Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **5** : Ορίζουσες

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Υπολογισμός Ορίζουσας και Ίχνους Μητρώου
- Ιδιότητες Οριζουσών
- Μεταθέσεις και Αλγεβρικά Συμπληρώματα
- Κανόνας Cramer, Αντίστροφοι και Όγκοι

Περιεχόμενα

Συστάσεις - Υπενθύμιση

1. Θεώρημα προβολής
2. Γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων. Γεωμετρική θεώρηση και αλγεβρική επίλυση. Κανονικές εξισώσεις.
3. Εφαρμογές
4. Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων σε χώρους συναρτήσεων.

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

1. Παραδείγματα προσεγγίσεων ελαχίστων τετραγώνων.
2. Ελάχιστα τετράγωνα μέσω διαφορικού λογισμού.
3. Ελάχιστα τετράγωνα σε διανυσματικούς χώρους συναρτήσεων.

Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Ορισμένες ενδιαφέρουσες βαθμωτές συναρτήσεις μητρώων,
2. όπως το ίχνος
3. με έμφαση στην ορίζουσα,
4. αξιωματικό ορισμό της,
5. τρόπους υπολογισμούς της,
6. ιδιότητες,
7. εεπίλυση συστήματος και αντιστροφή μητρώου μέσω οριζουσών.

Υπό συζήτηση ενότητες

Ειδικές τιμές μητρώων

Παρόλο που ένα μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ περιέχει $m \times n$ αριθμούς, σε αυτό αντιστοιχούν επίσης ορισμένες ειδικές τιμές συνδεδεμένες με αυτό. Αυτές είναι βαθμωτές συναρτήσεις μητρώου ($f : \mathbb{R}^{n\times n}\mathbb{R}$), και αποκαλύπτουν σημαντικές πληροφορίες για το μητρώο.

είδος	*συμβολισμός*	*παρατηρήσεις*
διαστάσεις	m, n	αριθμ. γραμμών και αριθμ. στηλών
αραιότητα	$\mathrm{nnz}(A)$	πλήθος μη μηδενικών
τάξη	$\mathrm{rank}(A)$	μέγιστος αριθμ. γ.α. γραμμών (ή στηλών)
νόρμα	$\|A\|$	μετρική «βάρους» , π.χ. $\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
ίχνος	$\mathrm{trace}(A)$	$(m = n)$???
ορίζουσα	$\det(A)$	$(m = n)$???
ιδιοτιμές	???	$(m = n)$???
ιδιάζουσες τιμές	???	???

Ίχνος

τετραγωνικού μητρώου

- Χαρακτηριστική τιμή για κάθε τετραγωνικό μητρώο ίση με το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του.
- Βαθμωτή συνάρτηση

$$\mathrm{trace} : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$\mathrm{trace}(A) := \alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{n,n}$$

<u>Ιδιότητες</u>

1. $\mathrm{trace}(\gamma A + \delta B) = \gamma \mathrm{trace}(A) + \delta \mathrm{trace}(B)$
2. $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$

<u>Σημαντικό επακόλουθο:</u> $\mathrm{trace}(Q^{-1}AQ) = \mathrm{trace}(A)$

Ορίζουσα

τετραγωνικού μητρώου

- Μοναδικό χαρακτηριστικό μέγεθος (βαθμωτός) που υπάρχει για κάθε τετραγωνικό μητρώο.

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- «Συμπυκνώνει» πληροφορίες σχετικά με το μητρώο.
- Η πιο γνωστή: Ένα μητρώο A είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν $\det(A) \neq 0$.
- Υπολογιστικά θέματα: Ο πιο πρακτικός τρόπος υπολογισμού του για μέτριο ή μεγάλο n είναι ως παραπροϊόν της παραγοντοποίησης LU με το αντίστοιχο κόστος.
- Έχει χρήσιμη γεωμετρική ερμηνεία ως «όγκος» στο n-διάστατο χώρο.

Ιστορικά

- Η μελέτη των οριζουσών προηγήθηκε της Γραμμικής Άλγεβρας: Ο Gauss (1801) χρησιμοποίησε τον όρο εννοώντας την διακρίνουσα πολυωνύμων 4ου βαθμού. Ο όρος με τη σημερινή έννοια εισήχθη από τον Cauchy (1812).
- Ο Sylvester «βάπτισε» τις "μήτρες" για να αναδείξει ότι «γεννούν» ορίζουσες.

Τύπος ορίζουσας όταν $n = 2$

$\underline{n = 2}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} := \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε έναν αξιωματικό ορισμό της ορίζουσας από τον οποίο θα προκύψει αυτός και άλλο τύποι υπολογισμού.

Παρατήρηση: Να επαληθεύσετε την παρακάτω παραγοντοποίηση.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{21}\alpha_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12} \end{pmatrix}$$

Βοηθητικοί ορισμοί

- Έστω δ.χ. $U_1, \ldots, U_n$ και W επί του ιδίου σώματος $\mathcal{F}$ και έστω η απεικόνιση

$$f : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to W$$

 ότε η απεικόνιση ονομάζεται πλειογραμμική (ή n-γραμμική) αν είναι γραμμική ως πρός κάθε όρισμα αν τα υπόλοιπα ορίσματα μείνουν αμετάβλητα, π.χ. αν για $i = 1, \ldots, n$, και $u_j \in U_j$, η απεικόνιση

$$x \to f(u_1, \ldots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \ldots, u_n)$$

 είναι γραμμική.
- Έστω μια μετάθεση $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ των αριθμών 1 ως n. Ονομάζουμε φυσική διάταξη την n-άδα $(1, 2, \ldots, n)$. Τότε πρόσημο της μετάθεσης ονομάζεται ο αριθμός

$$\sigma(\pi) = \begin{cases} +1 & \text{αν η } \pi \text{ επανέρχεται στη φυσική διάταξη} \\ & \text{με άρτιο πλήθος εναλλαγών} \\ -1 & \text{αν η } \pi \text{ επανέρχεται στη φυσική διάταξη} \\ & \text{με περιττό πλήθος εναλλαγών.} \end{cases}$$

Ορίζοντας την ορίζουσα (αξιωματικά)

Η ορίζουσα $\det(A)$ ενός τετραγωνικού μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι μία συνάρτηση

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

που έχει τις εξής 3 ιδιότητες για ένα μητρώο[1] $A = [a_1, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1. Αν $a_i = a_j$ για $i \neq j$ τότε $\det([a_1, \ldots, a_n]) = 0$ (εκφυλισμός).
2. $\det([e_1, \ldots, e_n]) = 1$ (κανονικότητα).
3. Η συνάρτηση είναι γραμμική ως προς τις n στήλες:

$$\det([a_1, \ldots, a_{j-1}, \gamma a + \delta b, a_{j+1}, \ldots, a_n]) = \gamma\det([a_1, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n]) + \delta\det([a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n])$$

Συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα λέγονται πλειογραμμικές.

[1] Αναφερόμαστε στις στήλες, αντίστοιχες διατυπώσεις υπάρχουν και ως προς τις γραμμές).

Σημαντικά επακόλουθα

Έστω το μητρώο (σε μορφή στηλών) $A = [a_1, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Αν εναλλάξουμε 2 στήλες ενός μητρώου, η ορίζουσα του νέου μητρώου έχει ίδιο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Γι' αυτό η ορίζουσα χαρακτηρίζεται ως εναλλασσόμενη απεικόνιση (alternating map).

Σημαντικά επακόλουθα

Έστω το μητρώο (σε μορφή στηλών) $A = [a_1, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Αν εναλλάξουμε 2 στήλες ενός μητρώου, η ορίζουσα του νέου μητρώου έχει ίδιο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Γι' αυτό η ορίζουσα χαρακτηρίζεται ως εναλλασσόμενη απεικόνιση (alternating map).
- δείγμα απόδειξης

$$\begin{aligned} 0 &= \det([a_1 + a_2, a_1 + a_2]) = \det([a_1, a_1]) + \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) + \det([a_2, a_2]) \\ 0 &= \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) \end{aligned}$$

Σημαντικά επακόλουθα

Έστω το μητρώο (σε μορφή στηλών) $A = [a_1, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Αν εναλλάξουμε 2 στήλες ενός μητρώου, η ορίζουσα του νέου μητρώου έχει ίδιο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Γι' αυτό η ορίζουσα χαρακτηρίζεται ως εναλλασσόμενη απεικόνιση (alternating map).
- δείγμα απόδειξης

$$\begin{aligned} 0 &= \det([a_1 + a_2, a_1 + a_2]) = \det([a_1, a_1]) + \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) + \det([a_2, a_2]) \\ 0 &= \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) \end{aligned}$$

- Αν οι στήλες μητρώου είναι γραμμικά εξαρτημένες, η ορίζουσα είναι 0.

Σημαντικά επακόλουθα

Έστω το μητρώο (σε μορφή στηλών) $A = [a_1, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Αν εναλλάξουμε 2 στήλες ενός μητρώου, η ορίζουσα του νέου μητρώου έχει ίδιο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Γι' αυτό η ορίζουσα χαρακτηρίζεται ως εναλλασσόμενη απεικόνιση (alternating map).
- δείγμα απόδειξης

$$\begin{aligned} 0 &= \det([a_1 + a_2, a_1 + a_2]) = \det([a_1, a_1]) + \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) + \det([a_2, a_2]) \\ 0 &= \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) \end{aligned}$$

- Αν οι στήλες μητρώου είναι γραμμικά εξαρτημένες, η ορίζουσα είναι 0.
- δείγμα απόδειξης

$$\det([a_1, a_2, \gamma a_1 + \delta a_2]) = \gamma\det([a_1, a_2, a_1]) + \delta\det([a_1, a_2, a_2]) = 0$$

Σημαντικά επακόλουθα

Έστω το μητρώο (σε μορφή στηλών) $A = [a_1, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Αν εναλλάξουμε 2 στήλες ενός μητρώου, η ορίζουσα του νέου μητρώου έχει ίδιο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Γι' αυτό η ορίζουσα χαρακτηρίζεται ως εναλλασσόμενη απεικόνιση (alternating map).
- δείγμα απόδειξης

$$\begin{aligned} 0 &= \det([a_1 + a_2, a_1 + a_2]) = \det([a_1, a_1]) + \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) + \det([a_2, a_2]) \\ 0 &= \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) \end{aligned}$$

- Αν οι στήλες μητρώου είναι γραμμικά εξαρτημένες, η ορίζουσα είναι 0.
- δείγμα απόδειξης

$$\det([a_1, a_2, \gamma a_1 + \delta a_2]) = \gamma\det([a_1, a_2, a_1]) + \delta\det([a_1, a_2, a_2]) = 0$$

- Αν προσθέσουμε δύο στήλες η ορίζουσα παραμένει αμετάβλητη.

Σημαντικά επακόλουθα

Έστω το μητρώο (σε μορφή στηλών) $A = [a_1, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Αν εναλλάξουμε 2 στήλες ενός μητρώου, η ορίζουσα του νέου μητρώου έχει ίδιο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Γι' αυτό η ορίζουσα χαρακτηρίζεται ως εναλλασσόμενη απεικόνιση (alternating map).
- δείγμα απόδειξης

$$\begin{aligned} 0 &= \det([a_1 + a_2, a_1 + a_2]) = \det([a_1, a_1]) + \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) + \det([a_2, a_2]) \\ 0 &= \det([a_1, a_2]) + \det([a_2, a_1]) \end{aligned}$$

- Αν οι στήλες μητρώου είναι γραμμικά εξαρτημένες, η ορίζουσα είναι 0.
- δείγμα απόδειξης

$$\det([a_1, a_2, \gamma a_1 + \delta a_2]) = \gamma\det([a_1, a_2, a_1]) + \delta\det([a_1, a_2, a_2]) = 0$$

- Αν προσθέσουμε δύο στήλες η ορίζουσα παραμένει αμετάβλητη.
- δείγμα απόδειξης

$$\det([a_1, a_1 + a_2]) = \det([a_1, a_1]) + \det([a_1, a_2]) = \det([a_1, a_2])$$

Ορίζουσα μητρώου 2×2

(Ποιά είναι επιτέλους;;;)

Μπορούμε να την υπολογίσουμε βάσει των παραπάνω ιδιοτήτων:

$$\begin{aligned}\det([a_1, a_2]) &= \det([\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2, \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2]) \\ &= \alpha_{11}\det([e_1, \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2]) + \alpha_{21}\det([e_2, \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2])\end{aligned}$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{12}\det([e_1, e_1]) + \alpha_{11}\alpha_{22}\det([e_1, e_2]) + \alpha_{21}\alpha_{12}\det([e_2, e_1]) + \alpha_{21}\alpha_{22}\det([e_2, e_2])$$

$$\det([a_1, a_2]) = \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{21}\alpha_{12}\det([e_2, e_1]) = \boldsymbol{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}$$

Προσοχή: πολλοί όροι μηδενίζονται (λόγω «εκφυλισμού»).

- Όταν $n = 2$, αντί για $4 = 2^2$ όρους, έχουμε μόνον 2.
- με $n = 3$, αντί για $27 = 3^3$ όρους έχουμε 6 ...
- ... γενικά, αντί για για n^n όρους, έχουμε $n!$.

Υπολογισμός ορίζουσας από αλγεβρικά συμπληρώματα

Ανάπτυγμα Laplace

$$\det(A) = \alpha_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}\alpha_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}\alpha_{1n}\det(A_{1n})$$

- Προσωρινός συμβολισμός Με $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ συμβολίζεται το μητρώο που προκύπτει αν διαγράψουμε από το A τη γραμμή i και τη στήλη j. Αποκαλείται ελάσσον (minor) του στοιχείου α_{ij}.
- Το $\psi_{i,j} := (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ λέγεται αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου στη θέση (i,j).

Γενικά ισχύει ότι μπορούμε να εκφράσουμε την ορίζουσα ως προς οποιαδήποτε γραμμή (ή στήλη):

$$\det(A) = \alpha_{i,1}\psi_{i,1} + \alpha_{i,2}\psi_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,n}\psi_{i,n}$$

Προσοχή: Στον παραπάνω τύπο εκφράσαμε την ορίζουσα βάσει οριζουσών μεγέθους $(n-1) \times (n-1)$.

Σύσταση: Στην εφαρμογή του τύπου, αξίζει να επιλέγουμε τη γραμμή ή στήλη με τα περισσότερα μηδενικά!

Τύπος για $n = 3$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} := \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Άρα

Τύπος για $n = 3$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} := \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Άρα

$$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

Τύπος για $n = 3$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} := \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Άρα

$$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

Προσέξτε:

$$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

Μεγάλος τύπος ορίζουσας

... και πρόσημο μετάθεσης

Προσοχή: Για μία μετάθεση π των στοιχείων $(1, \ldots, n)$, δηλ. $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$, ορίζουμε ως πρόσημο της μετάθεσης, $\sigma(\pi)$, μία τιμή ± 1. Η τιμή θα είναι +1 αν η μετάθεση π προέρχεται από άρτιο αριθμό εναλλαγών ή -1 αν προέρχεται από περιττό αριθμό εναλλαγών. Το αντίστοιχο μητρώο μετάθεσης P_π θα είναι εκείνο για το οποίο $P_\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(1) \\ \pi(2) \\ \cdots \\ \pi(n) \end{pmatrix}$. Παρατηρήστε ότι το P_π είναι μετάθεση του ταυτοτικού, επομένως $\det(P_\pi) = \pm 1$. Η τιμή του συμπίπτει με το πρόσημο της μετάθεσης.

Μεγάλος τύπος (γιατί έχει $n!$ όρους)

$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}} \sigma(\pi) \alpha_{1\pi(1)} \cdots \alpha_{n\pi(n)}$ όπου $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο των $n!$ μεταθέσεων των στοιχείων $(1, \ldots, n)$ και $\sigma(\pi)$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης π.

Ορίζουσες μητρώων με ειδική δομή

Τριγωνικά: Η ορίζουσα κάθε τριγωνικού μητρώου είναι ίση με το γινόμενο όλων των στοιχείων της διαγωνίου του.

Κατά πλοκάδες τριγωνικά Αν A, D τετραγωνικά μητρώα, τότε

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

Ειδική περίπτωση αν $\hat{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$,

$$\det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0_{n-1,1} & \hat{A} & & \end{array}\right) = \det(\hat{A})$$

Προσοχή: Γενικά

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &\neq \det(A)\det(D) \text{ καθώς επίσης} \\ &\neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C) \end{aligned}$$

Άλλες χρήσιμες ιδιότητες

- Το A είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν $\det(A) \neq 0$.
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A^\top)$ αν $\det(A) \neq 0$.
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

ΠΡΟΣΟΧΗ Η τελευταία ιδιότητα αποκαλύπτει έναν τρόπο υπολογισμού του $\det(A)$ που έχει περίπου όσες πράξεις χρειάζεται η παραγοντοποίηση LU.

Πώς; Αν $A = PLU$ τότε

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P)\underbrace{\det(L)}_{=1}\det(U)\\ &= (-1)^\kappa \det(U) = (-1)^\kappa \upsilon_{11}\upsilon_{22}\cdots\upsilon_{nn}.\end{aligned}$$

όπου κ είναι ο αριθμός των εναλλαγών που μετατρέπουν το I σε P. Το $(-1)^\kappa$ θα είναι το πρόσημο της αντίστοιχης μετάθεσης.

Κριτική

Γιατί δεν λύνουμε με Cramer;

- Ο υπολογισμός της ορίζουσας με τους παραπάνω τύπους είναι ακριβός
- ... εκτός αν την υπολογίσουμε μέσω LU
- ... οπότε δεν υπάρχει λόγος να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα
- ... γιατί από την LU βρίσκουμε τη λύση με μπρος και πίσω αντικατάσταση, πιο φθηνά!
- Εκτός αν επικρατούν ειδικές συνθήκες! (π.χ. κάτω τριγωνικό μητρώο)

Ορίζουσες και τάξη μητρώου

Ενδιαφέρον: Ένα μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ έχει τάξη ακριβώς r ανν και μόνον αν το μεγαλύτερο τετραγωνικό (υπο)μητρώο με μη μηδενική ορίζουσα είναι $r \times r$.

Κανόνας Cramer

και επίλυση γραμμικών συστημάτων

Αν $Ax = b$ τότε κάθε στοιχείο του x μπορεί να υπολογιστεί με τον κανόνα Cramer που εκφράζεται ως εξής:

Έστω οι στήλες $a_1, \ldots, a_n$ τ.ώ. $\det([a_1, \ldots, a_n]) \neq 0$. Έστω επίσης βαθμωτοί $\xi_1, \ldots, \xi_n$ τ.ώ.

$$b = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n.$$

Τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ισχύει ότι

$$\xi_j = \frac{\det([a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n])}{\det([a_1, \ldots, a_n])}$$

Τύπος αντιστρόφου

Θεώρημα

Αν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε

$$\begin{aligned}(A^{-1})_{i,j} &= (-1)^{i+j}\frac{\det(A_{j,i})}{\det(A)}\\ &= \frac{\psi_{j,i}}{\det(A)}\end{aligned}$$

Παραδείγματα οριζουσών

εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές

Μητρώο τάξης 1 Έστω ότι από τα διανύσματα (στήλες) u, v κατασκευάζουμε το μητρώο $A = uv^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα;

Παραδείγματα οριζουσών

εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές

Μητρώο τάξης 1 Έστω ότι από τα διανύσματα (στήλες) u, v κατασκευάζουμε το μητρώο $A = uv^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Παραδείγματα οριζουσών

εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές

Μητρώο τάξης 1 Έστω ότι από τα διανύσματα (στήλες) u, v κατασκευάζουμε το μητρώο $A = uv^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Μητρώο προβολής σε (γνήσιο) υπόχωρο;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Παραδείγματα οριζουσών

εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές

Μητρώο τάξης 1 Έστω ότι από τα διανύσματα (στήλες) u, v κατασκευάζουμε το μητρώο $A = uv^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Μητρώο προβολής σε (γνήσιο) υπόχωρο;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Ορθογώνιο μητρώο;

Απάντηση: $\det(A) = \pm 1$ (γιατί;)

Παραδείγματα οριζουσών

εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές

Μητρώο τάξης 1 Έστω ότι από τα διανύσματα (στήλες) u, v κατασκευάζουμε το μητρώο $A = uv^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Μητρώο προβολής σε (γνήσιο) υπόχωρο;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Ορθογώνιο μητρώο;

Απάντηση: $\det(A) = \pm 1$ (γιατί;)

Ταυτοτικό συν μητρώο 'τάξης-1' $A = I + uv^\top$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα;

Παραδείγματα οριζουσών

εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές

Μητρώο τάξης 1 Έστω ότι από τα διανύσματα (στήλες) u, v κατασκευάζουμε το μητρώο $A = uv^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Μητρώο προβολής σε (γνήσιο) υπόχωρο;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Ορθογώνιο μητρώο;

Απάντηση: $\det(A) = \pm 1$ (γιατί;)

Ταυτοτικό συν μητρώο 'τάξης-1' $A = I + uv^\top$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα; Απάντηση: $\det(A) = 1 + v^\top u$. (γιατί;)

Παραδείγματα οριζουσών

εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές

Μητρώο τάξης 1 Έστω ότι από τα διανύσματα (στήλες) u, v κατασκευάζουμε το μητρώο $A = uv^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Μητρώο προβολής σε (γνήσιο) υπόχωρο;

Απάντηση: 0 (γιατί;)

Ορθογώνιο μητρώο;

Απάντηση: $\det(A) = \pm 1$ (γιατί;)

Ταυτοτικό συν μητρώο 'τάξης-1' $A = I + uv^\top$. Ποιά θα είναι η ορίζουσα; Απάντηση: $\det(A) = 1 + v^\top u$. (γιατί;)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -v^\top \\ u & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v^\top \\ 0 & I + uv^\top \end{pmatrix}, \text{ και } C = \begin{pmatrix} I & u \\ -v^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -v^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & u \\ 0 & 1 + v^\top u \end{pmatrix}$$

και αν $P = \begin{pmatrix} 0_{1,n} & 1 \\ I_n & 0_{n,1} \end{pmatrix}$ τότε $\det(P) = (-1)^{n+2}$ και $P^\top BP = C$ άρα $\det(P^\top BP) = \det(B) = \det(C)$.

Από τις παραγοντοποιήσεις, $\det(I + uv^\top) = 1 + v^\top u$.

Γενίκευση και παράδειγμα

- **Ταυτότητα Sylvester** Γενικότερα ισχύει ότι αν $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\det(I_m + CD) = \det(I_n + DC)$$

- Συνιστάται να την αποδείξετε!

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε την ορίζουσα του

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Επίλυση: Παρατηρούμε ότι το μητρώο μπορεί να γραφτεί ως $A = 2I + 2ee^\top$ όπου $e = (1, 1, 1, 1)^\top$. Επομένως

$$\det(A) = \det(2(I + ee^\top)) = 2^4\det(I + ee^\top) = 2^4(1 + e^\top e) = 16 \cdot 5 = 80.$$

☺ Θα ήταν αρκετά πιο χρονοβόρο αν δουλεύατε απευθείας με το A.

Οι ορίζουσες στη σύγχρονη έρευνα

How to find a good submatrix

S. A. Goreinov, I. V. Oseledets, D. V. Savostyanov,
E. E. Tyrtyshnikov, N. L. Zamarashkin

October 17, 2008

Abstract

Pseudoskeleton approximation and some other problems require the knowledge of sufficiently well-conditioned submatrix in a large-scale matrix. The quality of a submatrix can be measured by modulus of its determinant, also known as volume. In this paper we discuss a search algorithm for the maximum-volume submatrix which already proved to be useful in several matrix and tensor approximation algorithms. We investigate the behavior of this algorithm on random matrices and present some its applications, including maximization of a bivariate functional.

Από τις ορίζουσες στις permanents

Για φανατικούς!

$$\mathrm{perm}(A) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}} \alpha_{1\pi(1)} \cdots \alpha_{n\pi(n)}$$

όπου $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο των $n!$ μεταθέσεων των στοιχείων $(1, \ldots, n)$.

Ενώ η ορίζουσα μπορεί να υπολογιστεί με $O(n^3)$ πράξεις, μέσω της παραγοντοποίησης LU, ο υπολογισμός της $\mathrm{perm}(A)$ απαιτεί πολύ μεγάλο πλήθος πράξεων (μεγαλύτερο από πολυωνυμικό)! Ο πιο γνωστός αλγόριθμος (Ryser) για τον ακριβή υπολογισμό απαιτεί $O(n2^n)$ πράξεις!!!

Ερευνητικό πρόβλημα: Επινόηση γρήγορων αλγορίθμου για την αποτελεσματική προσέγγιση της permanent σε πολυωνυμικό χρόνο.

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Χρήση Έργου Τρίτων I

1. The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester (βλ. σελ 11)
2. How to find a good submatrix (βλ. σελ 28)

Σημείωμα Αναφοράς

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης