# Γραμμική Άλγεβρα

## Ενότητα **6** : Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

# Άδειες Χρήσης

## Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Σκοπός Ενότητας

- Εύρεση Ιδιοτιμών & Ιδιοδιανυσμάτων
- Διαγωνοποιήση Μητρώων
- Συμμετρικά, Συμμετρικά και Θετικά Ορισμένα, Όμοια Μητρώα
- Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)

# Περιεχόμενα

# Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Συζητάμε το **Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)**

1. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα
2. Τι και γιατί
3. Ορισμοί
4. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο
5. Θεώρημα Cayley-Hamilton
6. Παραδείγματα

# Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Συζητάμε το **Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)**

1. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα
2. Τι και γιατί
3. Ορισμοί
4. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο
5. Θεώρημα Cayley-Hamilton
6. Παραδείγματα

Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Υπολογισμός ιδιοτιμών από το χ.π.
2. Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων.
3. Διαγωνιοποίηση.
4. Χρήση ιδιοζευγών στον υπολογισμό δυνάμεων μητρώου
5. Ιδιοτιμές γινομένου μητρώων.
6. Φασματικό ανάπτυγμα μητρώου.
7. Ομοιότητα μητρώων.
8. (Φασματικές ιδιότητες συμμετρικών πραγματικών μητρώων)

# Υπό συζήτηση ενότητες

# Ανακεφαλαίωση

## Βασικός ορισμός

Για ένα μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και μεταβλητή $\lambda$, η ορίζουσα $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n$. Λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο και αν το γράψουμε

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

τότε $\gamma_{n-1} = -\mathrm{trace}(A)$ και $\gamma_0 = (-1)^n\det(A)$.

Προσοχή:

- Το πολυώνυμο έχει ακριβώς $n$ ρίζες $\lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{C}^n$ που αποκαλούμε **ιδιοτιμές** του $A$.
- Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda$, υπάρχει **ιδιοδιάνυσμα** $x \in \mathbb{C}^n$ τ.ώ. $Ax = \lambda x$.
- Ισχύει ότι $p(A) = 0$ **(θεώρημα Cayley-Hamilton)**.
- τα ιδιοζεύγη (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) μητρώων παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε πληθώρα εφαρμογών.

## Ιδιοτιμές (επανάληψη και συνέχεια)

- Ιδιοτιμές του $A$ είναι οι $n$ ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- Φάσμα είναι το σύνολο των ιδιοτιμών. Συχνά συμβολίζεται $\sigma(A)$ ή $\Lambda(A)$.
- Μπορούμε να γράψουμε

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k}$$

όπου οι τιμές $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ είναι όλες διαφορετικές. Τότε

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = n$$

και η τιμή $\mu_j$ ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_j$.

Μία ιδέα επίλυσης του ΑΠΙ (ΜΟΝΟΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΔΗΛ. ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΓΚΕΣ ΑΥΤΟΥ ΤΟΨ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ!)

1. Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Μία ιδέα επίλυσης του ΑΠΙ (ΜΟΝΟΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΔΗΛ. ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΓΚΕΣ ΑΥΤΟΥ ΤΟΨ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ!)

1. Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου
2. Υπολογισμός των ριζών του (ιδιοτιμές)

Μία ιδέα επίλυσης του ΑΠΙ (ΜΟΝΟΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΔΗΛ. ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΓΚΕΣ ΑΥΤΟΥ ΤΟΨ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ!)

1. Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου
2. Υπολογισμός των ριζών του (ιδιοτιμές)
3. Για κάθε ιδιοτιμή, επίλυση του $(A - \lambda I)x = 0$ και επιλογή των ιδιοδιανυσμάτων (ανεύρεση των ειδικών λύσεων). Η ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΗ ΛΥΣΗ $x = 0$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ

Μία ιδέα επίλυσης του ΑΠΙ (ΜΟΝΟΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΔΗΛ. ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΓΚΕΣ ΑΥΤΟΥ ΤΟΨ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ!)

1. Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου
2. Υπολογισμός των ριζών του (ιδιοτιμές)
3. Για κάθε ιδιοτιμή, επίλυση του $(A - \lambda I)x = 0$ και επιλογή των ιδιοδιανυσμάτων (ανεύρεση των ειδικών λύσεων). Η ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΗ ΛΥΣΗ $x = 0$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ

Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_j$, συνήθως ενδιαφέρει ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που είναι βάση για το $\mathrm{null}(\lambda_j I - A)$. Αυτά είναι ειδικές λύσεις του $(\lambda I - A)x = 0$. Συνήθως τα διανύσματα επιλέγονται κανονικοποιημένα.

# Παραδείγματα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$, $\Lambda(A) = \{1, 3\}$,
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1.$

# Παραδείγματα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3), \Lambda(A) = \{1, 3\},$
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2,$
$\Lambda(A) = \{1\},$
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 2.$

# Παραδείγματα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3), \Lambda(A) = \{1, 3\},$
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2,$
$\Lambda(A) = \{1\},$
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 2.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$
$\Lambda(A) = \{1, 2\},$
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1,$
$\lambda_2 = 2, \mu_2 = 2.$

# Παραδείγματα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3), \Lambda(A) = \{1, 3\},$
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1.$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2\,\mathrm{i} & 0 & -2\,\mathrm{i} \\ 2\,\mathrm{i} & 4 & -2\,\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2\,\mathrm{i} & 4 & 2\,\mathrm{i} \\ -2\,\mathrm{i} & 0 & 2\,\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 4 - 4\mathrm{i})(\lambda - 4 + 4\mathrm{i}),$
$\Lambda(A) = \{2, 4 + 4\mathrm{i}, 4 - 4\mathrm{i}\},$
$\lambda_1 = 4, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 4 + 4\mathrm{i}, \mu_2 = 4 - 4\mathrm{i}.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2,$
$\Lambda(A) = \{1\},$
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 2.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$
$\Lambda(A) = \{1, 2\},$
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1,$
$\lambda_2 = 2, \mu_2 = 2.$

# Παραδείγματα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) \quad = \quad \lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 4)^2$$

επομένως

$$\lambda_1 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 4, \mu_2 = 2.$$

και

$$\Lambda(A) = \{0, 4\}$$

# Ιδιοδιανύσματα

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, Βρήκαμε ότι $\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1$.

Θέτουμε $A(1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(1)x = 0$:

Η τάξη $\mathrm{rank}(A(1)) = 1$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(1)$ είναι το $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα για το $\lambda_1$: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Θέτουμε $A(3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(3)x = 0$: Η τάξη $\mathrm{rank}(A(3)) = 1$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(3)$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα για το $\lambda_2$: $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

# Παρατηρήσεις

Αν πολλαπλασιάσουμε $A(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Επίσης το $X = (x_1, x_2)$ είναι ορθογώνιο (και συμμετρικό)! Ισχύει επομένως ότι

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή δείξαμε

$$X^{-1}AX = X^{\top}AX = \Lambda$$

# Ιδιοδιανύσματα Ι

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Βρήκαμε ότι $\lambda_1 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 2, \mu_2 = 2.$

Θέτουμε $A(0) = -A$ και επιλύουμε $-Ax = 0$:

Η τάξη $\mathrm{rank}(A(0)) = 2$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι

μητρώο μηδενοχώρου για το $A(0)$ είναι το $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιανύσματα για το $\lambda_1 = 0$:

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

# Ιδιοδιανύσματα II

Θέτουμε $A(4) = 4I - A$ και επιλύουμε $(4I - A)x = 0$:

Η τάξη $\mathrm{rank}(A(4)) = 2$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι

μητρώο μηδενοχώρου για το $A(4)$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιανύσματα για το $\lambda_2 = 4$:

$x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

# Ιδιοδιανύσματα III

Για το $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. βρήκαμε ότι $\Lambda(A) = \{1\}, \lambda_1 = 1, \mu_1 = 2$.

Θέτουμε $A(1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(1)x = 0$:

Η τάξη $\mathrm{rank}(A(1)) = 1$, επομένως η διάσταση του $\mathrm{null}(A(1)) = 1$.

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{null}(A(1)) < \mu_1$.

Βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(1)$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Κανονικοποιούμε, οπότε το ιδιοδιάνυσμα για το $\lambda_1$ είναι $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Προσοχή: Όλα τα ιδιοδιανύσματα του $A$ για το $\lambda_1 = 1$ είναι πολλαπλάσια του $x_1$. Δεν υπάρχουν άλλα! Εφόσον η μόνη ιδιοτιμή είναι το $\lambda_1 = 1$, αυτό είναι το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα του $A$.

# Ιδιοδιανύσματα

*Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda$, ιδιοδιάνυσμα ονομάζεται το μη μηδενικό διάνυσμα $x$ για το οποίο $Ax = \lambda x$.*

<u>Προσοχή:</u> Για κάθε διαφορετική ιδιοτιμή $\lambda_j$:

- Ο μηδενόχωρος $\lambda_j I - A$ λέγεται ιδιόχωρος.
- Η διάσταση του ιδιόχωρου λέγεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_j$.
- γεωμ. πολλ.$(\lambda_j) \leq$ αλγ. πολλ.$(\lambda_j)$

# Ιδιοδιανύσματα

δεξιά και αριστερά

Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

τότε η τάξη του μητρώου $A - \lambda I$ είναι το πολύ $\operatorname{rank}(A - \lambda I) \leq n - 1$.
Άρα για κάθε ιδιοτιμή $\lambda$ υπάρχουν

διανύσματα $x \in \operatorname{null}(A - \lambda I)$ ώστε $Ax = \lambda x$ που λέγονται δεξιά ιδιοδιανύσματα του $A$ για την ιδιοτιμή $\lambda$.

διανύσματα $y \in \operatorname{null}(A^* - \bar{\lambda} I)$ ώστε $y^* A = \lambda y^*$ που λέγεται αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $A$ για την ιδιοτιμή $\lambda$

# Παρατήρηση

### Πρόταση

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

## Διαγωνιοποίηση μητρώου I

Αν υπάρχουν $n$ ιδιοζεύγη $(\lambda_j, x_j)$ του $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2, \ldots, Ax_n = \lambda_n x_n$$

Συλλέγουμε και διατυπώνουμε με μητρώα:

$$A[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [x_1 \ldots, x_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Επομένως

$$AX = X\Lambda,$$

όπου $\Lambda = \mathrm{diag}([\lambda_1, \ldots, \lambda_n])$ και $X = [x_1 \ldots, x_n]$.

## Διαγωνιοποίηση μητρώου ΙΙ

ΠΡΟΣΕΞΤΕ Αν το $X$ είναι αντιστρέψιμο,

$$X^{-1}AX = \Lambda,$$

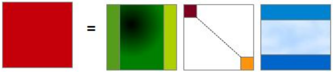
δηλ. χρησιμοποιώντας τα μητρώα $X$ (με στήλες τα δεξιά ιδιοδιανύσματα) και $X^{-1}$ (με στήλες του $X^{-*}$ τα αριστερά ιδιοδιανύσματα) διαγωνιοποιήσαμε το $A$.

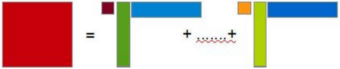
Κάθε μητρώο για το οποίο υπάρχουν $n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα χαρακτηρίζεται ως διαγωνιοποιήσιμο, ειδάλλως λέγεται μη διαγωνιοποιήσιμο.

# Ανάπτυγμα μητρώου συναρτήσει ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Αν το μητρώο $A$ διαθέτει $n$ γ.α. ιδιοδιοδιανύσματα, τότε $A = X\Lambda X^{-1}$ όπου $\Lambda$ το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών και $X$ το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων.
Θυμηθείτε τη γραφή γινομένου μητρώων ως άθροισμα μητρώων πρώτης τάξης (στήλη του 1ου επί γραμμή του 2ου).
Θέτουμε για ευκολία $Y = (X^{-1})^*$, δηλ. $Y$ είναι το συζυγές αντίστροφο του $X$, τότε μπορούμε να γράψουμε το $A$ με βάση το φασματικό ανάπτυγμα.

$$
\begin{aligned}
A &= X\Lambda Y^* \\
&= \lambda_1 x_1 y_1^* + \lambda_2 x_2 y_2^* + \cdots + \lambda_n x_n y_n^*
\end{aligned}
$$



# Διαγωνιοποίηση

<u>Προσοχή</u> Δεν είναι όλα τα μητρώα διαγωνιοποιήσιμα! (όλα έχουν ακριβώς $n$ ιδιοτιμές, μπορεί όμως να μην έχουν $n$ γ.α. ιδιοδιανύσματα.)

# Διαγωνιοποίηση

Προσοχή Δεν είναι όλα τα μητρώα διαγωνιοποιήσιμα! (όλα έχουν ακριβώς $n$ ιδιοτιμές, μπορεί όμως να μην έχουν $n$ γ.α. ιδιοδιανύσματα.)
Ερώτημα Πότε είναι ένα μητρώο διαγωνιοποιήσιμο;

- Αν και μόνον αν υπάρχουν $n$ γ.α. ιδιοδιανύσματα.
- Για παράδειγμα, όταν υπάρχουν $n$ διαφορετικές ιδιοτιμές.

# Διαγωνιοποίηση

Προσοχή Δεν είναι όλα τα μητρώα διαγωνιοποιήσιμα! (όλα έχουν ακριβώς $n$ ιδιοτιμές, μπορεί όμως να μην έχουν $n$ γ.α. ιδιοδιανύσματα.)
Ερώτημα Πότε είναι ένα μητρώο διαγωνιοποιήσιμο;

- Αν και μόνον αν υπάρχουν $n$ γ.α. ιδιοδιανύσματα.
- Για παράδειγμα, όταν υπάρχουν $n$ διαφορετικές ιδιοτιμές.

Προσοχή: Αν υπάρχουν επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές δεν εξασφαλίζεται. Εξαρτάται από το μητρώο:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

# Αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα

- Σε κάθε μοναδική ιδιοτιμή αντιστοιχούν ένα δεξιό και ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα
- Τι γίνεται όταν έχουμε πολλαπλές ιδιοτιμές;
- ... αν μία ιδιοτιμή έχει πολλαπλότητα $k > 1$, υπάρχουν $k$ ιδιοδιανύσματα (π.χ. δεξιά) που να αντιστοιχούν σε αυτήν;
- Το πλήθος των γραμμικά ανεξαρτήτων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας $k$ λέγεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.
- Για κάθε ιδιοτιμή: (γεωμετρική πολλ/τα ) $\leq$ (αλγεβρικής πολ/τας)

# Πολλαπλές ιδιοτιμές και ελλειματικά μητρώα

Προσοχή: Αν κάποια ιδιοτιμή $\lambda$ είναι πολλαπλή (π.χ. με πολλαπλότητα $k$) τότε γνωρίζουμε ότι $A - \lambda I$ είναι μη αντιστρέψιμο, και άρα

1. $\mathrm{rank}(A - \lambda I) < n$.
2. $1 \leq (\mathrm{dimnull})(A - \lambda I) \leq k$.

Δύο περιπτώσεις:

$\dim(\mathrm{null}(A - \lambda I)) = k$ τότε υπάρχουν $k$ γ.α. ιδιοδιανύσματα.

$1 \leq \dim(\mathrm{null}(A - \lambda I)) < k$ τότε δεν υπάρχουν αρκετά ιδιοδιανύσματα και το μητρώο καλείται ελλειμματικό (defective).)

Γενικά Τα ελλειμματικά μητρώα δεν διαθέτουν $n$ γ.α. ιδιοδιανύσματα άρα δεν είναι διαγωνιοποιήσιμα.

## Αριστερά ιδιοδιανύσματα

Ποιά είναι η σχέση των ιδιοτιμών/διανυσμάτων του $A$ με αυτά του $A^*$;

- Αν $Ax = \lambda x$ τότε $x^* A^* = \bar{\lambda} x^*$επομένως το $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του $A^*$
- Επομένως οι ιδιοτιμές του $A^*$ είναι οι συζυγείς των ιδιοτιμών του $A$.

Γενικά δεν υπάρχει απλή σχέση μεταξύ των ιδιοδιανυσμάτων των $A, A^*$.

- Αν $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του $A^*$ τότε θα υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $y$ ώστε $A^* y = \bar{\lambda} y$
- επομένως $y^* A = \lambda y^*$

# Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα δυνάμεων μητρώου

- Για κάθε $A$, αν $Ax = \lambda x$ τότε $A^k x = \lambda^k x$
- ομοίως $\gamma A^j x + \delta A^k x = \gamma \lambda^j x + \delta \lambda^k x$
- άρα αν οι ιδιοτιμές του $A$ είναι $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ τότε οι ιδιοτιμές του πολυωνύμου $q(A) = \gamma_s A^s + \cdots + \gamma_0 I$, είναι

$$\begin{array}{rcl} q(\lambda_1) & = & \gamma_s \lambda_1^s + \cdots + +\gamma_1 \lambda_1 + \gamma_0 I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q(\lambda_n) & = & \gamma_s \lambda_n^s + \cdots + \gamma_1 \lambda_n + \gamma_0 I \end{array}$$

δηλ. $\{q(\lambda_1), ...., q(\lambda_n)\}$.

**Συμπεράσματα**

- Επομένως αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές του $A$ γνωρίζουμε και τις ιδιοτιμές οποιουδήποτε πολυωνύμου στο $A$.
- Τα ιδιοδιανύσματα του $q(A)$ είναι ίδια με τα ιδιοδιανύσματα του $A$.

# Ευχάριστα .... της διαγωνιοποίησης

## Διευκόλυνση στη διαχείριση δυνάμεων

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ότι γνωρίζουμε $X, \Lambda$ όπως πριν, δηλ. $X^{-1}AX = \Lambda$.

$$\begin{aligned} A &= X\Lambda X^{-1} \\ A^k &= (X\Lambda X)^k = (X\Lambda X^{-1})(X\Lambda X^{-1})\cdots(X\Lambda X^{-1}) \\ &= X\Lambda(X^{-1}X)\Lambda(X^{-1}X)\Lambda\cdots(X^{-1}X)\Lambda X^{-1} \\ &= X\Lambda^k X^{-1}. \end{aligned}$$

*Ο υπολογισμός του $A^k$ ανάγεται στον υπολογισμό του $\Lambda^k$ και σε δύο επιμέρους πολλαπλασιασμούς μητρώων, π.χ. $X\Lambda^k \to (X\Lambda^k)X^{-1}$.*

Επιπλέον ερώτημα

Πώς συμπεριφέρεται το $A^k$ καθώς το $k \to \infty$;

- Υπάρχει κάτι το ιδιαίτερο;
- Υπάρχει όριο;
- Ποιό είναι αυτό;
- Πάνε όλα τα στοιχεία στο $\infty$? ή στο 0;

# Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό για οποιοδήποτε $k$ επιθυμούμε, προκύπτει το ζητούμενο, αφού στρογγυλέψουμε

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0.5062 & -0.4938 & 0 \\ -0.4938 & 0.5062 & 0 \\ -0.4938 & 0.4938 & 0.0123 \end{pmatrix}, A^{10} = \begin{pmatrix} 0.5000 & -0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

Οι τιμές έχουν υποστεί στρογγύλευση.

# Ομοιότητα μητρώων

(Strang, 6.6)

## Ορισμός

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Μας δίνεται αντιστρέψιμο $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και θέτουμε $B = X^{-1}AX$. Τότε $\Lambda(B) = \Lambda(A)$. Τα μητρώα $A$ και $B$ αποκαλούνται όμοια και έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιοτιμές.

- $\Lambda(AB) = \Lambda(BA)$

## Μεταθετικότητα και ιδιοδιανύσματα

Ισχύει ότι $AB = BA$ αν και μόνον αν υπάρχει ίδιο $X$ που διαγωνιοποιεί αμφότερα τα μητρώα, δηλ.

$$\exists X \text{ τ.ώ. } X^{-1}AX = \Lambda(A), X^{-1}BX = \Lambda(B).$$

# Συναρτήσεις μητρώων

Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε τυπικά και γενικές συναρτήσεις μητρώων.

- η συνάρτηση ενός διαγώνιου μητρώου, έστω $D = \mathrm{diag}[\delta_1, \cdots, \delta_n]$, είναι το διαγώνιο μητρώο που έχει στη διαγώνιο τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση στα στοιχεία της διαγωνίου:

$$f(D) = \mathrm{diag}[f(\delta_1), \ldots, f(\delta_n)]$$

Δοθείσης συνάρτησης $f$, για κάθε διαγωνιοποιήσιμο μητρώο $A$ για το οποίο η συνάρτηση $f$ υπάρχει σε κάθε ιδιοτιμή του μητρώου (δηλ. ορίζονται οι τιμές $f(\lambda_j)$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_j$ του $A$), η συνάρτηση μητρώου $f(A)$ ορίζεται ως εξής:

$$f(A) \quad = \quad Xf(\Lambda)X^{-1} = X \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} X^{-1}$$

όπου $\Lambda$, $X$ είναι τα μητρώα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του $A$.

<u>Συμπέρασμα</u>: Αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές, το $X$ (ιδιοδιανύσματα) και το $X^{-1}$, η συνάρτηση μητρώου ανάγεται στον υπολογισμό της συνάρτησης για κάθε ιδιοτιμή και δύο πολλαπλασιασμούς μητρώων. (Διαβάστε προαιρετικά τις σελ. 390-392 του Strang)

# Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Καθώς $k \to \infty$,

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

οι όροι στο διαγώνιο μητρώο $\Lambda^k$ που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $|\lambda| < 1$ τείνουν στο 0, επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A^k &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Συναρτήσεις μητρώων

Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε τυπικά και γενικές συναρτήσεις μητρώων.

- η συνάρτηση ενός διαγώνιου μητρώου, έστω $D = \mathrm{diag}[\delta_1, \cdots, \delta_n]$, είναι το διαγώνιο μητρώο που έχει στη διαγώνιο τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση στα στοιχεία της διαγωνίου:

$$f(D) = \mathrm{diag}[f(\delta_1), \ldots, f(\delta_n)]$$

Δοθείσης συνάρτησης $f$, για κάθε διαγωνιοποιήσιμο μητρώο $A$ για το οποίο η συνάρτηση $f$ υπάρχει σε κάθε ιδιοτιμή του μητρώου (δηλ. ορίζονται οι τιμές $f(\lambda_j)$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_j$ του $A$), η συνάρτηση μητρώου $f(A)$ ορίζεται ως εξής:

$$f(A) \quad = \quad Xf(\Lambda)X^{-1} = X \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} X^{-1}$$

όπου $\Lambda$, $X$ είναι τα μητρώα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του $A$.

Συμπέρασμα: Αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές, το $X$ (ιδιοδιανύσματα) και το $X^{-1}$, η συνάρτηση μητρώου ανάγεται στον υπολογισμό της συνάρτησης για κάθε ιδιοτιμή και δύο πολλαπλασιασμούς μητρώων. (Διαβάστε προαιρετικά τις σελ. 390-392 του Strang)

# Παράδειγμα

$$A - \lambda_2 x_2 y_2^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ενώ

$$A - \lambda_1 x_1 y_1^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, A - \lambda_3 x_3 y_3^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Προσέξτε ότι γι' αυτό το μητρώο,

$$\underbrace{\max|A - \lambda_2 x_2 y_2^*|}_{1/3} \text{ μικρότερο του } \underbrace{\max|A - \lambda_1 x_1 y_1^*|}_{2/3} \text{ και του } \underbrace{\max|A - \lambda_3 x_3 y_3^*|}_{1/2}$$

$$A^k = 3^{-k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} + 3^{-k} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

# Παρατήρηση

Ας δούμε καλύτερα τι συμβαίνει : Καθώς το $k$ μεγαλώνει, η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ κυριαρχεί (επειδή $1^k = 1$, ο όρος δεν φαίνεται). Εξετάζοντας το φασματικό ανάπτυγμα, μπορούμε να πούμε ότι από ένα σημείο και μετά, ο όρος $A_2 := \lambda_2 x_2 y_2^*$ κυριαρχεί και μπορεί να θεωρηθεί ως προσέγγιση του $A^k$ (προφανώς όσο μεγαλύτερο το $k$ τόσο καλύτερη και η προσέγγιση).

$$A^k \approx \lambda_2 x_2 y_2^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} - \lambda_2 x_2 y_2^* = 10^{-4} \begin{pmatrix} 0.0847 & 0.0847 & 0 \\ 0.0847 & 0.0847 & 0 \\ 0.0847 & -0.0847 & 0.1694 \end{pmatrix}, \quad A^{20} - \lambda_2 x_2 y_2^* = 10^{-9} \begin{pmatrix} 0.1434 & 0.1434 & 0 \\ 0.1434 & 0.1434 & 0 \\ 0.1434 & -0.1434 & 0.2868 \end{pmatrix}$$

# Παραδείγματα (Strang, σελ. 382)

Στην τάξη παρατηρήσαμε πειραματικά τη συμπεριφορά των δυνάμεων των παρακάτω μητρώων και πώς αυτή προβλέπεται από τις ιδιοτιμές.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \; \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}, \; \Lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \; \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 6.9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \; \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}\,\mathrm{i}}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}\,\mathrm{i}}{10} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0.999 & 1000 \\ 0 & 0.998 \end{pmatrix}, \; \Lambda = \begin{pmatrix} 0.999 & 0 \\ 0 & 0.998 \end{pmatrix}$$

# Επεκτάσεις (Strang, 6.2)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν μόνον όταν έχουμε ένα εμπλεκόμενο μητρώο και δυνάμεις του.

Γενικά - δύο αρνητικά αποτελέσματα και ένα που θα εξετάσουμε:

- $\Lambda(A+B) \neq \Lambda(A) + \Lambda(B)$
- υπάρχουν $\lambda \in \Lambda(AB)$ τέτοια ώστε $\lambda \neq \lambda_i(A)\lambda_j(B)$ για κανένα $i, j$

Το πρώτο δεν εκπλήσσει, εξάλλου $\det(A) + \det(B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Σχετικά με το γινόμενο: Θυμηθείτε ότι $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$. Για τις ιδιοτιμές δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο με την 1η ισότητα. Υπάρχει όμως κάτι αντίστοιχο με τη δεύτερη ισότητα.

Στη συνέχεια εξετάζουμε πως συνδέονται οι ιδιοτιμές $\Lambda(AB)$ με τις ιδιοτιμές $\Lambda(BA)$.

# Ιδιοτιμές γινομένου μητρώων

Χρησιμοποιώντας ομοιότητα, θα δείξουμε πως συνδέονται οι ιδιοτιμές $\Lambda(AB)$ με τις ιδιοτιμές $\Lambda(BA)$. Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Προσοχή, τα μητρώα $A$, $B$ δεν είναι κατ' αρνάγκη τετραγωνικά, το γινόμενό τους όμως πρέπει να είναι! Τότε αν

$$X = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0_{m,n} \\ B & 0_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{m,m} & 0_{m,n} \\ B & BA \end{pmatrix}$$

Έστω ότι $m \geq n$, τότε

$$(\lambda_1(AB), \ldots, \lambda_n(AB), \lambda_{n+1}(AB), \ldots \lambda_m(AB), \overbrace{0, \ldots 0}^{n}) = (\lambda_1(BA), \ldots, \lambda_n(BA), \underbrace{0, \ldots 0}_{m})$$

επομένως οι ιδιοτιμές του $AB$ είναι ίδιες με τις ιδιοοτιμές του $BA$ συν επιπλέον μία μηδενική ιδιοτιμή πολλαπλότητας $m-n$.

$$\Lambda(AB) = \Lambda(BA) \cup \{0\}$$

# Ιδιοτιμές ερμιτιανών μητρώων και συμμετρικών πραγματικών μητρώων

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^\top = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^* \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^* = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

άρα, επειδή $\|x\| \neq 0$,

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Οι ιδιοτιμές των ερμιτιανών και των πραγματικών συμμετρικών μητρώων είναι όλες πραγματικές. Επίσης αν $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε και τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά.

# Ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων

συμμετρικών πραγματικών μητρώων

Έστω διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda \neq \mu$ και

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x, \;\; Ay = \mu y \\ y^\top Ax = \lambda y^\top x = y^\top A^\top x \\ (Ay)^\top x = \mu y^\top x \Rightarrow \mu(y^\top x) = \lambda(y^\top x) \end{aligned}$$

οπότε είτε $\lambda = \mu$ ή $y^\top x = 0$.

Τα ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι πάντοτε κάθετα μεταξύ τους

# Ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων

## συμμετρικών πραγματικών μητρώων

Τι γίνεται με τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε πολλαπλές ιδιοτιμές;

Κάθε συμμετρικό πραγματικό ή ερμιτιανό μητρώο διαθέτει ακριβώς $n$ ιδιοδιανύσματα που είναι κάθετα μεταξύ τους. Δηλαδή διαθέτει ένα πλήρες σύνολο ορθογωνίων ιδιοδιανυσμάτων.

$$
\begin{aligned}
A[q_1, \ldots, q_n] &= [q_1, \ldots, q_n]\Lambda \Leftrightarrow [q_1, \ldots, q_n]^\top A[q_1, \ldots, q_n] = \Lambda \\
Q^\top AQ &= \Lambda \\
A &= \lambda_1 q_1 q_1^\top + \cdots \lambda_n q_n q_n^\top \text{ φασματικό ανάπτυγμα}
\end{aligned}
$$

# Το Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)

- Ιδιοτιμές του $A$ ονομάσαμε τις $n$ ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
- Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ένα διάνυσμα $x$ ονομάζεται (δεξιό) ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda$, αν $Ax = \lambda x$. Αν $y^*A = \lambda y^*$, το $y$ λέγεται αριστερό ιδιοδιάνυσμα.

# Υπόχωροι ιδιοδιανυσμάτων ⇒ Ιδιόχωροι

**Ιδιόχωρος ιδιοτιμής:**

Ο χώρος που παράγεται από το διάνοιγμα των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε κάποια ιδιοτιμή.

Προσοχή: Οι ιδιόχωροι είναι αναλλοίωτοι ως προς το μητρώο που τους ορίζει:

$$\text{Αν } \mathcal{V} = \mathrm{span}\langle q_{i_1}, \dots, q_{i_k} \rangle \Rightarrow A\mathcal{V} = \mathcal{V}$$

## Ιδιοδιανύσματα και ιδιόχωροι

- Γενικά, δεξιός (αριστερός) ιδιόχωρος του $A$ λέγεται ο υπόχωρος $\mathrm{null}(A - \lambda I)$ (αντίστοιχα, ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathrm{null}(A^* - \lambda I)$).
- ΠΡΟΣΕΞΤΕ: Επειδή το μητρώο είναι τετραγωνικό, για κάθε ιδιοτιμή $\lambda$, ο δεξιός και αριστερός μηδενόχωρος έχουν ίδια διάσταση, $n - r(\lambda)$, όπου $r(\lambda)$ είναι η τάξη του $A - \lambda I$.
- Η πολλαπλότητα της κάθε ρίζας του $p(\lambda)$ ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda$.
- $\forall \gamma \neq 0,\ Ax = \lambda x \Leftrightarrow (\gamma A)x = (\gamma \lambda)x$
- Η διάσταση $(n - r(\lambda))$ των μηδενόχωρων λέγεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.
- Ο (αριστερός) μηδενόχωρος για κάθε ιδιοτιμή καλείται (αριστερος) ιδιόχωρος της ιδιοτιμής.

# Γραμμική ανεξαρτησία και ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων

- Αν δύο ιδιοδιανύσματα ενός μητρώου αντιστοιχουν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- Αν το μητρώο είναι συμμετρικό, τότε τα ιδιοδιανύσματα διαφορετικών ιδιοτιμών θα είναι επίσης κάθετα μεταξύ τους.

# Μία (αφελής) μέθοδος υπολογισμού του ΑΠΙ

Σημείωση: Συνήθως εννοούμε την εύρεση των ιδιοτιμών και αντίστοιχων δεξιών, κανονικοποιημένων, ιδιοδιανυσμάτων.
ΜΟΝΟΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ!

1. Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου
2. Υπολογισμός των ριζών του (ιδιοτιμές)
3. Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή, επίλυση του $(A - \lambda I)x = 0$ (εύρεση μηδενόχωρου, κεφ. 3). Κανονικοποίηση των διανυσμάτων που (βάση) που επελέγη να εκπροσωπεί τον υπόχωρο.

# Μέθοδος δύναμης

αφελής μέθοδος για ... ΓΙΓΑΝΤΙΑΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Αν η μέγιστη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή, έστω $\lambda_{\max}$, ενός $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι μοναδική (άρα πραγματική!), με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $q_1$, και έστω $x \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο, τ.ώ. $x^\top q_1 \neq 0$, τότε η ακολουθία των διανυσματων $\{Ax, A^2x, \ldots, A^kx, \ldots\}$ τείνει σε διάνυσμα του ιδιόχωρου του $\lambda_{\max}$.

# Μέθοδος δύναμης

αφελής μέθοδος για ... ΓΙΓΑΝΤΙΑΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Αν η μέγιστη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή, έστω $\lambda_{\max}$, ενός $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι μοναδική (άρα πραγματική!), με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $q_1$, και έστω $x \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο, τ.ώ. $x^\top q_1 \neq 0$, τότε η ακολουθία των διανυσματων $\{Ax, A^2x, \ldots, A^kx, \ldots\}$ τείνει σε διάνυσμα του ιδιόχωρου του $\lambda_{\max}$.

Σε περίπτωση που η μέγιστη σε απόλυτη τιμή είναι μοναδική, τότε τείνει σε διάνυσμα συγγραμμικό του $q_1$. (προσεγγίζεται το μέγιστο ιδιοδιάνυσμα !)

# Μέθοδος δύναμης

αφελής μέθοδος για ... ΓΙΓΑΝΤΙΑΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

> Αν η μέγιστη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή, έστω $\lambda_{\max}$, ενός $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι μοναδική (άρα πραγματική!), με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $q_1$, και έστω $x \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο, τ.ώ. $x^\top q_1 \neq 0$, τότε η ακολουθία των διανυσματων $\{Ax, A^2x, \ldots, A^kx, \ldots\}$ τείνει σε διάνυσμα του ιδιόχωρου του $\lambda_{\max}$.

Σε περίπτωση που η μέγιστη σε απόλυτη τιμή είναι μοναδική, τότε τείνει σε διάνυσμα συγγραμμικό του $q_1$. (προσεγγίζεται το μέγιστο ιδιοδιάνυσμα !)

Επίσης για μεγάλα $k$, το παρακάτω πηλίκο,

$$\left(\frac{x^\top A^k x}{x^\top x}\right)^{1/k} \approx \lambda_{\max} \text{ προσεγγίζεται η μέγιστη ιδιοτιμή!}$$

Ορισμός Για κάθε μητρώο $A$, το πηλίκο $x^\top Ax/x^\top x$ ονομάζεται πηλίκο Rayleigh.

# Ιδιοτιμές ερμιτιανών μητρώων και πραγματικών συμμετρικών μητρώων

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^\top = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^* \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^* = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

άρα, επειδή $\|x\| \neq 0$,

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Οι ιδιοτιμές των ερμιτιανών και των πραγματικών συμμετρικών μητρώων είναι όλες πραγματικές. Επίσης αν $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε όλα τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά.

# Ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων

## συμμετρικών πραγματικών μητρώων

Έστω διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda \neq \mu$ και

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y \\ y^\top A x = \lambda y^\top x = y^\top A^\top x \\ (Ay)^\top x = \mu y^\top x \Rightarrow \mu(y^\top x) = \lambda(y^\top x) \end{aligned}$$

οπότε είτε $\lambda = \mu$ ή $y^\top x = 0$.

Τα ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι πάντοτε κάθετα μεταξύ τους

# Ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων

## συμμετρικών πραγματικών μητρώων

Τι γίνεται με τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε πολλαπλές ιδιοτιμές;

Κάθε πραγματικό συμμετρικό ή ερμιτιανό μητρώο διαθέτει ακριβώς $n$ ιδιοδιανύσματα που είναι κάθετα μεταξύ τους. Δηλαδή διαθέτει ένα πλήρες σύνολο ορθογωνίων ιδιοδιανυσμάτων.

$$\begin{aligned} A[q_1, \ldots, q_n] &= [q_1, \ldots, q_n]\Lambda \Leftrightarrow [q_1, \ldots, q_n]^\top A[q_1, \ldots, q_n] = \Lambda \\ Q^\top A Q &= \Lambda \\ A &= \lambda_1 q_1 q_1^\top + \cdots \lambda_n q_n q_n^\top \text{ φασματικό ανάπτυγμα} \end{aligned}$$

# Φασματικό ανάπτυγμα μητρώου

Επανάληψη Αν ισχύει ότι $A = Q\Lambda Q^{-1}$, και θέσουμε

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}, \; Q^{-1} = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ \vdots \\ p_n^* \end{pmatrix}$$

τότε

$$A \;=\; \lambda_1 q_1 p_1^* + \lambda_2 q_2 p_2^* + \cdots + \lambda_n q_n p_n^*$$

<u>ΠΡΟΣΕΞΤΕ</u> Το μητρώο γράφτηκε ως γραμμικός συνδυασμός $n$ μητρώων. Οι συντελεστές είναι οι ιδιοτιμές. Τα μητρώα είναι $p_j q_j^*$ είναι 1ης τάξης, και κάθε ένα προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του $j$ δεξιού ιδιοδιανύσματος με το $j$ αριστερό ιδιοδιάνυσμα.

# Ιδιοτιμές ερμιτιανών μητρώων και πραγματικών συμμετρικών μητρώων

Επανάληψη

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^\top = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^* \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^* = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

άρα, επειδή $\|x\| \neq 0$,

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Οι ιδιοτιμές των ερμιτιανών και των πραγματικών συμμετρικών μητρώων είναι όλες πραγματικές. Επίσης αν $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε και τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά.

# Ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων πραγματικών συμμετρικών μητρώων

## Επανάληψη

Έστω διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda \neq \mu$ και

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x, \;\; Ay = \mu y \\ y^\top Ax = \lambda y^\top x = y^\top A^\top x \\ (Ay)^\top x = \mu y^\top x \Rightarrow \mu(y^\top x) = \lambda(y^\top x) \end{aligned}$$

οπότε είτε $\lambda = \mu$ ή $y^\top x = 0$.

Τα ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι πάντοτε κάθετα μεταξύ τους

# Ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων πραγματικών συμμετρικών μητρώων

## Επανάληψη

Τι γίνεται με τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε πολλαπλές ιδιοτιμές;

Κάθε πραγματικό συμμετρικό ή ερμιτιανό μητρώο διαθέτει ακριβώς $n$ ιδιοδιανύσματα που είναι κάθετα μεταξύ τους. Δηλαδή διαθέτει ένα πλήρες σύνολο ορθογωνίων ιδιοδιανυσμάτων.

$$
\begin{aligned}
A[q_1,\dots,q_n] &= [q_1,\dots,q_n]\Lambda \Leftrightarrow [q_1,\dots,q_n]^\top A[q_1,\dots,q_n] = \Lambda \\
Q^\top AQ &= \Lambda \\
A &= \lambda_1 q_1 q_1^\top + \cdots \lambda_n q_n q_n^\top \text{ φασματικό ανάπτυγμα}
\end{aligned}
$$

# Ομοιότητα μητρώων

## Επανάληψη

### Ορισμοί

Μητρώα που έχουν ακριβώς ίδιες ιδιοτιμές λέγονται όμοια. Αν $A, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και το $P$ είναι αντιστρέψιμο, τότε τα $A$ και $P^{-1}AP$ είναι όμοια. Ο μετασχηματισμός:

$$A \to P^{-1}AP$$

λέγεται μετασχηματισμός ομοιότητας. Αν το $P$ είναι ορθογώνιο (ή ορθομοναδιαίο), τότε λέγεται ορθογώνιος (ή ορθομοναδιαίος) μετασχηματισμός ομοιότητας.

- Ένα μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο αν είναι όμοιο με ένα διαγώνιο μητρώο (των ιδιοτιμών του!)
- Διαγωνιοποιήσιμα είναι όσα μητρώα διαθέτουν ακριβώς $n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- Αν τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε $P^\top P = I$ άρα το μητρώο $P$ είναι ορθογώνιο και ισχύει ότι $P^\top AP = \Lambda$.
- Αν τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθομοναδιαία μεταξύ τους, τότε $P^* AP = \Lambda$.

# Διαγωνιοποίηση

## Επανάληψη

Δύο σημαντικές περιπτώσεις για δοθέν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

1. είναι διαγωνιοποιήσιμο $\Rightarrow$ υπάρχουν $n$ γ.α. ιδιοδιανύσματα
2. δεν είναι διαγωνιοποιήσιμο (ελλειματικό) $\Rightarrow$ δεν υπάρχουν $n$ γ.α. ιδιοδιανύσματα

ΠΡΟΣΟΧΗ Αν διαγωνιοποιήσιμο, τότε σε ορισμένες (καλές) περιπτώσεις τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια (αν πραγματικά) ή ορθομοναδιαία (αν μιγαδικά), οπότε

$$Q^\top A Q = \Lambda, \;\; \text{ή} \;\; Q^* A Q = \Lambda$$

# Συνοδευτικό μητρώο

## Από τα πολυώνυμα στα μητρώα

Για κάθε πολυώνυμο $p$ βαθμού $n$, υπάρχει μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με χ.π. ίδιο με $p$.

Το $p(z) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ είναι το χ.π. του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$ το **συνοδευτικό μητρώο** του $p$.

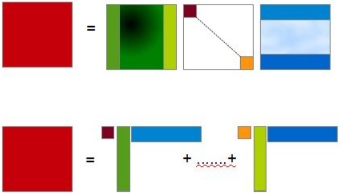
(υπολ. ριζών πολυωνύμου βαθμού $n$) $\equiv$ ( υπολ. ιδιοτιμών συνοδευτικού μητρώου )

# Μητρώο ως ανάπτυγμα ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (συνεχ.)

## Φασματικό ανάπτυγμα

Αν το μητρώο $A$ διαθέτει $n$ γ.α. ιδιοδιοδιανύσματα, τότε $A = X\Lambda X^{-1}$ όπου $\Lambda$ το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών και $X$ το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων. Θέτουμε για ευκολία $Y = (X^{-1})^*$, δηλ. $Y$ είναι το συζυγές αντίστροφο του $X$, τότε μπορούμε να γράψουμε το $A$ με βάση το φασματικό ανάπτυγμα.

$$\begin{aligned} A &= X\Lambda Y^* \\ &= \lambda_1 x_1 y_1^* + \lambda_2 x_2 y_2^* + \cdots + \lambda_n x_n y_n^* \end{aligned}$$



## Επίλυση συστημάτων μέσω φασματικού αναπτύγματος και ερμηνεία

Αν γνωρίζουμε τα $X, \Lambda$ ώστε $X^{-1}AX = \Lambda$ και αναζητούμε το $x$ τ.ώ. $Ax = b$,

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ X^{-1}AXX^{-1}x &= X^{-1}b \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x &= X\Lambda^{-1}X^{-1}b \\ &= \frac{1}{\lambda_1}x_1(y_1^* b) + \frac{1}{\lambda_2}x_2(y_2^* b) + \cdots \frac{1}{\lambda_n}x_n(y_n^* b) \end{aligned}$$

# Επίλυση συστημάτων μέσω φασματικού αναπτύγματος και ερμηνεία

Αν γνωρίζουμε τα $X, \Lambda$ ώστε $X^{-1}AX = \Lambda$ και αναζητούμε το $x$ τ.ώ. $Ax = b$,

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ X^{-1}AXX^{-1}x &= X^{-1}b \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x &= X\Lambda^{-1}X^{-1}b \\ &= \frac{1}{\lambda_1}x_1(y_1^* b) + \frac{1}{\lambda_2}x_2(y_2^* b) + \cdots \frac{1}{\lambda_n}x_n(y_n^* b) \end{aligned}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Ο τρόπος αυτός επίλυσης σπάνια συμφέρει ...

# Επίλυση συστημάτων μέσω φασματικού αναπτύγματος και ερμηνεία

Αν γνωρίζουμε τα $X, \Lambda$ ώστε $X^{-1}AX = \Lambda$ και αναζητούμε το $x$ τ.ώ. $Ax = b$,

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ X^{-1}AXX^{-1}x &= X^{-1}b \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x &= X\Lambda^{-1}X^{-1}b \\ &= \frac{1}{\lambda_1}x_1(y_1^*b) + \frac{1}{\lambda_2}x_2(y_2^*b) + \cdots \frac{1}{\lambda_n}x_n(y_n^*b) \end{aligned}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Ο τρόπος αυτός επίλυσης σπάνια συμφέρει ...
πιο χρήσιμο είναι η πληροφορία που παρέχει αναδεικνύοντας ορισμένα χαρακτηριστικά της λύσης! π.χ. πως μεγεθύνονται οι παράγοντες που αντιστοιχούν σε όρους όπου $y_j^*b \neq 0$ και η απόλυτη τιμή $|\lambda_j|$ είναι πολύ μικρή (αν είναι 0, το μητρώο δεν αντιστρέφεται).

# Βιβλιογραφία I

G. Strang.
*Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.*
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

# Σημείωμα Αναφοράς



``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

# Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ