Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **6** : Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Εύρεση Ιδιοτιμών & Ιδιοδιανυσμάτων
- Διαγωνοποιήση Μητρώων
- Συμμετρικά, Συμμετρικά και Θετικά Ορισμένα, Όμοια Μητρώα
- Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

1. Ορισμένες ενδιαφέρουσες βαθμωτές συναρτήσεις μητρώων,
2. όπως το ΙΧΝΟΣ και η ΟΡΙΖΟΥΣΑ
3. ορισμοί και ιδιότητες,
4. τρόποι υπολογισμού,
5. επίλυση συστήματος και αντιστροφή μητρώου μέσω οριζουσών.

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

1. Ορισμένες ενδιαφέρουσες βαθμωτές συναρτήσεις μητρώων,
2. όπως το ΙΧΝΟΣ και η ΟΡΙΖΟΥΣΑ
3. ορισμοί και ιδιότητες,
4. τρόποι υπολογισμού,
5. επίλυση συστήματος και αντιστροφή μητρώου μέσω οριζουσών.

Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα
2. Τι και γιατί
3. Ορισμοί
4. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο
5. Θεώρημα Cayley-Hamilton
6. Παραδείγματα

Υπό συζήτηση ενότητες

Down with Determinants!

Sheldon Axler

This paper was published in the *American Mathematical Monthly* 102 (1995), 139-154.

In 1996 this paper received the Lester R. Ford Award for expository writing from the Mathematical Association of America.

Abstract: This paper shows how linear algebra can be done better without determinants. The standard proof that a square matrix

complexification discussed earlier.

Now we are ready for the formal definition. The *determinant* of T, denoted $\det T$, is defined to be the product of the eigenvalues of T, counting multiplicity. This definition would not be possible with the traditional approach to eigenvalues, because that method uses determinants to prove that eigenvalues exist. With the techniques used here, we already know (by Theorem 3.11(a)) that T has $\dim V$ eigenvalues, counting multiplicity. Thus our simple definition makes sense.

This paper focuses on showing that determinants should be banished from much of the theoretical part of linear algebra. Determinants are also useless in the computational part of linear algebra. For example, Cramer's rule for solving systems of linear equations is already worthless for 10×10 systems, not to mention the much larger systems often encountered in the real world. Many computer programs efficiently calculate eigenvalues numerically—none of them uses determinants. To emphasize the point, let me quote a numerical analyst. Henry Thacher, in a review (*SIAM News*, September 1988) of the *Turbo Pascal Numerical Methods Toolbox*, writes,

> I find it hard to conceive of a situation in which the numerical value of a determinant is needed: Cramer's rule, because of its inefficiency, is completely impractical, while the magnitude of the determinant is an indication of neither the condition of the matrix nor the accuracy of the solution.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα I

Ορισμός

Έστω ότι $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε κάθε μιγαδικός αριθμός λ για τον οποίο το γραμμικό σύστημα έχει μη μηδενική λύση, $x \in \mathbb{C}^n$, δηλ.

$$\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ τ.ώ. } (A - \lambda I)x = 0,$$

ονομάζεται **ιδιοτιμή του** A και το αντίστοιχο x **ιδιοδιάνυσμα του** A (για την ιδιοτιμή λ). Αντίστοιχα, αν για κάποιο διάνυσμα $x \neq 0$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ τ.ώ. $Ax = \lambda x$, το x ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα και το λ ιδιοτιμή του A για το x.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός μητρώου αναδεικνύουν πολλά σημαντικά ζητήματα για ένα μητρώο και για τους διανυσματικούς (υπο)χώρους που συνδέονται με αυτό και χρησιμοποιούνται πολύ στις εφαρμογές.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα II

Ερωτήματα:

- Υπάρχουν ιδιοτιμές; Πόσες υπάρχουν;
- Υπάρχουν ιδιοδιανύσματα; Πόσα ιδιοδιανύσματα (ή καλύτερα, ποιές είναι οι διαστάσεις των αντίστοιχων μηδενοχώρων;)
- Πού και πώς εντοπίζονται (ιδιοδιανύσματα, ιδιοτιμές); Πώς υπολογίζονται;
- Τι χαρακτηριστικά έχουν και γιατί μας ενδιαφέρουν;

Το μηδέν ΜΠΟΡΕΙ να είναι ιδιοτιμή, το μηδενικό διάνυσμα ΔΕΝ θεωρείται ιδιοδιάνυσμα.

SIAM REVIEW
Vol. 48, No. 3, pp. 569–581

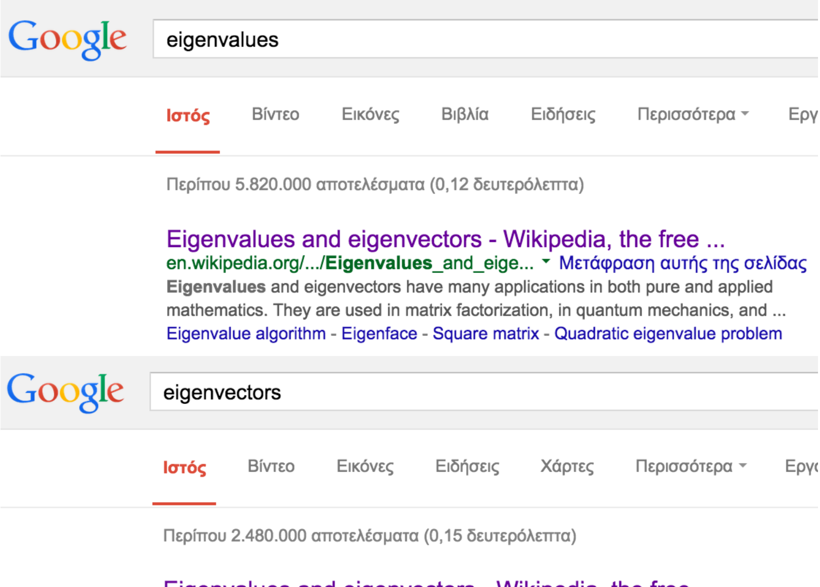
The $25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google*

Kurt Bryan[†]
Tanya Leise[‡]

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of web pages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and *Mathematica* files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/~bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

Τι λέει και τι γράφει ο κόσμος για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα;




Mathematics for Quantum Mechanics
An Introductory Survey of Operators, Eigenvalues, and Linear Vector Spaces
John David Jackson
LOOK INSIDE!
Eigenvalues of Matrices
Revised Edition
Françoise Chatelin
CLASSICS In Applied Mathematics
siam
Free Vibrations of Beams and Frames
Eigenvalues and Eigenfunctions
Igor A. Karnovsky
Olga I. Lebed
Probability and Its Applications
Mu-Fa Chen
Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory
Springer
Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems
Revised Edition
Yousef Saad
CLASSICS In Applied Mathematics
siam
Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry
Springer
Eigenvalues of Symmetric Five-Diagonal Matrices
L W Ehrlich
The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators
Antoine Henrot
Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators
Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems
Revised Edition
Yousef Saad
CLASSICS In Applied Mathematics
siam
On the Eigenvalues of the Manakov System
LAMBERT
Jan Lang
David Edmunds
Eigenvalues, Embeddings and Generalised Trigonometric Functions
Springer
Volume IX
Surveys in Differential Geometry
Eigenvalues of Laplacians and other geometric operators
Eigenvalues in Uniform Waveguides Using Transmission Line Equivalences
LAMBERT
COLLOQUIUM PUBLICATIONS
American Mathematical Society
Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy
London Mathematical Society Lecture Note Series
Surveys in Combinatorics, 1995
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
Isaac Elishakoff
EIGENVALUES OF INHOMOGENEOUS STRUCTURES
Unusual Closed-Form Solutions
CRC PRESS
MEMOIRS of the American Mathematical Society
Kuznetsov's Trace Formula and the Heck Eigenvalues of Maass Forms
A. Knightly
C. Li
American Mathematical Society
DIGITAL Bookmobile
CALCULUS OF VARIATIONS
AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
Springer
G. Prodi (Ed.)
Eigenvalues of Non-Linear Problems
Varenna, Italy 1974
Springer
CIME
The Symmetric Eigenvalue Problem
Beresford N. Parlett
CLASSICS In Applied Mathematics
20
MULTIPARAMETER EIGENVALUE PROBLEMS
STURM-LIOUVILLE THEORY
F.V. ATKINSON
ANGELO B. MINGARELLI
CRC Press
EIGENVALUES OF MATRICES
Françoise Chatelin
WILEY

Παράδειγμα

Από το $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$ κατασκευάζουμε το παραμετροποιημένο

$$A(\lambda) = \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 12 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες εκείνες οι τιμές λ (ενδεχομένως μιγαδικές) για τις οποίες το $A(\lambda)$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Στην περίπτωσή μας, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι τα $A(1), A(3)$ δεν είναι αντιστρέψιμα. Επίσης

$$A(1)u_1 = 0, A(3)u_2 = 0$$

και λύνοντας τα αντίστοιχα ομογενή συστήματα προκύπτει ότι (ειδικές) λύσεις τους είναι οι $u_1 = (1,2)^\top$ και $u_2 = (1,3)^\top$. Προφανώς ισχύει ότι $\mathrm{null}(A(1)) = \mathrm{span}\{u_1\}$ και $\mathrm{null}(A(3)) = \mathrm{span}\{u_2\}$. Επομένως, ως ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή 1 μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathrm{null}(A(1))$. Συνήθως, επιλέγουμε διανύσματα που έχουν κανονικοποιηθεί με κάποιον τρόπο, π.χ. τέτοια ώστε $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = 1$.

Προσοχή: Το παραπάνω παράδειγμα δεν εξηγεί με ποιόν τρόπο επιλέξαμε τα $A(1)$ και $A(3)$. Ούτε γιατί αυτά είναι τα μόνα δύο μη αντιστρέψιμα μητρώα του τύπου $\lambda I - A$. Ο σχεδιασμός συστηματικών μεθόδων αναζήτησης και υπολογισμού τους είναι ένα από τα βασικά ζητούμενα όχι μόνον αυτού του κεφαλαίου, αλλά και πολλών βιβλίων και της σημερινής έρευνας.

Ένα ειδικό πολυώνυμο για κάθε μητρώο

Χαρακτηριστικά πολυώνυμα και ιδιοτιμές

Εξετάζουμε το $\det(\lambda I - A)$ όπου λ είναι μία μεταβλητή:

- Αν

$$\begin{aligned}
\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} \end{pmatrix} \\
\det(\lambda I - A) &= (-\alpha_{11} + \lambda)(-\alpha_{22} + \lambda) - \alpha_{21}\alpha_{12} \\
&= \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}
\end{aligned}$$

Ένα ειδικό πολυώνυμο για κάθε μητρώο

Χαρακτηριστικά πολυώνυμα και ιδιοτιμές

Εξετάζουμε το $\det(\lambda I - A)$ όπου λ είναι μία μεταβλητή:

- Αν

$$\begin{aligned}
\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} \end{pmatrix} \\
\det(\lambda I - A) &= (-\alpha_{11} + \lambda)(-\alpha_{22} + \lambda) - \alpha_{21}\alpha_{12} \\
&= \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}
\end{aligned}$$

- Το $\det(A - \lambda I)$ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς λ.

Ένα ειδικό πολυώνυμο για κάθε μητρώο

Χαρακτηριστικά πολυώνυμα και ιδιοτιμές

Εξετάζουμε το $\det(\lambda I - A)$ όπου λ είναι μία μεταβλητή:

- Αν

$$\begin{aligned}
\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} \end{pmatrix} \\
\det(\lambda I - A) &= (-\alpha_{11} + \lambda)(-\alpha_{22} + \lambda) - \alpha_{21}\alpha_{12} \\
&= \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}
\end{aligned}$$

- Το $\det(A - \lambda I)$ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς λ.
- Προσέξτε τους συντελεστές των 2 μεγαλύτερων δυνάμεων λ^2, λ και τη σταθερά:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 1, \\
\gamma_1 &= -(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \\
\gamma_0 &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}
\end{aligned}$$

Ορισμοί με ορίζουσες

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

- *Χαρακτηριστικό πολυώνυμο* ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ονομάζεται το πολυώνυμο βαθμού n με το οποίο ισούται η ορίζουσα

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \text{ ή «ισοδύναμα»} \\ \hat{p}(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda). \end{aligned}$$

Ορισμοί με ορίζουσες

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

- *Χαρακτηριστικό πολυώνυμο* ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ονομάζεται το πολυώνυμο βαθμού n με το οποίο ισούται η ορίζουσα

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \text{ ή «ισοδύναμα»} \\ \hat{p}(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda). \end{aligned}$$

- Αν γράψουμε

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

ισχύει ότι $\gamma_{n-1} = -\mathrm{trace}(A)$, $\gamma_0 = (-1)^n \det(A)$

Ορισμοί με ορίζουσες

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

- *Χαρακτηριστικό πολυώνυμο* ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ονομάζεται το πολυώνυμο βαθμού n με το οποίο ισούται η ορίζουσα

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \text{ ή «ισοδύναμα»} \\ \hat{p}(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda). \end{aligned}$$

- Αν γράψουμε

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

ισχύει ότι $\gamma_{n-1} = -\mathrm{trace}(A), \quad \gamma_0 = (-1)^n \det(A)$

- προσέξτε ότι αν το μέγεθος του μητρώου είναι περιττό, οι συντελεστές των p και $\hat{p}$ έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Ορισμοί με ορίζουσες

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

- *Χαρακτηριστικό πολυώνυμο* ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ονομάζεται το πολυώνυμο βαθμού n με το οποίο ισούται η ορίζουσα

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \text{ ή «ισοδύναμα»} \\ \hat{p}(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda). \end{aligned}$$

- Αν γράψουμε

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

ισχύει ότι $\gamma_{n-1} = -\mathrm{trace}(A), \quad \gamma_0 = (-1)^n \det(A)$

- προσέξτε ότι αν το μέγεθος του μητρώου είναι περιττό, οι συντελεστές των p και $\hat{p}$ έχουν διαφορετικό πρόσημο.
- Οι ρίζες του χ.π. ονομάζονται ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ (του μητρώου).

Ορισμοί με ορίζουσες

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

- *Χαρακτηριστικό πολυώνυμο* ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ονομάζεται το πολυώνυμο βαθμού n με το οποίο ισούται η ορίζουσα

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \text{ ή «ισοδύναμα»} \\ \hat{p}(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda). \end{aligned}$$

- Αν γράψουμε

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

ισχύει ότι $\gamma_{n-1} = -\mathrm{trace}(A)$, $\gamma_0 = (-1)^n \det(A)$

- προσέξτε ότι αν το μέγεθος του μητρώου είναι περιττό, οι συντελεστές των p και $\hat{p}$ έχουν διαφορετικό πρόσημο.
- Οι ρίζες του χ.π. ονομάζονται ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ (του μητρώου).
- Το πολυώνυμο έχει n ρίζες και άρα n ιδιοτιμές. Μερικές ή όλες μπορεί να είναι ίσες (πολλαπλές). Το σύνολο των ιδιοτιμών λέγεται φάσμα του A.

Μια σημαντική ιδιότητα του Χ.Π.

Η παρατήρηση του Caylay

Είδαμε ότι στην περίπτωση $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(\lambda I - A) \quad = \quad \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

Αντικαθιστούμε το λ με το A:

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})A + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})I \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22} \\ \alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{21} & \alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{pmatrix} (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) & 0 \\ 0 & (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Μια σημαντική ιδιότητα του Χ.Π.

Η παρατήρηση του Caylay

Είδαμε ότι στην περίπτωση $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(\lambda I - A) \quad = \quad \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

Αντικαθιστούμε το λ με το A:

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})A + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})I \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22} \\ \alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{21} & \alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{pmatrix} (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) & 0 \\ 0 & (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

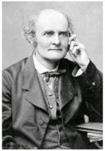
Φαίνεται ότι $p(A) = 0$. Αυτό ισχύει για ***οποιοδήποτε*** *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Τότε

$$\boxed{p(A) = 0_{n\times n}}.$$

A Memoir on the Theory of Matrices
Author(s): Arthur Cayley
Source: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 148 (1858), pp. 17-37
Published by: The Royal Society
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/108649
Accessed: 03/05/2010 17:45



II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* By ARTHUR CAYLEY, *Esq., F.R.S.*

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

THE term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Η $\det$ είναι συνάρτηση όλων των στοιχείων του μητρώου, π.χ. για $n = 2$, όλων των

$$\alpha_{11} - \lambda, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} - \lambda$$

Επομένως ΔΕΝ μπορούμε να πούμε ότι $p(A) = \det(A - AI)\det(0) = 0$.
Απόδειξη Cayley-Hamilton Αργότερα ..
Ένα άλλο θέμα: Έστω ότι $Ax = \lambda x$. Τότε $A(\gamma x) = \lambda(\gamma x)$, δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε το ιδιοδιάνυσμα με βαθμωτό, έχουμε πάλι ιδιοδιάνυσμα και η ιδιοτιμή παραμένει αμετάβλητη.
Αν όμως γράψουμε $(\gamma A)x = (\gamma\lambda)x$ δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε το μητρώο με βαθμωτό, το ιδιοδιάνυσμα παραμένει αμετάβλητο και η ιδιοτιμή πολλαπλασιάζεται με το βαθμωτό.

Μια (ακόμα) ιδιομορφία των μητρώων

... επιπλέον των $AB \neq BA$, $AB = 0$ ακόμα και αν $A \neq 0$, $B \neq 0$, ... που έπεται από το θεώρημα Cayley-Hamilton:

Για τις δυνάμεις $A^n = -\gamma_{n-1}A^{n-1} - \gamma_{n-2}A^{n-2} - \cdots + \gamma_1 A + \gamma_0 I.$

Δηλ. για κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, οι δυνάμεις μεγαλύτερες από $n-1$ μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός χαμηλοτέρων δυνάμεων!

Για το αντίστροφο (αν υπάρχει)

$$\begin{aligned} 0 &= A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \gamma_1 A + \gamma_0 I \\ &= A^{-1}\left(A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \gamma_1 A + \gamma_0 I\right) \end{aligned}$$

επομένως

$$A^{-1} = -\frac{1}{\gamma_0}\left(A^{n-1} + \gamma_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \gamma_1 I\right)$$

Ιδιοτιμές χωρίς ορίζουσες (κατά S. Axler)

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ορίζεται ως ιδιοτιμή κάθε βαθμωτός λ για τον οποίο το μητρώο $A - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμο και ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στο λ ο μηδενόχωρος του $A - \lambda I$. **Θα δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή.**

- Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και μη μηδενικό $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε τα $n+1$ διανύσματα

$$x, Ax, A^2x, ..., A^nx$$

είναι οπωσδήποτε γραμμικά εξαρτημένα (γιατί;).

- Επομένως υπάρχουν συντελεστές $\gamma_0, \cdots, \gamma_n$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε

$$0 \quad = \quad \gamma_0 x + \gamma_1 Ax + \cdots \gamma_n A^n x = p(A)x$$

- Δεν γνωρίζουμε ακριβώς το βαθμό του πολυωνύμου! Μπορεί να είναι μικρότερος του n.
- Αφού $p(A)x = 0$ και $x \neq 0$, το μητρώο $p(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμο.
- Αντικαθιστώντας το A με βαθμωτή μεταβλητή ζ, $p(\zeta) = 0$, και έστω ότι $\deg p = m \leq n$ και ότι οι ρίζες του είναι $\rho_1, ..., \rho_m \in \mathbb{C}$. Τότε

$$p(z) = \gamma(\zeta - \rho_1)(\zeta - \rho_2)(\zeta - \rho_m).$$

όπου γ είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου.

- Έπεται ότι ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες του

$$p(A) \quad = \quad \gamma(A - \rho_1 I)(A - \rho_2 I), (A - \rho_m I)$$

δεν είναι αντιστρέψιμος. Αν είναι ο παράγοντας $A - \rho_j I$, το ρ_j θα είναι ιδιοτιμή.

Ανακεφαλαίωση

Βασικός ορισμός

Για ένα μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και μεταβλητή λ, η ορίζουσα $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. Λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο και αν το γράψουμε

$$p(\lambda) \quad = \quad \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

τότε $\gamma_{n-1} = -\mathrm{trace}(A)$ και $\gamma_0 = (-1)^n \det(A)$.

Προσοχή:

- Το πολυώνυμο έχει ακριβώς n ρίζες $\lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{C}^n$ που αποκαλούμε **ιδιοτιμές** του A.
- Για κάθε ιδιοτιμή λ, υπάρχει **ιδιοδιάνυσμα** $x \in \mathbb{C}^n$ τ.ώ. $Ax = \lambda x$.
- Ισχύει ότι $p(A) = 0$ **(θεώρημα Cayley-Hamilton)**.
- τα ιδιοζεύγη (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) μητρώων παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε πληθώρα εφαρμογών.

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Χρήση Έργου Τρίτων I

1. Google search (βλ. σελ 13)
2. Google Search (βλ. σελ 14)
3. http://www.jstor.org/stable/108649?seq=1#page_scan_tab_contents (βλ. σελ 19)
4. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a9/Arthur_Cayley.jpg (βλ. σελ 19)

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών - Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης