mathcal{T}}), \;\; \text{kernel}(\mathcal{T}) = \text{null}(A_{\mathcal{T}})$$

Ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός

- Αν $b \neq 0$, ο μετασχηματισμός $x \to Ax + b$ δεν είναι ΓΜ.
- Έχει όμως ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό: Αν $\mathcal{T}(x) = Ax + b$ τότε

$$\mathcal{T}(x_1) - \mathcal{T}(x_2) = A(x_1 - x_2) \in \mathrm{range}(A)$$

- Δηλαδή το διάνυσμα της διαφοράς δύο οιονδήποτε διανυσμάτων που ανήκουν στο πεδίο τιμών του $\mathcal{T}$ ανήκει πάντα σε έναν υπόχωρο (στην περίπτωσή μας στον $\mathrm{range}(A)$.) Για το λόγο αυτό, το σύνολο των τιμών $\{y = Ax + b | x \in \mathcal{V}\}$ καλείται πεπλατυσμένο[1] (flat) ή συσχετισμένος χώρος (affine space).
- Η ονομασία flat προέρχεται από την ιδιότητα ότι το διάνυσμα που συνδέει οποιαδήποτε στοιχεία κείται εξ ολοκλήρου σε έναν διανυσματικό υπόχωρο (το επίπεδο).

[1] Δείτε Strang σελ. 564-5.

ΓΜ και Μητρώα

Βασική ιδέα

Κάθε ΓΜ μπορεί να αναπαρασταθεί με μητρώο

Βασικά ερωτήματα Ποιό είναι το μητρώο; Είναι μοναδικό; Πώς το κατασκευάζουμε;

ΓΜ και Μητρώα

Βασική ιδέα

Κάθε ΓΜ μπορεί να αναπαρασταθεί με μητρώο

Βασικά ερωτήματα Ποιό είναι το μητρώο; Είναι μοναδικό; Πώς το κατασκευάζουμε;

Ισχύει λόγω γραμμικότητας

$$v = \gamma_1 v_1 + \cdots \gamma_n v_n \Rightarrow \mathcal{T}(v) = \gamma_1 \mathcal{T}(v_1) + \cdots \gamma_n \mathcal{T}(v_n)$$

Προσοχή: Αν $\{v_1, ..., v_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$ και είναι γνωστά τα διανύσματα $\mathcal{T}(v_1), \ldots, \mathcal{T}(v_n)$, τότε από τη γραμμικότητα είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathcal{T}(v)$ συνδυάζοντας με τους ίδιους συντελεστές γ_i τα διανύσματα $\mathcal{T}(v_1), \ldots, \mathcal{T}(v_n)$.

Κεντρική ιδέα

Στόχος: Να κατασκευάσουμε μητρώο για την αναπαράσταση του $\mathcal{T}$.

Παρατήρηση: Το μητρώο εξαρτάται από τις βάσεις των δ.χ. $\mathcal{V}, \mathcal{W}$.

1. Επιλέγουμε βάση για το $\mathcal{W}$.
2. Εκφράζουμε κάθε διάνυσμα $\mathcal{T}(v_j)$ ως προς αυτή τη βάση.

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ τ.ώ. για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Βάσεις και μητρώα

Ενότητα 7.3 (Strang)

Δοθείσης μίας βάσης $\{v_1, \ldots, v_n\}$ για το δ.χ. $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε διάνυσμα v ως γραμμικό συνδυασμό αυτών των διανυσμάτων:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

και εν συντομία $v = Va$ όπου $V = (v_1, ..., v_n)$.

- Το V αποκαλείται μητρώο βάσης.
- Το $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (προσέξτε - αναφερόμαστε σε βάση όλου του $\mathbb{R}^n$) είναι αντιστρέψιμο, άρα ισχύει ότι

$$v = V(V^{-1}v), \text{ όπου } a = V^{-1}v.$$

- Τα στοιχεία του $a = V^{-1}v$ είναι οι συντεταγμένες του v ως προς τη βάση V.
- Το V^{-1} αποκαλείται μητρώο αλλαγής βάσης.
- Η βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ αποκαλείται κανονική βάση. Το μητρώο βάσης γι' αυτήν είναι το ταυτοτικό (I).

Ο ρόλος των βάσεων στους ΓΜ

Έστω ο μετασχηματισμός $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ και τα μητρώα βάσης $V = (v_1, \ldots, v_n)$ και $W = (w_1, \ldots, w_m)$ για τον καθένα. Για κάθε v_j,

$$\mathcal{T}(v_j) \quad = \quad W a_j, \text{ όπου } a_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{m,j} \end{pmatrix}, \text{ για } j = 1, \ldots, n.$$

Ο ρόλος των βάσεων στους ΓΜ

Έστω ο μετασχηματισμός $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ και τα μητρώα βάσης $V = (v_1, \ldots, v_n)$ και $W = (w_1, \ldots, w_m)$ για τον καθένα. Για κάθε v_j,

$$\mathcal{T}(v_j) \quad = \quad Wa_j, \text{ όπου } a_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{m,j} \end{pmatrix}, \text{ για } j = 1, \ldots, n.$$

Άρα

$$(\mathcal{T}(v_1) \quad \cdots \quad \mathcal{T}(v_n)) \quad = \quad (w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ο ρόλος των βάσεων στους ΓΜ

Έστω ο μετασχηματισμός $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ και τα μητρώα βάσης $V = (v_1, ..., v_n)$ και $W = (w_1, ..., w_m)$ για τον καθένα. Για κάθε v_j,

$$\mathcal{T}(v_j) \quad = \quad Wa_j, \text{ όπου } a_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{m,j} \end{pmatrix}, \text{ για } j = 1, \ldots, n.$$

Άρα

$$(\mathcal{T}(v_1) \quad \cdots \quad \mathcal{T}(v_n)) \quad = \quad (w_1, ..., w_n) \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

άρα

$$\begin{aligned} w &= \mathcal{T}(v) = \gamma_1 \mathcal{T}(v_1) + \cdots + \gamma_n \mathcal{T}(v_n) \\ w &= WA_{\mathcal{T}}c, \text{ όπου } c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top. \end{aligned}$$

- Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με μητρώο, $A_{\mathcal{T}}$, που εξαρτάται από τις βάσεις στα V, W.
- Ανάλογα με την επιλογή βάσεων το μητρώο που αναπαριστά τον μετασχηματισμό μπορεί να είναι διαφορετικό. Επιτελεί όμως τον ίδιο μετασχηματισμό!

Γενικά Τα στοιχεία του μητρώου $A_{\mathcal{T}}$ προκύπτουν από τις εκφράσεις

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{T}(v_1) & = & \alpha_{11}w_1 + \cdots + \alpha_{m1}w_m \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathcal{T}(v_n) & = & \alpha_{1n}w_1 + \cdots + \alpha_{mn}w_m,
\end{array}$$

Γενικά Τα στοιχεία του μητρώου $A_{\mathcal{T}}$ προκύπτουν από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(v_1) &= \alpha_{11} w_1 + \cdots + \alpha_{m1} w_m \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
\mathcal{T}(v_n) &= \alpha_{1n} w_1 + \cdots + \alpha_{mn} w_m,
\end{aligned}$$

$$A_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Γενικά Τα στοιχεία του μητρώου $A_{\mathcal{T}}$ προκύπτουν από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(v_1) &= \alpha_{11}w_1 + \cdots + \alpha_{m1}w_m \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
\mathcal{T}(v_n) &= \alpha_{1n}w_1 + \cdots + \alpha_{mn}w_m,
\end{aligned}$$

$$A_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Αν κάποια βάση αλλάξει, αλλάζει και το μητρώο (αλλά ο μετασχηματισμός παραμένει ίδιος).

Μητρώο μετασχηματισμού ως προς τις τυπικές βάσεις

Όταν $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n, \mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ με τις τυπικές βάσεις

$$V = \{e_1^{(1)}, \ldots, e_n^{(n)}\}, \quad W = \{e_1^{(m)}, \ldots, e_m^{(m)}\}$$

τότε το $A_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι το μητρώο που στην στήλη $j = 1, \ldots, n$ περιέχει τους συντελεστές που εκφράζουν το $\mathcal{T}(e_j^{(n)})$ ως προς τη βάση $e_1^{(m)}, \ldots, e_m^{(m)}$.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί στον Απειροστικό Λογισμό

Υπενθύμιση Η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί επί επιλεγμένων διανυσματικών χώρων (συναρτήσεων).

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \mathcal{D} f + \beta \mathcal{D} g \\ \int (\alpha f + \beta g) &= \alpha \int f + \beta \int g \end{aligned}$$

Προσοχή: Ποιά είναι τα μητρώα;

Βήμα 1: Πρέπει να ορίσουμε επακριβώς τους δ.χ. Για το συγκεκριμένο μάθημα[2]. Για παράδειγμα $\mathbb{P}_k$, ο χώρος συναρτήσεων που είναι πολυώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου με k. Θεωρούμε ότι

$$\mathcal{D} : \mathbb{P}_k \to \mathbb{P}_{k-1}$$

Βάσεις: $V = \{1, x, x^2, ..., x^k\}, W = \{1, x, x^2, ..., x^{k-1}\}$.

$$A_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times (k+1)}$$

[2] ... και για να αποφύγουμε την Συναρτησιακή Ανάλυση ...

η ολοκλήρωση;

Προσοχή Αυτή τη φορά $\int : \mathbb{P}_{k-1} \to \mathbb{P}_k$. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες βάσεις με πριν:

$$A_{\int} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times k}$$

$$\mathcal{T}(1 + 9x^2) = 1x + 3x^3 \text{ και με μητρώα } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Προσέξτε ότι

$$A_{\mathcal{D}}A_{\int} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = I_k$$

<u>Ορολογία</u> Το $A_{\mathcal{D}}$ αποκαλείται αριστερό αντίστροφο του $A_{\int}$. Υπάρχουν και αριστέρα αντίστροφα!

$$A_{\int}A_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & I_k \end{pmatrix}$$

Μητρώα και Γραμμικοί Μετασχηματισμοί I

Το μητρώο αναπαράστασης εξαρτάται από τις βασεις που επιλέγουμε.
Για ορισμένες βάσεις το μητρώο μπορεί να είναι πολύ πιο απλό από άλλες. Θα είναι χρήσιμο να τις βρούμε!!!

Μητρώα και Γραμμικοί Μετασχηματισμοί II

Σημαντική περίπτωση: Αν ένα μητρώο, A, είναι διαγωνιοποιήσιμο, τα ιδιοδιανύσματα δημιουργούν βάση. Τότε το μητρώο αναπαράστασης του μετασχηματισμού που επιτελείται από το A ως προς αυτή τη βάση είναι διαγώνιο (το μητρώο των ιδιοτιμών):

$$y = Ax \Leftrightarrow V(V^{-1}y) = V^{-1}AV(V^{-1}x) = \Lambda(V^{-1}x).$$

Προσέξτε: Τα $V^{-1}x$ και $V^{-1}y$ είναι οι αναπαραστάσεις των διανυσμάτων x, y στη βάση V.

Ερμηνεία πολλαπλασιασμού μητρώου με διάνυσμα μέσω του SVD

Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και έστω ότι $x \in \mathbb{R}^n$ και ότι $A = U\Sigma V^\top$ το SVD του μητρώου. Προσέξτε ότι $y = Ax = U(\Sigma(V^\top x))$ που είναι η αναπαράσταση του y ως προς τη βάση που περιέχεται στο U.

$V^\top x$ εκφράζει τις συνιστώσες του $x \in \mathbb{R}^n$ ως προς την ορθογώνια βάση V. Επιτελείται ορθογώνιος μετασχηματισμός του x (π.χ. περιστροφή).

$\Sigma(V^\top x)$ κλιμάκωση των στοιχείων του $V^\top x$ και διατήρηση μόνο μερικών από αυτά. Ειδικότερα όταν $m \geq n$

$$\Sigma = I_{m,n}\hat{\Sigma}_{n,n}$$

που επιτελεί πρώτα την κλιμάκωση των στοιχείων στις θέσεις $1, ..., n$ του $V^\top x$ κατά $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ και μετά 'αναβιβάζει' τα στοιχεία του στον $\mathbb{R}^m$. Αντίστοιχη ερμηνεία και όταν $n \geq m$.

$U(\Sigma(V^\top x))$ Δημιουργία του τελικού Ax ως γραμμικού συνδυασμού των στοιχείων της ΟΚ βάσης U.

Σύνθεση ΓΜ = Πολλαπλασιασμός μητρώων

Η σύνθεση των γραμμικών μετασχηματισμών αναπαρίσταται ως πολλαπλασιασμός μητρώων

Αν

$$\mathcal{S} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \ \ \mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$
$$\mathcal{T} \circ \mathcal{S} : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

Αν αναπαραστήσουμε τον $\mathcal{S}$ με το μητρώο $A_{\mathcal{S}}$ και το $\mathcal{T}$ με το $A_{\mathcal{T}}$, τότε ο μετασχηματισμός $T \circ S$ αναπαρίσταται από το γινόμενο $A_T A_S$.

Αλλαγή βάσης : Παράδειγμα

Η επίλυση συστήματος $Ax = b$ ισοδυναμεί με την απάντηση στο ερώτημα

Πώς εκφράζουμε το διάνυσμα b ως προς τη βάση $[a_1, \ldots, a_n]$;

Προφανώς για να υπάρχει λύση, θα πρέπει τα a_j να είναι γραμμικά ανεξάρτητα!

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών - Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας