



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα 6 : Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σκοπός Ενότητας

- Εύρεση Ιδιοτιμών & Ιδιοδιανυσμάτων
- Διαγωνοποίηση Μητρώων
- Συμμετρικά, Συμμετρικά και Θετικά Ορισμένα, Όμοια Μητρώα
- Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)

Περιεχόμενα

- 1 Υπενθύμιση
- 2 Διάσπαση SVD (συνέχεια)
 - Υπολογίζοντας το SVD

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Συζητάμε το **Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)**

- 1 Μέθοδος δύναμης (απλή μέθοδος υπολογισμού ιδιοζεύγους)
- 2 Ρίζες πολωνύμου με γραμμική άλγεβρα: το συνοδευτικό μητρώο.
- 3 Λύση γραμμικού συστήματος από το φασματικό ανάπτυγμα.
- 4 Παραγοντοποιήσεις μητρώων.
- 5 Εισαγωγή στην παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών.

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Συζητάμε το **Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)**

- 1 Μέθοδος δύναμης (απλή μέθοδος υπολογισμού ιδιοζεύγους)
- 2 Ρίζες πολωνύμου με γραμμική άλγεβρα: το συνοδευτικό μητρώο.
- 3 Λύση γραμμικού συστήματος από το φασματικό ανάπτυγμα.
- 4 Παραγοντοποιήσεις μητρώων.
- 5 Εισαγωγή στην παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών.

Σήμερα θα συζητήσουμε:

- 1 Σχετικά με το SVD.
- 2 Ιδιότητες και χρήση στην προσέγγιση μητρώου με μητρώα μειωμένης τάξης
- 3 Σχετικά με τον υπολογισμό του SVD.
- 4 Ψευδοαντίστροφο μητρώο και SVD.
- 5 Εισαγωγή στους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς.

Υπό συζήτηση ενότητας

1	Εισαγωγή στα Διανύσματα	1	5	Ορίζουσες	295
1.1	Διανύσματα και Γραμμικοί Συνδυασμοί	2	5.1	Οι Ιδιότητες των Οριζουσών	295
1.2	Μήκη και Στιχικά Γινόμενα	13	5.2	Μεταθέσεις και Αλγεβρικά Στοιχεία	309
2	Επίλυση Γραμμικών Εξισώσεων	27	5.3	Κανόνες Cramer, Αντίστροφοι και Όγκοι	327
2.1	Διανύσματα και Γραμμικές Εξισώσεις	27	6	Πιστώσιμες και Ίσοδιανόσημα	347
2.2	Η Έννοια της Απαλοιφής	44	6.1	Εισαγωγή στις Πιστώσιμες	347
2.3	Απαλοιφή Χρησιμοποιώντας Πίνακες	58	6.2	Διαγωνιοποιώντας έναν Πίνακα	365
2.4	Κανόνες για τις Πράξεις Πινάκων	71	6.3	Εφαρμογές στις Διαφορές Εξισώσεις	383
2.5	Αντίστροφοι Πίνακες	89	6.4	Συμμετρικοί Πίνακες	401
2.6	Απαλοιφή = Παραγοντοποίηση: $A = LU$	105	6.5	Θετικά Ορισμένοι Πίνακες	416
2.7	Αντίστροφοι και Μεταθέσεις	122	6.6	Όμοιοι Πίνακες	432
3	Διανυσματικοί Χώροι και Υπόχωροι	141	6.7	Ανάλυση Ιδιοζευγών Τιμών (SVD)	443
3.1	Χώροι Διανυσμάτων	141	7	Γραμμικοί Μετασχηματισμοί	457
3.2	Ο Μηδενόχωρος του A : Επίλυση της $Ax = 0$	156	7.1	Η Έννοια του Γραμμικού Μετασχηματισμού	457
3.3	Η Τάξη και η Μορφή Ανομοίωτων Γραμμών	171	7.2	Ο Πίνακας ενός Γραμμικού Μετασχηματισμού	468
3.4	Η Πλήρης Λύση της $Ax = b$	184	7.3	Αλλαγή Βάσης	485
3.5	Ανεξαρτησία, Βάση και Διάσταση	199	7.4	Η Διαγωνιοποίηση και ο Ψευδοαντίστροφος	494
3.6	Διαστάσεις των Τεσσάρων Υποχώρων	219	8	Εφαρμογές	507
4	Ορθογωνιότητα	233	8.1	Πίνακες στη Μηχανολογία	507
4.1	Ορθογωνιότητα των Τεσσάρων Υποχώρων	233	8.2	Γραφήματα και Δίκτυα	521
4.2	Προβολές	246	8.3	Πίνακες Markov και Οικονομικά Μοντέλα	535
4.3	Προσγγίσεις Ελλαντιστων Τεσσάρων	261	8.4	Γραμμικός Προγραμματισμός	545
4.4	Ορθογώνιες Βάσεις και Gram - Schmidt	277	8.5	Σειρές Fourier: Γραμμική Άλγεβρα για Συνάρτηση	553
10	Μικτά Διανύσματα και Πίνακες	603	8.6	Γραφικά με Ηλεκτρονικό Υπολογιστή	561
10.1	Μικτά Αριθμοί	603	9	Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα	569
10.2	Εφαρμογές και Μονοδιάστατοι Πίνακες	614	9.1	Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα	569
10.3	Ο Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier	625		Αριθμητικές Μέθοδοι για την Επίλυση	581
				Αριθμητικές Μέθοδοι για την Επίλυση	589
	Άσκησεις σε Επιλεγμένες Ασκήσεις	635			
	Ένα Τελικό Διαγώνισμα	689			
	Παραγοντοποιήσεις Πινάκων	693			
	Ερωτήσεις Ανασκόπησης επί των Εννοιών	697			
	Γλωσσάριο	705			

Παραγοντοποιήσεις

Παραδείγματα¹ $A = WKH$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Θέσαμε $r = \text{rank}(A)$ (προσέξτε, ορισμένες παραγοντοποιήσεις προϋποθέτουν τετραγωνικό A):

παραγοντοποίηση	W	K	H
$A = BC$ (τάξης)	$B \in \mathbb{R}^{m \times r}$, r στήλες οδηγών A		$C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, μη μηδεν. γραμμές ΑΓΚΜ
$A = QR$ $A = Q_1 R_1$	$Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ορθογώνιο $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$, ΟΚ στήλες		$R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ άνω τριγωνικό $R_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ άνω τριγωνικό
$A = QTQ^*$ (Schur)	Q ορθομοναδιαίο	άνω τριγωνικό T	Q^*
$A = XJX^{-1}$ (ΑΠΙ)	X αντιστρέψιμο	μορφή Jordan J	X^{-1}
$A = X\Lambda X^{-1}$ διαγ/σμο (ΑΠΙ)	X αντιστρέψιμο	διαγώνιο Λ	X^{-1}
$A = Q\Lambda Q^T$ συμμετρικό (ΑΠΙ)	Q ορθογώνιο	διαγώνιο Λ	Q^T

Πρόκληση: Να διαγωνιοποιήσουμε οποιοδήποτε μητρώο (ακόμα και μη τετραγωνικό) με ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

¹ Δείτε τον εκτενή κατάλογο στο σύγγραμμα του Strang.

Παραγοντοποιήσεις

Παραδείγματα¹ $A = WKH$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Θέσαμε $r = \text{rank}(A)$ (προσέξτε, ορισμένες παραγοντοποιήσεις προϋποθέτουν τετραγωνικό A):

παραγοντοποίηση	W	K	H
$A = BC$ (τάξης)	$B \in \mathbb{R}^{m \times r}$, r στήλες οδηγών A		$C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, μη μηδεν. γραμμές ΑΓΚΜ
$A = QR$ $A = Q_1 R_1$	$Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ορθογώνιο $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$, ΟΚ στήλες		$R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ άνω τριγωνικό $R_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ άνω τριγωνικό
$A = Q T Q^*$ (Schur)	Q ορθομοναδιαίο	άνω τριγωνικό T	Q^*
$A = X J X^{-1}$ (ΑΠΙ)	X αντιστρέψιμο	μορφή Jordan J	X^{-1}
$A = X \Lambda X^{-1}$ διαγ/σιμο (ΑΠΙ)	X αντιστρέψιμο	διαγώνιο Λ	X^{-1}
$A = Q \Lambda Q^T$ συμμετρικό (ΑΠΙ)	Q ορθογώνιο	διαγώνιο Λ	Q^T
$A = U \Sigma V^T$ (SVD)	$U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ορθογώνιο	διαγ. $\Sigma \geq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, με r θετικά στοιχεία	$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιο
$A = U_1 \hat{\Sigma} V_1^T$ (SVD)	$U_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ΟΚ στήλες	διαγ. $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, με r θετικά στοιχεία	$V_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ΟΚ γραμμές

Πρόκληση: Να διαγωνιοποιήσουμε οποιοδήποτε μητρώο (ακόμα και μη τετραγωνικό) με ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

¹ Δείτε τον εκτενή κατάλογο στο σύγγραμμα του Strang.

Διάσπαση ιδιάζουσας τιμής (SVD)

Κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ όπου $m \geq n$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως γινόμενο δύο ορθογώνιων $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και ενός πραγματικού, μη αρνητικού και διαγώνιου μητρώου $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ως εξής

$$A = U \Sigma V^T = U \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix} V^T,$$

όπου $U^T U = I_m$, $V^T V = I_n$, $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

και $\hat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \geq 0$.

Επίσης, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ ενώ $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$. Μετά από τις απαραίτητες τροποποιήσεις, υπάρχει αντίστοιχη παραγοντοποίηση όταν $m \leq n$.

Από το SVD μαθαίνουμε σχεδόν τα πάντα για το μητρώο

Ορολογία και παρατηρήσεις

Έστω ότι $A = U\Sigma V^T$ είναι η SVD του A .

- Τα διαγώνια στοιχεία του A λέγονται **ιδιάζουσες τιμές** του A . Θεωρούμε ότι $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)}$.
- Οι στήλες του U ονομάζονται **αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα**. Προσέξτε ότι είναι τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του AA^T .
- Οι στήλες του V ονομάζονται **δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα**. Προσέξτε ότι είναι τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του $A^T A$.

τάξη του A ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων της διαγωνίου του Σ .

OK βάση για $\text{range}(A)$ οι στήλες του $U_1 = [u_1, \dots, u_r]$

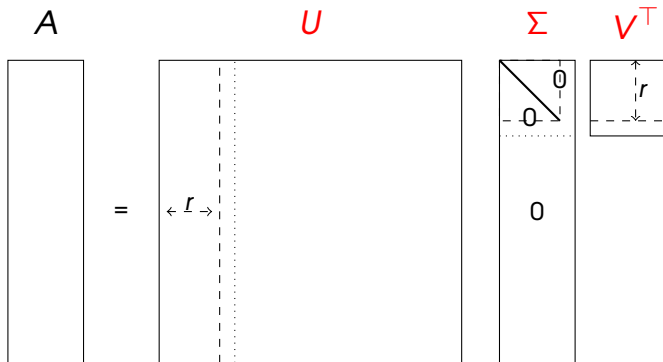
OK βάση για $\text{null}(A)$ οι στήλες του $V_2 = [v_{r+1}, \dots, v_n]$

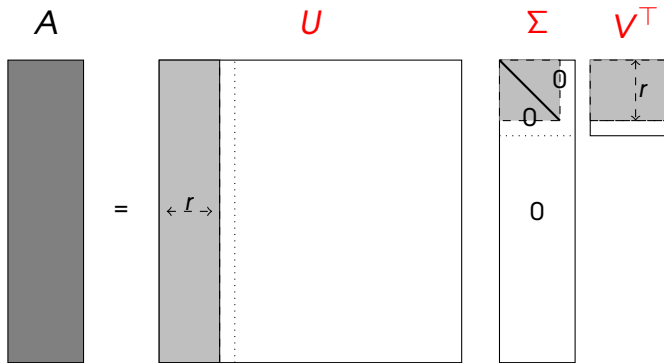
OK βάση για $\text{range}(A^T)$ οι στήλες του $V_1 = [v_1, \dots, v_r]$

OK βάση για $\text{null}(A^T)$ οι στήλες του $U_2 = [u_{r+1}, \dots, u_m]$

$$A = U \Sigma V^T$$

The diagram illustrates the SVD decomposition $A = U \Sigma V^T$. Matrix A is a tall rectangle. Matrix U is a square with a vertical dashed line on the left. Matrix Σ is a tall rectangle with a diagonal line from top-left to bottom-right, zeros in the top-right and bottom-left corners, and a zero in the bottom-right corner. Matrix V^T is a square.





$U_1 = U_{:,1:r}$	$U_2 = U_{:,r+1:m}$	$V_1 = V_{:,1:r}$	$V_2 = V_{:,r+1:n}$
$\text{range}(A)$	$\text{null}(A^T)$	$\text{range}(A^T)$	$\text{null}(A)$

$$A = U_1 \hat{\Sigma} V_1^T$$

$$A = U \Sigma V^T$$

The diagram illustrates the SVD decomposition $A = U \Sigma V^T$. Matrix A is represented by a rectangle. Matrix U is a square. Matrix Σ is a rectangle with a diagonal line from the top-left to the bottom-right and a vertical dashed line to its right. Matrix V^T is a rectangle with a horizontal dashed line across its middle.

Strang, σελ. 449

Θα σας πω άμεσα τη γνώμη μου: Η SVD είναι το **αποκορυφωμα** αυτού του μαθήματος της γραμμικής άλγεβρας. Τη σκέφτομαι ως το τελικό βήμα στο Θεμελιώδες Θεώρημα. Αρχικά εμφανίζονται οι **διαστάσεις** των τεσσάρων υποχώρων. Στη συνέχεια η **ορθογωνιότητά** τους. Έπειτα οι ορθοκανονικές βάσεις οι οποίες **διαγωνιοποιούν** τον A . Όλα εμπεριέχονται στον τύπο $A = U\Sigma V^T$.

Ανάπτυγμα σε ιδιάζουσες τριπλέτες

Αν το μητρώο είναι τάξης r και θέσουμε $\hat{\Sigma}_{r,r}$ το $r \times r$ διαγώνιο μητρώο $\text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_r]$ (όλα μη μηδενικά) τότε

$$\begin{aligned} A &= [U_1, U_2] \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \\ &= U_1 \Sigma_{r,r} V_1^T \\ &= \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T \end{aligned}$$

Αποκαλύπτεται ότι το μητρώο τάξης r είναι άθροισμα r ανεξάρτητων μητρώων πρώτης τάξης. Λόγω της διάταξης των σ_j και της ορθογωνιότητας των u_j και v_j αποδεικνύεται ότι οι παρακάτω προσεγγίσεις είναι «καλές» (η ποιότητα αυξάνει καθώς μεγαλώνει το $k = 1, \dots, r$):

$$\begin{aligned} A &\approx \sigma_1 u_1 v_1^T \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A &\approx \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_k u_k v_k^T \end{aligned}$$

Ιδιαίτερα χρήσιμο για να προσεγγίζουμε (συμπιέζουμε) μητρώα και ό,τι αυτά αναπαριστούν.

Υπολογισμός του SVD

μέσω ιδιοδιασπάσεων

Για μικρά προβλήματα, αξιοποιούμε τη σχέση του SVD του A με τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα των $A^T A$ ή και AA^T .

Αν $A = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε,

$$A^T A = V\Sigma^T \Sigma V^T, \quad AA^T = U\Sigma \Sigma^T U^T \quad \text{καθώς } U^T U = I_m, \quad V^T V = I_n$$

επομένως αν θεωρήσουμε ότι $m \geq n$ και ονομάσουμε μ_1, \dots, μ_n τις ιδιοτιμές του $A^T A$ (τις υπολογίζουμε με κάποιον τρόπο), τότε

- 1 $\sigma_i = \sqrt{\mu_i}$
- 2 Τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του A είναι τα ιδιοδιανύσματα του $A^T A$.
- 3 Ισχύει επίσης ότι τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του A είναι τα ιδιοδιανύσματα του AA^T .
- 4 Για τις μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές ισχύει ότι

$$\frac{1}{\sigma_i} A v_i = u_i$$

και μπορούμε να υπολογίσουμε τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα με οικονομικό τρόπο από τη σχέση.

Προσοχή: Το θέμα του υπολογισμού SVD όπως και το αλγεβρικό πρόβλημα ιδιοτιμών είναι πολύ ευρύ. Η μέθοδος που αναφέραμε είναι κυρίως για χρήση «στο χαρτί».

Προσέγγιση μειωμένης τάξης με SVD

Θεώρημα Eckart & Schmidt

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ τέτοιο ώστε $A = U\Sigma V^T$. Τότε το μητρώο τάξης $k < \min(m, n)$, έστω B , που προσεγγίζει το A με τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η νόρμα Frobenius $\|A - B\|_F$ είναι το μητρώο

$$B = U^{(k)} S_k (V^{(k)})^T$$

όπου

$$U^{(k)} = [u_1, \dots, u_k],$$

$$V^{(k)} = [v_1, \dots, v_k],$$

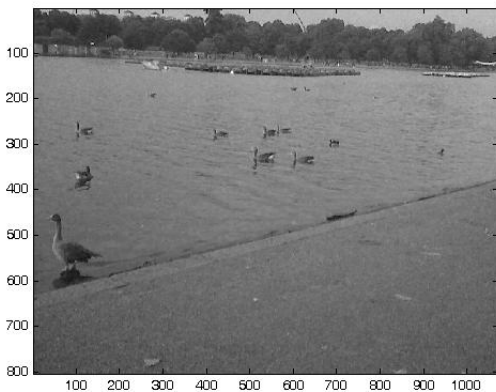
$$S^{(k)} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$$

Τότε

$$\|A - B\|_F^2 = \sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2$$

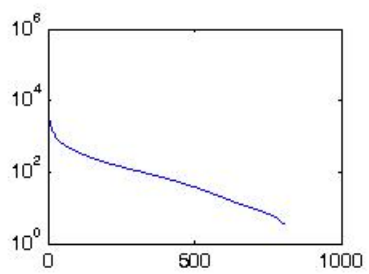
Παράδειγμα προσέγγισης

Η παρακάτω εικόνα κωδικοποιείται με μητρώο $X \in \mathbb{R}^{804 \times 1072}$ του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε το SVD.

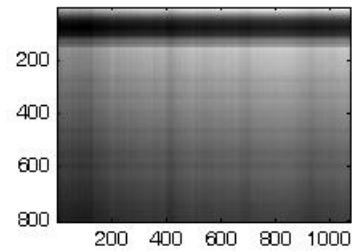


Προσεγγίσεις

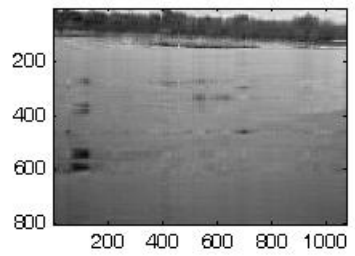
$U^{(k)} S_k (V^{(k)})^T$ για $k = 1, 10, 100$. Το πρώτο σχήμα δείχνει τη διακύμανση των 804 ιδιζουσών τιμών.



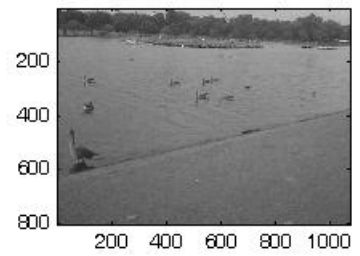
$k=1, \sigma_2 = 8437$



$k=10, \sigma_{11} = 1786$



$k=100, \sigma_{101} = 367$



Αντιστροφή με SVD και η έννοια του ψευδοαντιστρόφου

Όταν το A είναι τετραγωνικό και αντιστρέψιμο

$$\begin{aligned}A^{-1} &= (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \\ &= V\Sigma^{-1}U^T \\ &= \frac{1}{\sigma_1}v_1u_1^T + \frac{1}{\sigma_2}v_2u_2^T + \cdots + \frac{1}{\sigma_n}v_nu_n^T\end{aligned}$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του αντιστρόφου;

Αντιστροφή με SVD και η έννοια του ψευδοαντιστρόφου

Όταν το A είναι τετραγωνικό και αντιστρέψιμο

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \\ &= V\Sigma^{-1}U^T \\ &= \frac{1}{\sigma_1}v_1u_1^T + \frac{1}{\sigma_2}v_2u_2^T + \dots + \frac{1}{\sigma_n}v_nu_n^T \end{aligned}$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του αντιστρόφου; Αν το A **δεν** είναι αντιστρέψιμο, τότε θα είναι μειωμένης τάξης, δηλ. $r < n$. Επομένως στις παραπάνω εκφράσεις, θα υπάρξει αστοχία τους μηδενικούς όρους $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n$ του $\hat{\Sigma}$:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & & \\ & & & ? & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ψευδοαντίστροφο μητρώο

Επεκτείνουμε τον ορισμό του αντιστρόφου για το $\hat{\Sigma}$ θέτοντας (προσέξτε το διαφορετικό σύμβολο-υπερδεϊκτή):

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Τότε $A^\dagger = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^\top + \frac{1}{\sigma_2} v_2 u_2^\top + \cdots + \frac{1}{\sigma_r} v_r u_r^\top$, άρα

$$A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^\top$$

Το A^\dagger ονομάζεται **ψευδοαντίστροφο** του A . Όπως ορίστηκε, το ψευδοαντίστροφο μητρώο είναι μοναδικό για οποιοδήποτε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Επιλεγμένες ιδιότητες ψευδοαντιστρόφου

- $AA^\dagger A = A, A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$
- $(AA^\dagger)^\top = AA^\dagger$ και $(A^\dagger A)^\top = A^\dagger A$.
- αν A είναι πλήρους τάξης στηλών, $A^\dagger = (A^\top A)^{-1} A^\top$.
- και $A^\dagger A = I$ (αριστερό αντίστροφο).
- αν είναι πλήρους τάξης γραμμών, $A^\dagger = A^\top (AA^\top)^{-1}$,
- ... και $AA^\dagger = I$ (δεξιό αντίστροφο).
- Η επίλυση ελαχίστων τετραγώνων του $Ax = b$ είναι $x_{LS} = A^\dagger b$.

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το ψευδοαντίστροφο του

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \quad 1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το ψευδοαντίστροφο του

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \quad 1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Προσέξτε ότι $A = ab^T$ οπότε $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

$$A = \|a\|_2 \|b\|_2 uv^T, \text{ όπου } u_1 = \frac{a}{\|a\|_2}, v_1 = \frac{b}{\|b\|_2}$$

επομένως $\|u_1\|_2 = \|v_1\|_2 = 1$. (Στην περίπτωση μας, $\|a\|_2 = \|b\|_2 = \sqrt{6}$).
Επομένως ισχύει ότι η SVD του

$$A = \underbrace{(\|a\|_2 \|b\|_2)}_{\sigma_1} u_1 v_1^T.$$

Άρα

$$A^\dagger = \frac{1}{6} v_1 u_1^T = \frac{1}{6} \frac{b}{\|b\|_2} \frac{a^T}{\|a\|_2} = \frac{1}{36} ba^T = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το ψευδοαντίστροφο του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Όπως και πριν: $A = ab^T$ οπότε $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

$$A = \|a\|_2 \|b\|_2 uv^T, \text{ όπου } u_1 = \frac{a}{\|a\|_2}, v_1 = \frac{b}{\|b\|_2}$$

επομένως $\|u_1\|_2 = \|v_1\|_2 = 1$. (Στην περίπτωση μας, $\|a\|_2 = \|b\|_2 = \sqrt{2}$).
Επομένως ισχύει ότι η SVD του

$$A = \underbrace{(\|a\|_2 \|b\|_2)}_{\sigma_1} u_1 v_1^T.$$

Άρα

$$A^\dagger = \frac{1}{2} v_1 u_1^T = \frac{1}{2} \frac{b}{\|b\|_2} \frac{a^T}{\|a\|_2} = \frac{1}{4} ba^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Ψευδοαντίστροφο

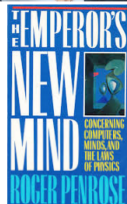
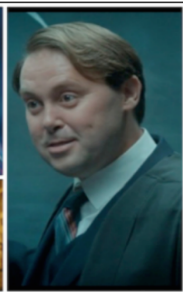
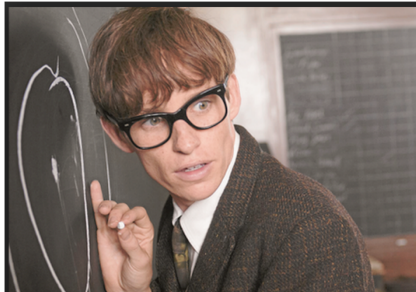
Moore–Penrose pseudoinverse

From Wikipedia, the free encyclopedia

In **mathematics**, and in particular **linear algebra**, a **pseudoinverse** A^+ of a **matrix** A is a **generalization** of the **inverse matrix**.^[1] The most widely known type of matrix pseudoinverse is the **Moore–Penrose pseudoinverse**, which was independently described by **E. H. Moore**^[2] in 1920, **Arne Bjerhammar**^[3] in 1951 and **Roger Penrose**^[4] in 1955. Earlier, **Fredholm** had introduced the concept of a pseudoinverse of **integral operators** in 1903. When referring to a matrix, the term pseudoinverse, without further specification, is often used to indicate the Moore–Penrose pseudoinverse. The term **generalized inverse** is sometimes used as a synonym for pseudoinverse.

A common use of the Moore–Penrose pseudoinverse (hereafter, just pseudoinverse) is to compute a "best fit" (**least squares**) solution to a **system of linear equations** that lacks a unique solution (see below under **§ Applications**). Another use is to find the minimum (**Euclidean**) norm solution to a system of linear equations with multiple solutions. The pseudoinverse facilitates the statement and proof of results in linear algebra.

The pseudoinverse is defined and unique for all matrices whose entries are **real** or **complex** numbers. It can be computed using the **singular value decomposition**.



Βιβλιογραφία I



G. Strang.

Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.

Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2006.

Χρήση Έργου Τρίτων I

- 1 <http://img2-1.timeinc.net/people/i/2014/news/141201/eddie-redmayne-1024.jpg> (βλ. σελ 25)
- 2 http://blog.yovisto.com/wp-content/uploads/2015/08/Roger_Penrose-6Nov2005.jpg (βλ. σελ 25)
- 3 Christian McKay as Penrose: The theory of Everything (2014) (βλ. σελ 25)
- 4 https://en.wikipedia.org/wiki/Moore%E2%80%93Penrose_pseudoinverse (βλ. σελ 25)
- 5 <http://ecx.images-amazon.com/images/I/A12czD7V4GL.jpg> (βλ. σελ 25)

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών - Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015

“Γραμμική Άλγεβρα”, Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/>

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

