Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **6** : Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Εύρεση Ιδιοτιμών & Ιδιοδιανυσμάτων
- Διαγωνοποιήση Μητρώων
- Συμμετρικά, Συμμετρικά και Θετικά Ορισμένα, Όμοια Μητρώα
- Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Συζητάμε το **Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)**

1. Μέθοδος δύναμης (απλή μέθοδος υπολογισμού ιδιοζεύγους)
2. Ρίζες πολυωνύμου με γραμμική άλγεβρα: το συνοδευτικό μητρώο.
3. Λύση γραμμικού συστήματος από το φασματικό ανάπτυγμα.
4. Παραγοντοποιήσεις μητρώων.
5. Εισαγωγή στην παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών.

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Συζητάμε το **Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)**

1. Μέθοδος δύναμης (απλή μέθοδος υπολογισμού ιδιοζεύγους)
2. Ρίζες πολυωνύμου με γραμμική άλγεβρα: το συνοδευτικό μητρώο.
3. Λύση γραμμικού συστήματος από το φασματικό ανάπτυγμα.
4. Παραγοντοποιήσεις μητρώων.
5. Εισαγωγή στην παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών.

Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Σχετικά με το SVD.
2. Ιδιότητες και χρήση στην προσέγγιση μητρώου με μητρώα μειωμένης τάξης
3. Σχετικά με τον υπολογισμό του SVD.
4. Ψευδοαντίστροφο μητρώο και SVD.
5. Εισαγωγή στους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς.

Υπό συζήτηση ενότητες

Παραγοντοποιήσεις

Παραδείγματα[1] $A = WKH$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Θέσαμε $r = \mathrm{rank}(A)$ (προσέξτε, ορισμένες παραγοντοποιήσεις προϋποθέτουν τετραγωνικό A):

παραγοντοποίηση	W	K	H
$A = BC$ (τάξης)	$B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, r στήλες οδηγών A		$C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, μη μηδεν. γραμμές ΑΓΚΜ
$A = QR$ $A = Q_1 R_1$	$Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ορθογώνιο $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, ΟΚ στήλες		$R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ άνω τριγωνικό $R_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ άνω τριγωνικό
$A = QTQ^*$ (Schur)	Q ορθομοναδιαίο	άνω τριγωνικό T	Q^*
$A = XJX^{-1}$ (ΑΠΙ)	X αντιστρέψιμο	μορφή Jordan J	X^{-1}
$A = X\Lambda X^{-1}$ διαγ/σιμο (ΑΠΙ)	X αντιστρέψιμο	διαγώνιο Λ	X^{-1}
$A = Q\Lambda Q^\top$ συμμετρικό (ΑΠΙ)	Q ορθογώνιο	διαγώνιο Λ	$Q^\top$

Πρόκληση: Να διαγωνιοποιήσουμε οποιοδήποτε μητρώο (ακόμα και μη τετραγωνικό) με ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

[1] Δείτε τον εκτενή κατάλογο στο σύγγραμμα του Strang.

Παραγοντοποιήσεις

Παραδείγματα[1] $A = WKH$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Θέσαμε $r = \mathrm{rank}(A)$ (προσέξτε, ορισμένες παραγοντοποιήσεις προϋποθέτουν τετραγωνικό A):

παραγοντοποίηση	W	K	H
$A = BC$ (τάξης)	$B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, r στήλες οδηγών A		$C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, μη μηδεν. γραμμές ΑΓΚΜ
$A = QR$ $A = Q_1R_1$	$Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ορθογώνιο $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, ΟΚ στήλες		$R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ άνω τριγωνικό $R_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ άνω τριγωνικό
$A = QTQ^*$ (Schur)	Q ορθομοναδιαίο	άνω τριγωνικό T	Q^*
$A = XJX^{-1}$ (ΑΠΙ)	X αντιστρέψιμο	μορφή Jordan J	X^{-1}
$A = X\Lambda X^{-1}$ διαγ/σιμο (ΑΠΙ)	X αντιστρέψιμο	διαγώνιο Λ	X^{-1}
$A = Q\Lambda Q^\top$ συμμετρικό (ΑΠΙ)	Q ορθογώνιο	διαγώνιο Λ	$Q^\top$
$A = U\Sigma V^\top$ (SVD) $A = U_1\hat{\Sigma}V_1^\top$ (SVD)	$U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ορθογώνιο $U_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$ ΟΚ στήλες	διαγ. $\Sigma \geq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, με r θετικά στοιχεία διαγ. $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, με r θετικά στοιχεία	$V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιο $V_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ ΟΚ γραμμές

Πρόκληση: Να διαγωνιοποιήσουμε οποιοδήποτε μητρώο (ακόμα και μη τετραγωνικό) με ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

[1] Δείτε τον εκτενή κατάλογο στο σύγγραμμα του Strang.

Διάσπαση ιδιάζουσας τιμής (SVD)

Κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ όπου $m \geq n$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως γινόμενο δύο ορθογώνιων $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ενός πραγματικού, μη αρνητικού και διαγώνιου μητρώου $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ως εξής

$$
\begin{aligned}
A &= U\Sigma V^\top = U \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix} V^\top, \\
&\text{όπου } \; U^\top U = I_m, V^\top V = I_n, \hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\
&\text{και } \hat{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \geq 0.
\end{aligned}
$$

Επίσης, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ ενώ $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$. Μετά από τις απαραίτητες τροποποιήσεις, υπάρχει αντίστοιχη παραγοντοποίηση όταν $m \leq n$.

Από το SVD μαθαίνουμε σχεδόν τα πάντα για το μητρώο

Ορολογία και παρατηρήσεις

Έστω ότι $A = U\Sigma V^\top$ είναι η SVD του A.

- Τα διαγώνια στοιχεία του A λέγονται ιδιάζουσες τιμές του A. Θεωρούμε ότι $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(m,n)}$.
- Οι στήλες του U ονομάζονται αριστερά **ιδιάζοντα** διανύσματα. Προσέξτε ότι είναι τα ορθοκανονικά ιδιοδιανυσματα του $AA^\top$.
- Οι στήλες του V ονομάζονται δεξιά **ιδιάζοντα** διανύσματα. Προσέξτε ότι είναι τα ορθοκανονικά ιδιοδιανυσματα του $A^\top A$.

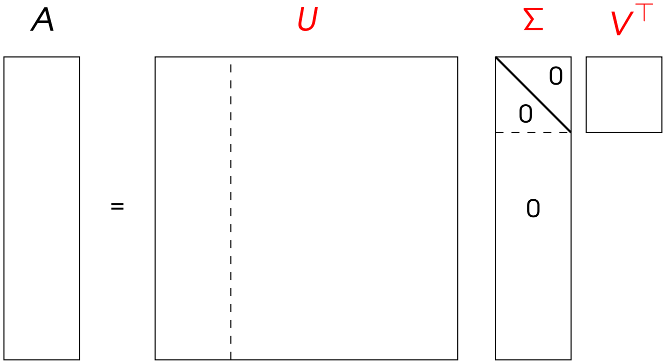
τάξη του A ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων της διαγωνίου του Σ.

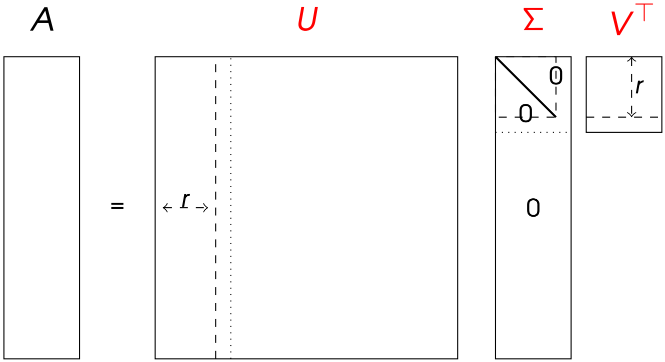
ΟΚ βάση για $\mathrm{range}(A)$ οι στήλες του $U_1 = [u_1, \ldots, u_r]$

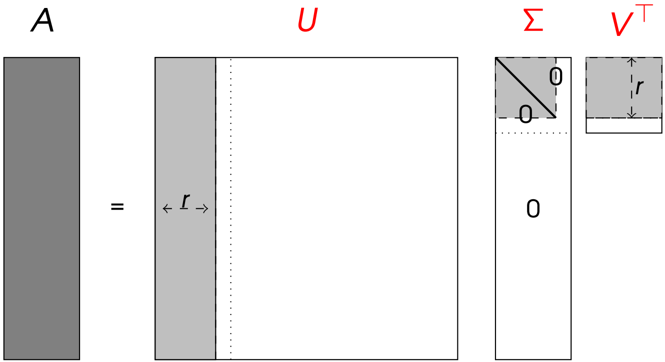
ΟΚ βάση για $\mathrm{null}(A)$ οι στήλες του $V_2 = [v_{r+1}, \ldots, v_n]$

ΟΚ βάση για $\mathrm{range}(A^\top)$ οι στήλες του $V_1 = [v_1, \ldots, v_r]$

ΟΚ βάση για $\mathrm{null}(A^\top)$ οι στήλες του $U_2 = [u_{r+1}, \ldots, u_m]$

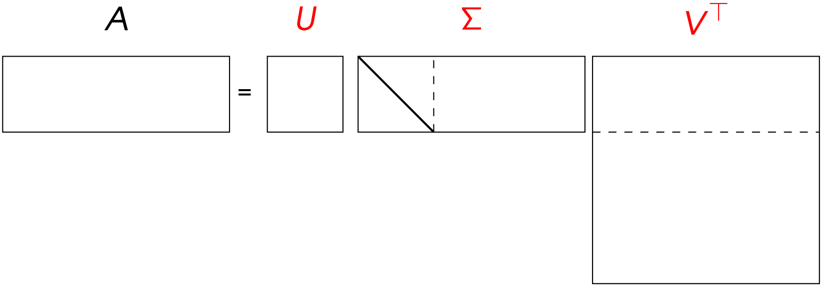

A
=
U
Σ
$V^\top$
0
0
0


A
=
U
r
Σ
0
0
0
V⊤
r



$U_1 = U_{:,1:r}$	$U_2 = U_{:,r+1:m}$	$V_1 = V_{:,1:r}$	$V_2 = V_{:,r+1:n}$
$\mathrm{range}(A)$	$\mathrm{null}(A^\top)$	$\mathrm{range}(A^\top)$	$\mathrm{null}(A)$

$$\boxed{A = U_1 \hat{\Sigma} V_1^\top}$$


A
=
U
Σ
V⊤

Strang, σελ. 449

Θα σας πω άμεσα τη γνώμη μου: Η SVD είναι το αποκορυφωμα αυτού του μαθήματος της γραμμικής άλγεβρας. Τη σκέφτομαι ως το τελικό βήμα στο Θεμελιώδες Θεώρημα. Αρχικά εμφανίζονται οι διαστάσεις των τεσσάρων υποχώρων. Στη συνέχεια η ορθογωνιότητά τους. Έπειτα οι ορθοκανονικές βάσεις οι οποίες διαγωνιοποιούν τον A. Όλα εμπεριέχονται στον τύπο $A = U\Sigma V^\top$.

Ανάπτυγμα σε ιδιάζουσες τριπλέτες

Αν το μητρώο είναι τάξης r και θέσουμε $\hat{\Sigma}_{r,r}$ το $r \times r$ διαγώνιο μητρώο $\mathrm{diag}[\sigma_1, \cdots, \sigma_r]$ (όλα μη μηδενικά) τότε

$$\begin{aligned} A &= [U_1, U_2] \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^\top \\ V_2^\top \end{pmatrix} \\ &= U_1 \Sigma_{r,r} V_1^\top \\ &= \sigma_1 u_1 v_1^\top + \sigma_2 u_2 v_2^\top + \cdots + \sigma_r u_r v_r^\top \end{aligned}$$

Αποκαλύπτεται ότι το μητρώο τάξης r είναι άθροισμα r ανεξάρτητων μητρώων πρώτης τάξης. Λόγω της διάταξης των σ_j και της ορθογωνιότητας των u_j και v_j αποδεικνύεται ότι οι παρακάτω προσεγγίσεις είναι «καλές» (η ποιότητα αυξάνει καθώς μεγαλώνει το $k = 1, \ldots, r$):

$$\begin{aligned} A &\approx \sigma_1 u_1 v_1^\top \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ A &\approx \sigma_1 u_1 v_1^\top + \sigma_k u_k v_k^\top \end{aligned}$$

Ιδιαίτερα χρήσιμο για να προσεγγίζουμε (συμπιέζουμε) μητρώα και ό,τι αυτά αναπαριστούν.

Υπολογισμός του SVD

μέσω ιδιοδιασπάσεων

Για μικρά προβλήματα, αξιοποιούμε τη σχέση του SVD του A με τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα των $A^\top A$ ή και $AA^\top$.

Αν $A = U\Sigma V^\top \in \mathbb{R}^{m\times n}$, τότε,

$$A^\top A = V\Sigma^\top \Sigma V^\top, \quad AA^\top = U\Sigma\Sigma^\top U^\top \quad \text{καθώς } U^\top U = I_m, V^\top V = I_n$$

επομένως αν θεωρήσουμε ότι $m \geq n$ και ονομάσουμε $\mu_1, \ldots, \mu_n$ τις ιδιοτιμές του $A^\top A$ (τις υπολογίζουμε με κάποιον τρόπο), τότε

1. $\sigma_i = \sqrt{\mu_i}$
2. Τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του A είναι τα ιδιοδιανύσματα του $A^\top A$.
3. Ισχύει επίσης ότι τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του A είναι τα ιδιοδιανύσματα του $A^\top A$.
4. Για τις μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές ισχύει ότι

$$\frac{1}{\sigma_i} A v_i = u_i$$

και μπορούμε να υπολογίσουμε τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα με οικονομικό τρόπο από τη σχέση.

Προσοχή: Το θέμα του υπολογισμού SVD όπως και το αλγεβρικό πρόβλημα ιδιοτιμών είναι πολύ ευρύ. Η μέθοδος που αναφέραμε είναι κυρίως για χρήση «στο χαρτί».

Προσέγγιση μειωμένης τάξης με SVD

Θεώρημα Eckart & Schmidt

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοιο ώστε $A = U\Sigma V^\top$. Τότε το μητρώο τάξης $k < \min(m, n)$, έστω B, που προσεγγίζει το A με τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η νόρμα Frobenius $\|A - B\|_F$ είναι το μητρώο

$$B = U^{(k)} S_k (V^{(k)})^\top$$

όπου

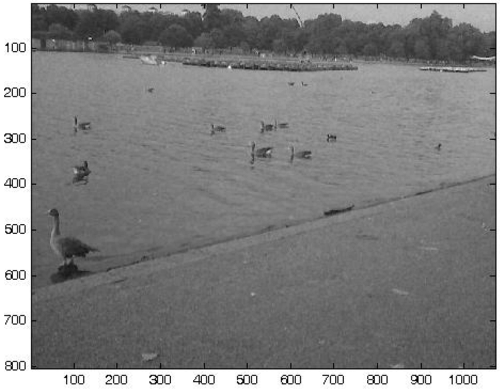
$$\begin{aligned} U^{(k)} &= [u_1, ..., u_k], \\ V^{(k)} &= [v_1, ..., v_k], \\ S^{(k)} &= \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \end{aligned}$$

Τότε

$$\|A - B\|_F^2 = \sigma_{k+1}^2 + \cdots + \sigma_r^2$$

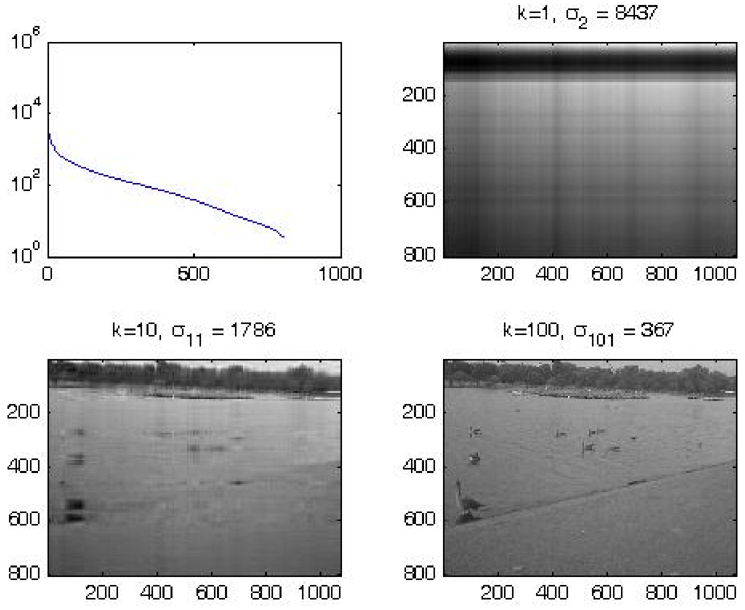
Παράδειγμα προσέγγισης

Η παρακάτω εικόνα κωδικοποιείται με μητρώο $X \in \mathbb{R}^{804\times 1072}$ του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε το SVD.



Προσεγγίσεις

$U^{(k)} S_k (V^{(k)})^\top$ για $k = 1, 10, 100$. Το πρώτο σχήμα δείχνει τη διακύμανση των 804 ιδιαζουσών τιμών.



Αντιστροφή με SVD και η έννοια του ψευδοαντιστρόφου

Όταν το A είναι τετραγωνικό και αντιστρέψιμο

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (U\Sigma V^\top)^{-1} = (V^\top)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \\ &= V\Sigma^{-1}U^\top \\ &= \frac{1}{\sigma_1}v_1u_1^\top + \frac{1}{\sigma_2}v_2u_2^\top + \cdots + \frac{1}{\sigma_n}v_nu_n^\top \end{aligned}$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του αντιστρόφου;

Αντιστροφή με SVD και η έννοια του ψευδοαντιστρόφου

Όταν το A είναι τετραγωνικό και αντιστρέψιμο

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (U\Sigma V^\top)^{-1} = (V^\top)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \\ &= V\Sigma^{-1}U^\top \\ &= \frac{1}{\sigma_1}v_1u_1^\top + \frac{1}{\sigma_2}v_2u_2^\top + \cdots + \frac{1}{\sigma_n}v_nu_n^\top \end{aligned}$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του αντιστρόφου; Αν το A δεν είναι αντιστρέψιμο, τότε θα είναι μειωμένης τάξης, δηλ. $r < n$. Επομένως στις παραπάνω εκφράσεις, θα υπάρξει αστοχία τους μηδενικούς όρους $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n$ του $\hat{\Sigma}$:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & & \\ & & & ? & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ψευδοαντίστροφο μητρώο

Επεκτείνουμε τον ορισμό του αντιστρόφου για το $\hat{\Sigma}$ θέτοντας (προσέξτε το διαφορετικό σύμβολο-υπερδείκτη):

$$\Sigma^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Τότε $A^{\dagger} = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^{\top} + \frac{1}{\sigma_2} v_2 u_2^{\top} + \cdots + \frac{1}{\sigma_r} v_r u_r^{\top}$, άρα

$$A^{\dagger} = V \Sigma^{\dagger} U^{\top}$$

Το $A^{\dagger}$ ονομάζεται **ψευδοαντίστροφο** του A. Όπως ορίστηκε, το ψευδοαντίστροφο μητρώο είναι μοναδικό για οποιοδήποτε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Επιλεγμένες ιδιότητες ψευδοαντιστρόφου

- $AA^{\dagger}A = A$, $A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$
- $(AA^{\dagger})^{\top} = AA^{\dagger}$ και $(A^{\dagger}A)^{\top} = A^{\dagger}A$.
- αν A είναι πλήρους τάξης στηλών, $A^{\dagger} = (A^{\top}A)^{-1}A^{\top}$.
- .... και $A^{\dagger}A = I$ (αριστερό αντίστροφο).
- αν είναι πλήρους τάξης γραμμών, $A^{\dagger} = A^{\top}(AA^{\top})^{-1}$,
- ... και $AA^{\dagger} = I$ (δεξιό αντίστροφο).
- Η επίλυση ελαχίστων τετραγώνων του $Ax = b$ είναι $x_{\mathrm{LS}} = A^{\dagger}b$.

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το ψευδοαντίστροφο του

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το ψευδοαντίστροφο του

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Προσέξτε ότι $A = ab^\top$ οπότε $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

$$A = \|a\|_2 \|b\|_2 uv^\top, \text{ όπου } u_1 = \frac{a}{\|a\|_2}, v_1 = \frac{b}{\|b\|_2}$$

επομένως $\|u_1\|_2 = \|v_1\|_2 = 1$. (Στην περίπτωσή μας, $\|a\|_2 = \|b\|_2 = \sqrt{6}$).
Επομένως ισχύει ότι η SVD του

$$A = \underbrace{(\|a\|_2 \|b\|_2)}_{\sigma_1} u_1 v_1^\top .$$

Άρα

$$A^\dagger = \frac{1}{6} v_1 u_1^\top = \frac{1}{6} \frac{b}{\|b\|_2} \frac{a^\top}{\|a\|_2} = \frac{1}{36} ba^\top = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το ψευδοαντίστροφο του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Όπως και πριν: $A = ab^\top$ οπότε $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

$$A = \|a\|_2 \|b\|_2 uv^\top, \text{ όπου } u_1 = \frac{a}{\|a\|_2}, v_1 = \frac{b}{\|b\|_2}$$

επομένως $\|u_1\|_2 = \|v_1\|_2 = 1$. (Στην περίπτωσή μας, $\|a\|_2 = \|b\|_2 = \sqrt{2}$).
Επομένως ισχύει ότι η SVD του

$$A = \underbrace{(\|a\|_2 \|b\|_2)}_{\sigma_1} u_1 v_1^\top .$$

Άρα

$$A^\dagger = \frac{1}{2} v_1 u_1^\top = \frac{1}{2} \frac{b}{\|b\|_2} \frac{a^\top}{\|a\|_2} = \frac{1}{4} ba^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Ψευδοαντίστροφο

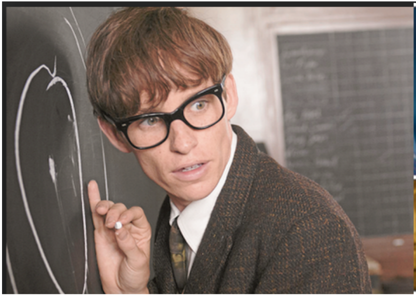
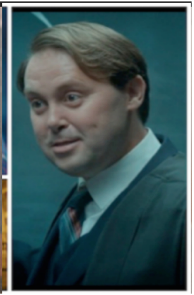
Moore–Penrose pseudoinverse

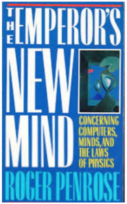
From Wikipedia, the free encyclopedia

In mathematics, and in particular linear algebra, a **pseudoinverse** A^+ of a matrix A is a generalization of the inverse matrix.[1] The most widely known type of matrix pseudoinverse is the **Moore–Penrose pseudoinverse**, which was independently described by E. H. Moore[2] in 1920, Arne Bjerhammar[3] in 1951 and Roger Penrose[4] in 1955. Earlier, Fredholm had introduced the concept of a pseudoinverse of integral operators in 1903. When referring to a matrix, the term pseudoinverse, without further specification, is often used to indicate the Moore–Penrose pseudoinverse. The term generalized inverse is sometimes used as a synonym for pseudoinverse.

A common use of the Moore–Penrose pseudoinverse (hereafter, just pseudoinverse) is to compute a 'best fit' (least squares) solution to a system of linear equations that lacks a unique solution (see below under § Applications). Another use is to find the minimum (Euclidean) norm solution to a system of linear equations with multiple solutions. The pseudoinverse facilitates the statement and proof of results in linear algebra.

The pseudoinverse is defined and unique for all matrices whose entries are real or complex numbers. It can be computed using the singular value decomposition.



Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Χρήση Έργου Τρίτων I

1. http://img2-1.timeinc.net/people/i/2014/news/141201/eddie-redmayne-1024.jpg (βλ. σελ 25)
2. http://blog.yovisto.com/wp-content/uploads/2015/08/Roger_Penrose-6Nov2005.jpg (βλ. σελ 25)
3. Christian McKay as Penrose: The theory of Everything (2014) (βλ. σελ 25)
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Moore%E2%80%93Penrose_pseudoinverse (βλ. σελ 25)
5. http://ecx.images-amazon.com/images/I/A12czD7V4GL.jpg (βλ. σελ 25)

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών - Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ