Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **6** : Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Εύρεση Ιδιοτιμών & Ιδιοδιανυσμάτων
- Διαγωνοποιήση Μητρώων
- Συμμετρικά, Συμμετρικά και Θετικά Ορισμένα, Όμοια Μητρώα
- Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Συζητάμε το **Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)**

1. Σχετικά με τον υπολογισμό ιδιοτιμών: Υπολογισμός από το χ.π.
2. Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων.
3. Διαγωνιοποίηση.
4. Χρήση ιδιοζευγών στον υπολογισμό δυνάμεων μητρώου
5. Φασματικό ανάπτυγμα μητρώου.

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Συζητάμε το **Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)**

1. Σχετικά με τον υπολογισμό ιδιοτιμών: Υπολογισμός από το χ.π.
2. Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων.
3. Διαγωνιοποίηση.
4. Χρήση ιδιοζευγών στον υπολογισμό δυνάμεων μητρώου
5. Φασματικό ανάπτυγμα μητρώου.

Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Διαγωνοποιήσιμα μητρώα.
2. Αναλλοίωτοι υπόχωροι.
3. Μετασχηματισμοί ομοιότητας.
4. Παραγοντοποίηση Schur και αναγωγή μητρώων σε τριγωνική μορφή.
5. Φασματικές ιδιότητες συμμετρικών πραγματικών μητρώων.
6. Ομοιότητα μητρώων.
7. Κανονική μορφή Jordan.

Υπό συζήτηση ενότητες

Το Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)

- Ιδιοτιμές του A ονομάσαμε τις n ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
- Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ένα διάνυσμα x ονομάζεται (δεξιό) ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ, αν $Ax = \lambda x$. Αν $y^* A = \lambda y^*$, το y λέγεται αριστερό ιδιοδιάνυσμα.

Διαγωνιοποίηση μητρώου

Όπως είδαμε, από τα n ιδιοζεύγη (λ_j, x_j) του $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, μπορούμε να γράψουμε

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2, ..., Ax_n = \lambda_n x_n$$

Οπότε

$$A[x_1, x_2, ..., x_n] = [x_1 ..., x_n]\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Επομένως $AX = X\Lambda$, όπου $\Lambda = \mathrm{diag}([\lambda_1, ..., \lambda_n])$ και $X = [x_1 ..., x_n]$.
<u>ΠΡΟΣΕΞΤΕ</u> Αν το X είναι αντιστρέψιμο,

$$X^{-1}AX = \Lambda,$$

δηλ. χρησιμοποιώντας τα μητρώα X (με στήλες τα δεξιά ιδιοδιανύσματα) και X^{-1} (με στήλες του X^{-*} τα αριστερά ιδιοδιανύσματα) διαγωνιοποιήσαμε το A.
Αποκαλούμε το A διαγωνιοποιήσιμο.
Επομένως, για κάθε τετραγωνικό μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

1. να είναι διαγωνιοποιήσιμο, $\Rightarrow$ υπάρχουν n γ.α. ιδιοδιανύσματα
2. να μην είναι διαγωνιοποιήσιμο (ελλειμματικό) $\Rightarrow$ δεν υπάρχουν n γ.α. ιδιοδιανύσματα

Φασματικό ανάπτυγμα μητρώου

Αν ισχύει ότι $A = X\Lambda X^{-1}$, και θέσουμε

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix},\; X^{-1} = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix}$$

τότε

$$A = \lambda_1 x_1 y_1^* + \lambda_2 x_2 y_2^* + \cdots + \lambda_n x_n y_n^*$$

<u>ΠΡΟΣΕΞΤΕ</u> Το μητρώο γράφτηκε ως γραμμικός συνδυασμός n μητρώων. Οι συντελεστές είναι οι ιδιοτιμές. Τα μητρώα είναι $p_j q_j^*$ είναι 1ης τάξης, και κάθε ένα προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του j δεξιού ιδιοδιανύσματος με το j αριστερό ιδιοδιάνυσμα.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι και ιδιόχωροι

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας δ.χ. $\mathcal{V}$, αποκαλείται **αναλλοίωτος** ως προς A (εν συντομία, A-αναλλοίωτος ή απλά αναλλοίωτος αν το μητρώο εννοείται από τα συμφραζόμενα) αν $A\mathcal{V} =\subseteq \mathcal{V}$, δηλ. για κάθε $u \in \mathcal{V}$ ισχύει ότι $Au \in \mathcal{V}$.

Παραδείγματα:

- Οι δύο ακραίοι υπόχωροι: 1) Ο $\mathrm{span}\{0\}$ καθώς $A0 = 0$. 2) Ο $\mathbb{R}^n$ καθώς $Au \in \mathbb{R}^n$.
- Οποιοσδήποτε υπόχωρος $\mathrm{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ όπου τα $u_1, u_2, \ldots, u_k$ είναι ιδιοδιανύσματα του A. Κατά μείζονα λόγο, κάθε ιδιόχωρος του A.

Οι ιδιόχωροι ενός μητρώου A είναι A-αναλλοίωτοι.

Ιδιοδιανύσματα και μεταθετικότητα

Θέμα Γνωρίζουμε ότι γενικά $AB \neq BA$. Υπάρχουν προφανώς ειδικές περιπτώσεις που η μεταθετικότητα ισχύει (π.χ. διαγώνια μητρώα). Τι άλλο μπορούμε να πούμε;

- $\Lambda(AB) = \Lambda(BA)$
- Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμα με τα ίδια ιδιοδιανύσματα, δηλ.

$$\exists X \text{ τ.ώ. } X^{-1}AX = \Lambda_A, \quad X^{-1}BX = \Lambda_B.$$

τότε $AB = BA$. Επίσης, αν $AB = BA$ τότε υπάρχει κοινός «διαγωνιοποιητής» X.

Προσοχή:

- Γενικά, $\Lambda(AB) \neq \Lambda(A)\Lambda(B)$ και $\Lambda(A+B) \neq \Lambda(A) + \Lambda(B)$

Το $\Lambda(AB) \neq \Lambda(A) \overset{\times}{\underset{+}{}} \Lambda(B)$ δηλώνει ότι οι ιδιοτιμές του AB δεν μπορούν όλες να γραφτούν ως γινόμενα (ή άθροισμα) ιδιοτιμής του A με ιδιοτιμή του B και χρησιμοποιηθούν όλες οι ιδιοτιμές των A, B.

Γραμμική ανεξαρτησία και ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων

Δείξαμε την προηγούμενη φορά ότι

- Αν δύο ιδιοδιανύσματα ενός μητρώου αντιστοιχουν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Κατά συνέπεια, αν ·όλες οι ιδιοτιμές ενός μητρώου είναι διαφορετικές, το μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο.

Επεκτείνουμε:

- Αν ένα μητρώο είναι πραγματικό και συμμετρικό, ή μιγαδικό και ερμιτιανό, τότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη: Έστω διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda \neq \mu$ και ότι

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, \quad Ay = \mu y \\ y^\top Ax &= \lambda y^\top x = y^\top A^\top x \\ (Ay)^\top x &= \mu y^\top x \Rightarrow \mu(y^\top x) = \lambda(y^\top x) \text{ άρα } y^\top x = 0. \end{aligned}$$

Ιδιότητες ερμιτιανών και πραγματικών συμμετρικών μητρώων: Ιδιοτιμές

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^\top = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^* = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

άρα, επειδή $\|x\| \neq 0$,

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, καθώς το $(A - \lambda I) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, στο $\lambda \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί τουλάχιστον ένα πραγματικό ιδιοδιάνυσμα, $x \in \mathbb{R}^n$.

Όλες οι ιδιοτιμές των ερμιτιανών και των πραγματικών συμμετρικών μητρώων είναι πραγματικές. Επίσης, αν $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, για κάθε $\lambda \in \Lambda(A)$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τ.ώ. $Ax = \lambda x$.

Ιδιοτιμές και μετασχηματισμοί ομοιότητας

Έχουμε δει ότι για ένα διάνυσμα ή μητρώο, υπάρχουν ορισμένοι μετασχηματισμοί του που διατηρούν ορισμένα χαρακτηριστικά τους. Παραδείγματα: Παρακάτω, A, P, Q είναι μητρώα $n \times n$, το P είναι αντιστρέψιμο, το Q ορθομοναδιαίο και $x \in \mathbb{R}^n$.

- $\|Qx\|_2 = \|Qx\|_2$: Το μήκος (η νόρμα-2) ενός διανυσματος παραμένει ίδια αν το πολλαπλασιάσουμε με ένα ορθογώνιο μητρώο.
- $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(PA)$: Η τάξη μητρώου παραμένει ίδια αν το πολλαπλασιάσουμε με αντιστρέψιμο μητρώο.
- $\det(A) = \det(P^{-1}AP) = \det(Q^\top AQ)$: Η ορίζουσα μητρώου παραμένει ίδια αν κάνουμε τους μετασχηματισμούς $A \to P^{-1}AP$ και $A \to Q^*AQ$. Σημειώνουμε από τώρα ότι οι μετασχηματισμοί αυτοί αποκαλούνται μετασχηματισμοί ομοιότητας.

Βάσει του τελευταίου αποτελέσματος συμπεραίνουμε άμεσα (αποδείξτε το)

Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμα μητρώα P και ορθογώνια μητρώα Q, οι ιδιοτιμές των A, $P^{-1}AP$ και $Q^\top AQ$ είναι ίδιες. Δηλαδή, οι ιδιοτιμές παραμένουν αναλλοίωτες όταν το μητρώο υπόκειται σε μετασχηματισμούς ομοιότητας.

Σχέση όμοιων μητρώων

Αν A, B είναι όμοια και διαγωνιοποιήσιμα τότε υπάρχει X τ.ώ. $X^{-1}AX = B$.

Απόδειξη: Υπάρχουν P, Q τ.ώ. $P^{-1}AP = \Lambda$ και $Q^{-1}BQ = \Lambda$ όπου Λ είναι το (κοινό) διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών. Επομένως

$$P^{-1}AP = Q^{-1}BQ \Rightarrow QP^{-1}APQ^{-1} = B$$

επομένως αν θέσουμε $X = PQ^{-1}$ ισχύει ότι $X^{-1}AX = B$.

Ιδιότητες ερμιτιανών και πραγματικών συμμετρικών μητρώων: Διαγωνιοποιησιμότητα

Έστω A και ότι $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Αν $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ με $\|x_1\|_2 = 1$, μπορούμε να συμπληρώσουμε με $n-1$ διανύσματα u_j, τ.ώ. (π.χ. μετά από Gram-Schmidt) να είναι ορθογώνια. Γράφουμε $X_1 = (x_1, U_2)$ όπου $U_2 = (u_2, \ldots, u_n)$. Τότε

$$X_1^* A X_1 = \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \times & \cdots & \times \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2^* A U_2 & \\ 0 & & & \end{array}$$

<u>Προσέξτε:</u> Το $X_1^* A X_1$ έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με το A. Γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα κατά πλοκάδες άνω τριγωνικού μητρώου είναι το γινόμενο των οριζουσών των πλοκάδων της διαγωνίου. Συμπεραίνουμε (εύκολα) ότι το $U_2^* A U_2$ έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με το A πλην ενός λ_1 (λέμε ότι έχει υποστεί απομείωση.)

- Με τον τρόπο αυτό, «αποκαλύφθηκε» μια ιδιοτιμή.
- Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία για το $U_2^* A U_2$ και να «αποκαλυφθεί» μια ιδιοτιμή του που θα είναι, κατά συνέπεια, και ιδιοτιμή του A.
- Θεωρούμε ότι γνωρίζουμε ένα ιδιοζεύγος του $U_2^* A U_2$, έστω (μ, y) όπου $\|y\|_2 = 1$. Τότε $U_2^* A U_2 y = \mu y$. Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο μητρώο $U = (y, U_3) \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ και θέτουμε $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & U \end{pmatrix}$ Τότε μπορείτε να επαληθεύσετε ότι

$$X_2^* X_1^* A X_1 X_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \mu & \times \quad \times \\ 0 & 0 & U_3^* U_2^* A U_2 U_3 \end{pmatrix}$$

- Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να αποκαλυφθούν όλες οι ιδιοτιμές στην κύρια διαγώνιο.
- Θα ισχύει μια σχέση της μορφής

$$X_n^* \cdots X_2^* X_1^* A X_1 X_2 \cdots X_n \quad = \quad T$$

  όπου το T είναι άνω τριγωνικό και τα X_j είναι ορθομοναδιαία, δηλ. $X_j^* X_j = X_j X_j = I$.
- Αν θέσουμε $Q = X_1 X_2 \cdots X_n$, θα ισχύει

$$Q^* A Q = T, \quad \text{άνω τριγωνικό.}$$

Παραγοντοποίηση Schur

Για κάθε τετραγωνικό μητρώο A, υπάρχει ορθομοναδιαίο Q τέτοιο ώστε

$$Q^* A Q = T,$$

όπου το T είναι **άνω τριγωνικό**.

- Οι ιδιοτιμές του A είναι στη διαγώνιο του T.
- Προσοχή: τα ιδιοδιανύσματα θεωρήθηκαν γνωστά. Επομένως, η διαδικασία όπως παρουσιάστηκε, δεν αποτελεί τρόπο επίλυσης του ΑΠΙ.
- Η Schur είναι μια από τις σημαντικότερες παραγοντοποιήσεις στο Λογισμό Μητρώων (όπως π.χ. οι LU, QR, $LL^\top$, κ.λπ.)

Παραγοντοποίηση Schur συμμετρικών μητρώων και διαγωνιοποιησιμότητα

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παραγοντοποίηση όταν το A είναι (πραγματικό) συμμετρικό ή ερμιτιανό. Στη συνέχεια εξετάζουμε τη διάσπαση Schur πραγματικών συμμετρικών μητρώων. Τότε:

- το Q είναι πραγματικό,
- το T είναι πραγματικό και διαγώνιο.
- Επομένως ισχύει $Q^\top AQ = \Lambda$, άρα **κάθε συμμετρικό μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο**,
- Το Q περιέχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A.
- Τα ιδιοδιανύσματα είναι μεταξύ τους ορθογώνια, ακόμα και όσα αντιστοιχούν σε πολλαπλή ιδιοτιμή.
- Από τις σχέσεις

$$A[q_1, \ldots, q_n] = [q_1, \ldots, q_n]\Lambda \Leftrightarrow [q_1, \ldots, q_n]^\top A[q_1, \ldots, q_n] = \Lambda$$

το φασματικό ανάπτυγμα έχει τη μορφή

$$A = \lambda_1 q_1 q_1^\top + \cdots \lambda_n q_n q_n^\top$$

Μία ενδιαφέρουσα αναγωγή

Αφού τα συμμετρικά μητρώα έχουν όλες αυτές τις καλές ιδιότητες, έχει ενδιαφέρον το εξής:
Κάθε τετραγωνικό μητρώο $\mathbb{R}^{n\times n}$ μπορεί να γραφτεί ως

$$A = \frac{A+A^\top}{2} + \frac{A-A^\top}{2},$$

Ο πρώτος όρος είναι συμμετρικός και ο δεύτερος αντισυμμετρικός:

$$\left(\frac{A-A^\top}{2}\right)^\top = -\left(\frac{A-A^\top}{2}\right)$$

Ενδιαφέρον: Οι ιδιοτιμές των αντισυμμετρικών μητρώων είναι όλες φανταστικές.

Ομοιότητα μητρώων

Αν δύο μητρώα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, λέμε ότι είναι όμοια.

Αν $A, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και το P είναι αντιστρέψιμο, τότε τα A και $P^{-1}AP$ είναι όμοια. Ο μετασχηματισμός:

$$A \rightarrow P^{-1}AP$$

λέγεται **μετασχηματισμός ομοιότητας**. Αν το P είναι ορθογώνιο (ή ορθομοναδιαίο), τότε λέγεται ορθογώνιος (ή ορθομοναδιαίος) μετασχηματισμός ομοιότητας.

Συμμετρικά θετικά ορισμένα μητρώα

Πολλά μητρώα στις εφαρμογές έχουν την ιδιότητα που θα συζητήσουμε τώρα. Το αντίστοιχο των «θετικών αριθμών» στην περίπτωση των μητρώων!

Ορισμός

Δίνεται συμμετρικό $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε Οι παρακάτω ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

1. Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες θετικές.
2. Για $k = 1, \ldots, n$, $\det A_{1:k,1:k} > 0$.
3. Για κάθε $x \neq 0$, $x^\top Ax > 0$.
4. Αν $A = LU$ είναι η παραγοντοποίηση LU του A, όλοι οι οδηγοί (τα διαγώνια στοιχεία του U) είναι θετικοί.

Αν ισχύει μία από αυτές, το μητρώο καλείται συμμετρικό θετικά ορισμένο (ΣΘΟ).

Όταν ένα μητρώο είναι ΣΘΟ τότε

- όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι θετικά.
- είναι αντιστρέψιμο.
- υπάρχει κάτω τριγωνικό L τέτοιο ώστε $A = LL^\top$.

Κανονική μορφή Jordan I

Τι κάνουμε όταν το μητρώο δεν είναι διαγωνιοποιήσιμο;

Τότε δεν υπάρχει παραγοντοποίηση $A = Q\Lambda Q^{-1}$.

Πόσο απλό μπορούμε να κάνουμε γενικό μητρώο A με μετασχηματισμό ομοιότητας;
Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, υπάρχει μητρώο $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιο ώστε

$$X^{-1}AX = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_q \end{pmatrix}$$

Κανονική μορφή Jordan II

Κάθε J_i αποκαλείται απλό (υπο)μητρώο Jordan και έχει τη μορφή

$$J_i = \cdot \; 0$$

- q είναι το πλήθος των γ.α. ιδιοδιανυσμάτων του A.
- Σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχούν όσα υπομητρώα Jordan είναι η γεωμετρική πολλαπλότητά της.
- Το άθροισμα των διαστάσεων των υπομητρώων Jordan για μία ιδιοτιμή είναι ίσο με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

Παρατηρήσεις

Καλά νέα 1) Η μορφή Jordan αποκαλύπτει τη φασματική δομή του μητρώου. 2) Αποτελεί μία σημαντική κανονική μορφή μητρώου (υπάρχουν και άλλες).

Κακά νέα Αν και ενδιαφέρουσα από μαθηματικής άποψης, υπάρχουν εγγενείς δυσκολίες στον υπολογισμό της μορφής Jordan.

Τι γίνεται στην πράξη; Χρησιμοποιούμε εναλλακτικές παραγοντοποιήσεις και μορφές.

Εναλλακτικές παραγοντοποιήσεις

Schur υπάρχει πάντα ορθομοναδιαίο Q τέτοιο ώστε $Q^*AQ = R$ είναι άνω τριγωνικό.

SVD υπάρχουν πάντα ορθομοναδιαία U, V τέτοια ώστε το $U^*AV = \Sigma$ να είναι διαγώνιο (με μη αρνητικά στοιχεία!)

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης