ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα 7 : Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Η έννοια του Γραμμικού Μετασχηματισμού
- Το μητρώο Γραμμικού Μετασχηματισμού
- Αλλαγή βάσης
- Διαγωνοποίηση και Ψευδοαντίστροφος

Περιεχόμενα

Θέματα

Μητρώα και Γραμμικοί μετασχηματισμοί (Strang, κεφ. 7)

Ορισμός

Ένας μετασχηματισμός $\mathcal{T} : V \to W$ μεταξύ δ.χ. V και W για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathcal{T}(\alpha v + \beta w) = \alpha \mathcal{T}(v) + \beta \mathcal{T}(w)$$

καλείται γραμμικός μετασχηματισμός (ΓΜ). Από τη γραμμικότητα έπεται ότι $\mathcal{T}(0) = 0$.

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τ.ώ. για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + 3\xi_1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\psi_1 \\ \alpha\xi_2 + \beta\psi_2 \end{pmatrix} & \to \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\psi_1 \\ (\alpha\xi_2 + \beta\psi_2) + 3(\alpha\xi_1 + \beta\psi_1) \end{pmatrix} \\ & \to \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + 3\xi_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 + 3\psi_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

άρα

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \beta \mathcal{T}(y)$$

Παραδείγματα I

$\mathcal{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τ.ώ. για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\xi_1\cos\phi - \xi_2\sin\phi\\ \xi_1\cos\phi + \xi_2\sin\phi\end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned}\alpha\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \quad &\to \quad \begin{pmatrix}(\alpha\xi_1+\beta\psi_1)\cos\phi - (\alpha\xi_2+\beta\psi_2)\sin\phi\\ (\alpha\xi_1+\beta\psi_1)\cos\phi + (\alpha\xi_2+\beta\psi_2)\sin\phi\end{pmatrix}\\ &\to \quad \alpha\begin{pmatrix}\xi_1\cos\phi - \xi_2\sin\phi\\ \xi_1\cos\phi + \xi_2\sin\phi\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\psi_1\cos\phi - \psi_2\sin\phi\\ \psi_1\cos\phi + \psi_2\sin\phi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(1)

άρα

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) \quad = \quad \alpha\mathcal{T}(x) + \beta\mathcal{T}(y)$$

Παρατήρηση: Ο εν λόγω ΓΜ $\mathcal{T}$ επιτελεί αριστερόστροφη περιστροφή του ορίσματος κατά γωνία ϕ.

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ όπου για κάποιο $a_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$, ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου για κάποιο $a_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$, ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Αποδείξτε ότι οι παραπάνω μετασχηματισμοί δεν είναι γραμμικοί.

Παραδείγματα

$\mathcal{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} & \to \begin{pmatrix} \alpha\xi_2 + \beta\psi_2 \\ \alpha\xi_1 + \beta\psi_1 \end{pmatrix} \\ & \to \alpha \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

άρα

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \beta \mathcal{T}(y)$$

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, επιτελεί προβολή:

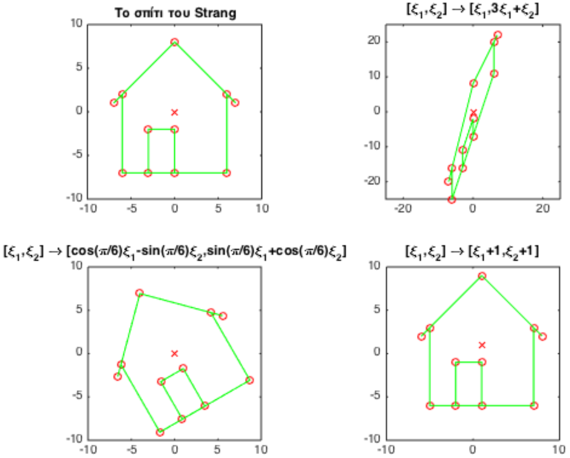
$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\to \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

άρα

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{T}(x) + \beta\mathcal{T}(y)$$


Το σπίτι του Strang
$[\xi_1,\xi_2] \to [\xi_1, 3\xi_1+\xi_2]$
$[\xi_1,\xi_2] \to [\cos(\pi/6)\xi_1-\sin(\pi/6)\xi_2, \sin(\pi/6)\xi_1+\cos(\pi/6)\xi_2]$
$[\xi_1,\xi_2] \to [\xi_1+1, \xi_2+1]$

Μητρώα που συνδέονται με γραμμικούς μετασχηματισμούς

Για οποιονδήποτε γραμμικό μετασχηματισμό

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

υπάρχει διάνυσμα $a \in \mathbb{R}^n$ τ.ώ,

$$\mathcal{T}(x) \quad = \quad a^\top x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Αντίστοιχα, αν

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

υπάρχει μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τ.ώ,

$$\mathcal{T}(x) \quad = \quad Ax, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Παραδείγματα γραμμικών μετασχηματισμών

Στο χώρο $\mathbb{R}^2$

Είδαμε ήδη ότι η προβολή και η περιστροφή είναι ΓΜ.
Στον $\mathbb{R}^{2\times 2}$, ως προς την τυπική βάση

Ανάκλαση $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

Κλιμάκωση $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

Διάτμηση $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ (η γραμμή $x = \zeta$ μετακινείται κατά κατά $\alpha\zeta$ ως προς το y).

<u>Προσοχή:</u> Αξίζει να εξετάσετε την εφαρμογή των παραπάνω σε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, $x = (\cos\phi, \sin\phi)^\top$.

Παραδείγματα ΓΜ Ι

Προβολή $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

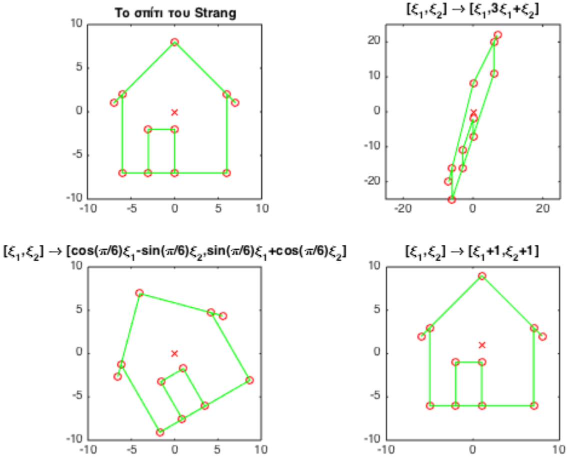
Παραδείγματα ΓΜ II

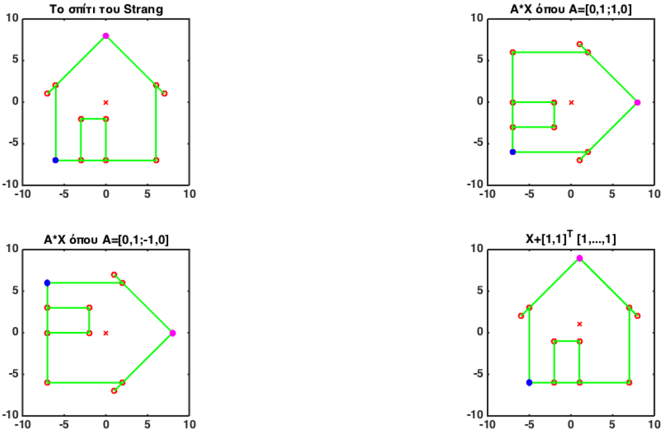
Κλιμάκωση και προβολή: $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$, και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\gamma_1\xi_1\\ \gamma_2\xi_2\end{pmatrix}$ Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A = \begin{pmatrix}\gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2 & 0\end{pmatrix}$$

Κλιμάκωση και εξύψωση: $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$, και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\gamma_1\xi_1\\ \gamma_2\xi_2\\ 0\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$


Το σπίτι του Strang
$[\xi_1,\xi_2] \to [\xi_1, 3\xi_1+\xi_2]$
$[\xi_1,\xi_2] \to [\cos(\pi/6)\xi_1-\sin(\pi/6)\xi_2, \sin(\pi/6)\xi_1+\cos(\pi/6)\xi_2]$
$[\xi_1,\xi_2] \to [\xi_1+1, \xi_2+1]$
10
5
0
-5
-10
20
-20



Το σπίτι του Strang
A*X όπου A=[0,1;1,0]
A*X όπου A=[0,1;-1,0]
X+[1,1]^T [1,...,1]
10
5
0
-5
-10
-10 -5 0 5 10

Θεμελιώδης Γραμμικός Μετασχηματισμός

Αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και ορίσουμε το μετασχηματισμό

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ ως } \mathcal{T}(v) = Av$$

αυτός θα είναι οπωσδήποτε γραμμικός.

Απόδειξη.

$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2)$. □

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Αυτό είναι το πιο σημαντικό και γενικό είδος ΓΜ.

$\boxed{\text{κάθε ΓΜ μπορεί να αναπαρασταθεί ως μητρώο}}$

Στη συνέχεια θα δούμε ορισμένες έννοιες που ήδη ορίσαμε για τα μητρώα στην περίπτωση των ΓΜ. Η ορολογία είναι κάπως διαφορετική.

ΓΜ και Μητρώα

Βασική ιδέα

Κάθε ΓΜ μπορεί να αναπαρασταθεί με μητρώο

Βασικά ερωτήματα

- Ποιό είναι το μητρώο;
- Είναι μοναδικό;
- Πώς το κατασκευάζουμε;

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ