Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **4** : Ορθογωνιότητα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Ορθογωνιότητα των 4ων υποχώρων
- Προβολές
- Ορθογώνιες βάσεις και μέθοδος Gram-Schmidt
- Προβλήματα γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για ορισμένες χρήσεις μητρώων και διανυσμάτων.

- Πράξεις μεταξύ υπόχωρων (άθροισμα, τομή, ευθύ άθροισμα, ένωση) και χαρακτηρισμός αποτελέσματος.
- Ορθογωνιότητα: Ορθογώνιο συμπλήρωμα. Σχέσεις ορθογωνιότητας των τεσσάρων υποχώρων.
- Θεμελιώδες Θεώρημα της ΓΑ (μέρος II) κατά Strang
- Ορθογώνια προβολή και κατασκευή τελεστή (μητρώου) ορθογώνιας προβολής για υπόχωρους.

Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Προβολές και ορθογώνιες προβολές (συνέχεια)
2. Η μέθοδος ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt
3. Παραγοντοποίηση QR μέσω Gram-Schmidt

Υπό συζήτηση ενότητες

Προβολή και ορθογώνια προβολή

Δοθέντος ενός υποχώρου $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^n$, και του

$$\mathcal{V}^{\perp} = \{y|y \perp x, \forall x \in \mathcal{V}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp}$$

οπότε ο καθένας είναι ορθογώνιο συμπλήρωμα του άλλου.
Κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται μοναδικά ως άθροισμα των

$$\begin{aligned} x &= v + u, v \in \mathcal{V}, u \in \mathcal{V}^{\perp} \\ &= Px + (I - P)x \end{aligned}$$

όπου P η ορθογώνια προβολή επί του $\mathcal{V}$.
Προσέξτε ότι $I - P$ επιτελεί ορθογώνια προβολή στο $\mathcal{V}^{\perp}$. (Σημ. αρκεί να δείξετε ότι κάθε διάνυσμα $(I - P)x$ είναι κάθετο στο $\mathcal{V}$)

Ορθογώνια προβολή (ΟΠ)

Χαρακτηρισμός (Υπενθύμιση)

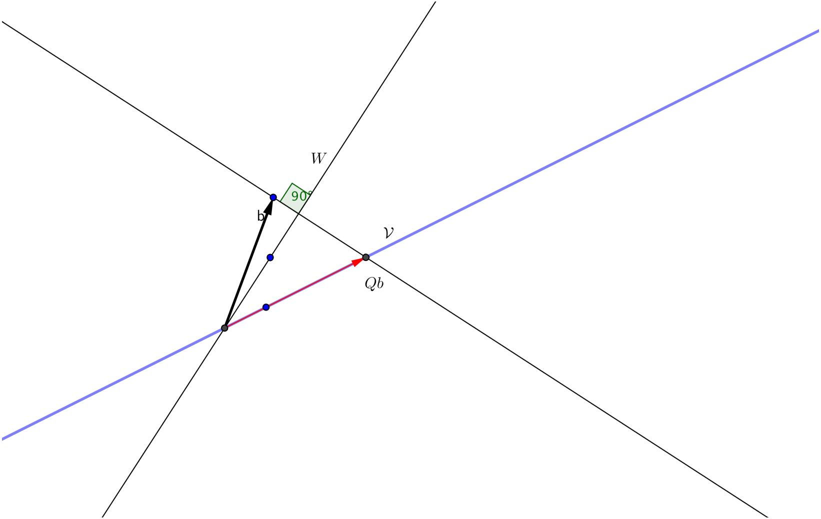
Χαρακτηρισμός με μητρώα

1. Ένα μητρώο $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ καλείται μητρώο προβολής (και ενίοτε, πλαγιογώνιας προβολής επί του $\mathrm{range}(P)$ αν $P^2 = P$.
2. Αν επίσης $P = P^\top$ (στις περισσότερες περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν εδώ) τότε λέγεται μητρώο ορθογώνιας προβολής.

Παρατήρηση: Σε κάθε μητρώο προβολής αντιστοιχεί ο υπόχωρος $\mathcal{V} = \mathrm{range}(P)$ επί του οποίου γίνεται η προβολή.

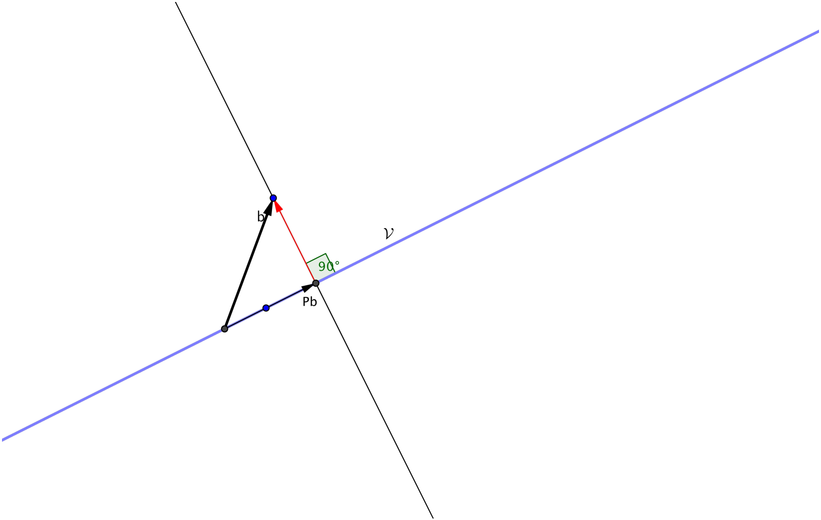
Οπτικοποίηση (πλαγιογώνιας) προβολής

Προβολή επί του $\mathcal{V}$ ορθογώνια στο $\mathcal{W}$



Οπτικοποίηση ορθογώνιας προβολής

Προβολή επί του $\mathcal{V}$ ορθογώνια στο $\mathcal{V}$



Κατασκευή μητρώου προβολής

Κατασκευή μητρώου ΟΠ

Αν η βάση για τον δ.υ. $\mathcal{V}$ είναι οι στήλες του $V = (v_1, \ldots, v_n)$ τότε το μητρώο

$$P_{\mathcal{V}} := V(V^\top V)^{-1}V^\top$$

είναι το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί του υπόχωρου $\mathcal{V}$.

Κατασκευή μητρώου πλαγιογώνιας προβολής[1]

Αν η βάση για τον δ.υ. $\mathcal{V}$ είναι οι στήλες του $V = (v_1, \ldots, v_n)$ και του δ.υ. $\mathcal{W}$ είναι οι στήλες του $W = (w_1, \ldots, w_n)$ το μητρώο

$$Q := V(W^\top V)^{-1}W^\top$$

είναι το μητρώο προβολής επί του υπόχωρου $\mathcal{V}$ ορθογώνια στο $\mathcal{W}$.

[1] Σημ. εκτός ύλης

Παράδειγμα

Έστω $\mathrm{span}\{e_1, e_3\}$ στον $\mathbb{R}^4$ τότε $V = [e_1, e_3]$ και

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{V}} &= \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_3^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_3^\top \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^\top e_1 & e_1^\top e_3 \\ e_3^\top e_1 & e_3^\top e_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_3^\top \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_3^\top \end{pmatrix} \text{ προσέξτε ότι ο μεσαίος όρος παραπάνω είναι } I_2 \\
&= e_1 e_1^\top + e_3 e_3^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις: Προφανώς $P_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ που θα μπορούσαμε να το «μαντέψουμε» από την αρχή. Δείτε όμως το επόμενο παράδειγμα που αυτό δεν είναι εύκολο.

Παράδειγμα

Έστω $\mathcal{V} = \mathrm{span}\{a, b\}$ στον $\mathbb{R}^4$ όπου $a = [1, 1, 1, 1]^\top$, $b = [0, 1, -1, 3]$ οπότε $V = [a, b]$. και

$$
\begin{aligned}
P_{\mathcal{V}} &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a^\top \\ b^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} a^\top \\ b^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\top a & a^\top b \\ b^\top a & b^\top b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a^\top \\ b^\top \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{35} & -\frac{3}{35} \\ -\frac{3}{35} & \frac{4}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{11}{35} & \frac{8}{35} & \frac{14}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{8}{35} & \frac{9}{35} & \frac{7}{35} & \frac{11}{35} \\ \frac{14}{35} & \frac{7}{35} & \frac{21}{35} & -\frac{7}{35} \\ \frac{2}{35} & \frac{11}{35} & -\frac{7}{35} & \frac{29}{35} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Παρατηρήσεις: $P_{\mathcal{V}}^2 = P_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}}^\top$, $P_{\mathcal{V}} a = a$, $P_{\mathcal{V}} b = b$, $P_{\mathcal{V}}(\gamma a + \delta b) = \gamma a + \delta b$
(αναμενόμενο: $P_{\mathcal{V}} v = v$ για κάθε $v \in \mathcal{V}$.)

Αν μας έδιναν το παραπάνω $P_{\mathcal{V}}$ και ένα τυχαίο διάνυσμα $x = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^\top$ τότε

$$P_{\mathcal{V}} x = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 11\xi_1 + 8\xi_2 + 14\xi_3 + 2\xi_4 \\ 8\xi_1 + 9\xi_2 + 7\xi_3 + 11\xi_4 \\ 14\xi_1 + 7\xi_2 + 21\xi_3 - 7\xi_4 \\ 2\xi_1 + 11\xi_2 - 7\xi_3 + 29\xi_4 \end{pmatrix}$$

Για να επαληθεύσουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^4$, $P_{\mathcal{V}} x \in \mathcal{V}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει πάντα $z \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιεί το σύστημα $Vz = P_{\mathcal{V}} x$. Εξετάζουμε το επαυξημένο σύστημα

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 11\xi_1 + 8\xi_2 + 14\xi_3 + 2\xi_4 \\ 1 & 1 & 8\xi_1 + 9\xi_2 + 7\xi_3 + 11\xi_4 \\ 1 & -1 & 14\xi_1 + 7\xi_2 + 21\xi_3 - 7\xi_4 \\ 1 & 3 & 2\xi_1 + 11\xi_2 - 7\xi_3 + 29\xi_4 \end{array}\right)$$

και το φέρνουμε σε ΑΓΚΜ,

$$\left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & 11\xi_1 + 8\xi_2 + 14\xi_3 + 2\xi_4 \\ 0 & 1 & -3\xi_1 + \xi_2 - 7\xi_3 + 9\xi_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Προσέξτε ότι $n = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A, b])$ επομένως υπάρχει μοναδική λύση.

Παρατηρήσεις

Στη γενική περίπτωση (για «γνήσιο υπόχωρο» , δηλ. όχι όλο το χώρο) το (τετραγωνικό) μητρώο προβολής P δεν είναι αντιστρέψιμο.

Αυτό μπορεί να αναδειχθεί με διάφορους τρόπους.
Σκεπτικό: Έστω ότι ο αναφερόμαστε στον $\mathbb{R}^m$. Αν υπήρχε αντίστροφο P^{-1}, για κάθε διάνυσμα του υπόχωρου $v \in \mathcal{V}$ θα επέστρεφε ένα μοναδικό διάνυσμα του χώρου $P^{-1}v \in \mathbb{R}^m$. Επειδή ένας γνήσιος υπόχωρος είναι «μικρότερος», θα υπάρχουν περισσότερα από ένα διανύσματα του χώρου των οποίων η προβολή στον υπόχωρο θα είναι το ίδιο διάνυσμα, επομένως ο αντίστροφος δεν μπορεί να οριστεί (θα προβληματίζεται ποιό διάνυσμα του χώρου να επιλέξει). Π.χ. είδαμε ότι αν $\mathcal{V} = \mathrm{span}\{e_1, e_3\}$ στον $\mathbb{R}^4$ τότε $P_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \\ 2 \\ -100 \end{pmatrix}$.

Μία απόδειξη Για να υπάρχει αντίστροφο, θα πρέπει το μητρώο P να είναι αντιστρέψιμο. Όμως η βάση $V \in \mathbb{R}^{m\times k}$ περιέχει λιγότερα διανύσματα από τη διάσταση όλου του χώρου, δηλ. $k < m$, επομένως

$$\mathrm{rank}(P) \le \min\{\mathrm{rank}(V), \mathrm{rank}((V^\top V)^{-1}), \mathrm{rank}(V^\top)\}.$$

Η τάξη των μητρώων στα δεξιά είναι k ή μικρότερη (αποδεικνύεται ότι είναι ακριβώς k) άρα το μητρώο δεν είναι πλήρους τάξης και δεν είναι αντιστρέψιμο.

Παρατήρηση

Το (τετραγωνικό) μητρώο προβολής P είναι μοναδικό (δεν εξαρτάται από τη βάση).

Γιατί αν οι στήλες των V και U είναι δύο διαφορετικές βάσεις για τον υπόχωρο προβολής, τότε οι στήλες του ενός μπορούν να γραφτούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του άλλου (ως μέλη του ίδιου υπόχωρου). Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμο M τέτοιο ώστε

$$V = UM, \quad V, U \in \mathbb{R}^{m\times n}, M \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Άρα αν γράψουμε

$$\begin{aligned}
P &= V(V^\top V)^{-1}V^\top \\
&= (UM)((UM)^\top UM)^{-1}(UM)^\top \\
&= UM(M^\top U^\top UM)^{-1}M^\top U \\
&= U(M^{-\top}M^\top U^\top UMM^{-1})^{-1}U \\
&= U(U^\top U)^{-1}U^\top
\end{aligned}$$

Ιστορικές πληροφορίες[2]

GRAM-SCHMIDT ORTHOGONALIZATION. When Erhard Schmidt presented the formulae on p. 442 of his ``Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener,'' Math. Ann., 63 (1907), 433-476 he said that essentially the same formulae were in J. P. Gram's ``Ueber die Entwickelung reeler Funtionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate,'' Jrnl. für die reine und angewandte Math. (1883), 94, 71-73. Modern writers, however, distinguish the two procedures, sometimes using the term ``Gram-Schmidt'' for the Schmidt form and ``modified Gram-Schmidt'' for the Gram version.

Jorgen Pedersen Gram (1850-1916)

Erhard Schmidt (1876 - 1959)

[2] http://jeff560.tripod.com/g.html

Ορθοκανονικοποίηση διανυσμάτων: Διαδικασία Gram-Schmidt

Πρόβλημα: Δίνονται γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\{a_1, ..., a_n\}$ και θέλουμε να κατασκευάσουμε ορθοκανονικά (ΟΚ) διανύσματα $\{q_1, \cdots, q_n\}$ τ.ώ.

$$\mathrm{span}\{q_1, \cdots, q_n\} = \mathrm{span}\{a_1, ..., a_n\}$$

Ορθοκανονικοποίηση διανυσμάτων: Διαδικασία Gram-Schmidt

Πρόβλημα: Δίνονται γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\{a_1, ..., a_n\}$ και θέλουμε να κατασκευάσουμε ορθοκανονικά (ΟΚ) διανύσματα $\{q_1, \cdots, q_n\}$ τ.ώ.

$$\mathrm{span}\{q_1, \cdots, q_n\} = \mathrm{span}\{a_1, ..., a_n\}$$

Ιδέα: Αν αφαιρέσουμε από διάνυσμα, x, την ορθογώνια προβολή του, $P_{\mathcal{S}}x$, επί ενός υπόχωρου, $\mathcal{S}$, το διάνυσμα διαφοράς, $x - P_{\mathcal{S}}x$, είναι κάθετο στον υπόχωρο, δηλ. $x - P_{\mathcal{S}}x \perp \mathcal{S}$.

Ορθοκανονικοποίηση διανυσμάτων: Διαδικασία Gram-Schmidt

Πρόβλημα: Δίνονται γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\{a_1, ..., a_n\}$ και θέλουμε να κατασκευάσουμε ορθοκανονικά (ΟΚ) διανύσματα $\{q_1, \cdots, q_n\}$ τ.ώ.

$$\mathrm{span}\{q_1, \cdots, q_n\} = \mathrm{span}\{a_1, ..., a_n\}$$

Ιδέα: Αν αφαιρέσουμε από διάνυσμα, x, την ορθογώνια προβολή του, $P_{\mathcal{S}}x$, επί ενός υπόχωρου, $\mathcal{S}$, το διάνυσμα διαφοράς, $x - P_{\mathcal{S}}x$, είναι κάθετο στον υπόχωρο, δηλ. $x - P_{\mathcal{S}}x \perp \mathcal{S}$.
Συστηματική εφαρμογή, διαδοχικά:

- *I* Υπολογίζουμε $q_1 = a_1/\|a_1\|$.
- *II* Για $k = 2, ..., n$ εκτελούμε:
  1. Αφαιρούμε από το a_k την ορθογώνια προβολή του επί του υπόχωρου $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{q_1, .., q_{k-1}\}$. Το παραγόμενο διάνυσμα, έστω $\tilde{q}_k$, θα είναι κάθετο στο $\mathcal{S}$.
  2. Υπολογίζουμε $q_k = \tilde{q}_k/\|\tilde{q}_k\|$.

Ειδικότερα

Έστω $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{q_1, .., q_{k-1}\}$ και ότι

$$Q_{k-1} := [q_1, ..., q_{k-1}]$$

και συμβολίζουμε P_{k-1} το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί του $\mathcal{S}$.

$$P_{k-1} = Q_{k-1}(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1} Q_{k-1}^\top$$

Ειδικότερα

Έστω $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{q_1, .., q_{k-1}\}$ και ότι

$$Q_{k-1} := [q_1, \ldots, q_{k-1}]$$

και συμβολίζουμε P_{k-1} το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί του $\mathcal{S}$.

$$P_{k-1} = Q_{k-1}(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1} Q_{k-1}^\top$$

Επομένως τα απαραίτητα βήματα στην επανάληψη k είναι:

1. $\tilde{q}_k = a_k - P_{k-1} a_k$
2. $q_k = \tilde{q}_k / \|\tilde{q}_k\|$.

Ειδικότερα

Έστω $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{q_1, .., q_{k-1}\}$ και ότι

$$Q_{k-1} := [q_1, ..., q_{k-1}]$$

και συμβολίζουμε P_{k-1} το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί του $\mathcal{S}$.

$$P_{k-1} = Q_{k-1}(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1} Q_{k-1}^\top$$

Επομένως τα απαραίτητα βήματα στην επανάληψη k είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}.\ \tilde{q}_k &= a_k - P_{k-1} a_k \\ \mathbf{2}.\ q_k &= \tilde{q}_k / \|\tilde{q}_k\|. \end{aligned}$$

Λίγη προσοχή στο πώς ακριβώς είναι ο P_{k-1}:

1. $Q_{k-1}^\top Q_{k-1} = I_k$ λόγω ορθοκανονικότητας
2. $Q_{k-1} Q_{k-1}^\top = [q_1, ..., q_{k-1}] \begin{pmatrix} q_1^\top \\ \vdots \\ q_{k-1}^\top \end{pmatrix}$

Ειδικότερα

Έστω $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{q_1, .., q_{k-1}\}$ και ότι Θέτουμε

$$Q_{k-1} := [q_1, ..., q_{k-1}]$$

$$P_{k-1} = Q_{k-1}(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1} Q_{k-1}^\top$$

Ειδικότερα

Έστω $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{q_1, .., q_{k-1}\}$ και ότι Θέτουμε

$$Q_{k-1} := [q_1, ..., q_{k-1}]$$

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= Q_{k-1}(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1} Q_{k-1}^\top \\ &= Q_{k-1}\cancel{(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1}} Q_{k-1}^\top \end{aligned}$$

Ειδικότερα

Έστω $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{q_1, .., q_{k-1}\}$ και ότι Θέτουμε

$$Q_{k-1} := [q_1, ..., q_{k-1}]$$

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= Q_{k-1}(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1} Q_{k-1}^\top \\ &= Q_{k-1}\cancel{(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1}} Q_{k-1}^\top \\ &= Q_{k-1} Q_{k-1}^\top \end{aligned}$$

Ειδικότερα

Έστω $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{q_1, .., q_{k-1}\}$ και ότι Θέτουμε

$$Q_{k-1} := [q_1, ..., q_{k-1}]$$

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= Q_{k-1}(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1} Q_{k-1}^\top \\ &= Q_{k-1}\cancel{(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1}} Q_{k-1}^\top \\ &= Q_{k-1} Q_{k-1}^\top \\ &= q_1 q_1^\top + \cdots + q_{k-1} q_{k-1}^\top \end{aligned}$$

Ειδικότερα

Έστω $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{q_1, .., q_{k-1}\}$ και ότι Θέτουμε

$$Q_{k-1} := [q_1, ..., q_{k-1}]$$

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= Q_{k-1}(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1}Q_{k-1}^\top \\ &= Q_{k-1}\cancel{(Q_{k-1}^\top Q_{k-1})^{-1}}Q_{k-1}^\top \\ &= Q_{k-1}Q_{k-1}^\top \\ &= q_1 q_1^\top + \cdots + q_{k-1}q_{k-1}^\top \end{aligned}$$

Άρα ισοδύναμα τα απαραίτητα βήματα στην επανάληψη k είναι:

1. $\tilde{q}_k = a_k - q_1(q_1^\top a_k) - \ldots - q_{k-1}(q_{k-1}^\top a_k)$
2. $q_k = \tilde{q}_k / \|\tilde{q}_k\|.$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Επομένως

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Επομένως

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και το μητρώο που το ανάγει } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Επομένως

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και το μητρώο που το ανάγει } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από τα παραπάνω: $m = 3$, $n = 4$, $r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r = 1$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Επομένως

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και το μητρώο που το ανάγει } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από τα παραπάνω: $m = 3$, $n = 4$, $r = 2$, $\dim(\text{null}(A)) = n - r = 2$, $\dim(\text{null}(A^\top)) = m - r = 1$.

Βάσεις:

Παράδειγμα (εφαρμογή)

Θα υπολογίσουμε βάσεις για τους υπόχωρους μητρώου (όπως κεφ. 3) και θα κατασκευάσουμε ΟΚ βάσεις γι΄ αυτές.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα (εφαρμογή)

Θα υπολογίσουμε βάσεις για τους υπόχωρους μητρώου (όπως κεφ. 3) και θα κατασκευάσουμε ΟΚ βάσεις γι' αυτές.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα (εφαρμογή)

Θα υπολογίσουμε βάσεις για τους υπόχωρους μητρώου (όπως κεφ. 3) και θα κατασκευάσουμε ΟΚ βάσεις γι' αυτές.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Παράδειγμα (εφαρμογή)

Θα υπολογίσουμε βάσεις για τους υπόχωρους μητρώου (όπως κεφ. 3) και θα κατασκευάσουμε ΟΚ βάσεις γι' αυτές.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Επομένως

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα (εφαρμογή)

Θα υπολογίσουμε βάσεις για τους υπόχωρους μητρώου (όπως κεφ. 3) και θα κατασκευάσουμε ΟΚ βάσεις γι' αυτές.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Επομένως

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και το μητρώο που το ανάγει } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα (εφαρμογή)

Θα υπολογίσουμε βάσεις για τους υπόχωρους μητρώου (όπως κεφ. 3) και θα κατασκευάσουμε ΟΚ βάσεις γι΄ αυτές.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Επομένως

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και το μητρώο που το ανάγει } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από τα παραπάνω: $m = 3$, $n = 4$, $r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r = 1$.

Παράδειγμα (εφαρμογή)

Θα υπολογίσουμε βάσεις για τους υπόχωρους μητρώου (όπως κεφ. 3) και θα κατασκευάσουμε ΟΚ βάσεις γι' αυτές.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Επομένως

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και το μητρώο που το ανάγει } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από τα παραπάνω: $m = 3$, $n = 4$, $r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r = 1$.

Βάσεις:

$$\mathrm{range}(A) = \mathrm{span}\{a_1, a_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ οι στήλες οδηγών του } A \text{ (επίσης του } R\text{)}$$

Παράδειγμα (εφαρμογή)

Θα υπολογίσουμε βάσεις για τους υπόχωρους μητρώου (όπως κεφ. 3) και θα κατασκευάσουμε ΟΚ βάσεις γι' αυτές.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ΑΓΚΜ}$$

Επομένως

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και το μητρώο που το ανάγει } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από τα παραπάνω: $m = 3, n = 4, r = 2, \dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r = 1$.
Βάσεις:

$$\mathrm{range}(A) = \mathrm{span}\{a_1, a_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$ οι στήλες οδηγών του A (επίσης του R)

$$\mathrm{null}(A^\top) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$ $m - r = 1$ άρα παράγεται από την τελευταία γραμμή του M

Προσοχή: Τα διανύσματα βάσης επαληθεύουν ότι $\mathbb{R}^m = \mathrm{range}(A) \oplus \mathrm{null}(A^\top)$.

Παράδειγμα (μέρος 2)

Όπως πριν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τα παραπάνω: $m = 3$, $n = 4$, $r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r = 1$.

Παράδειγμα (μέρος 2)

Όπως πριν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τα παραπάνω: $m = 3, n = 4, r = 2, \dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2,$
$\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r = 1.$
Βάσεις:

$$\mathrm{range}(A^\top) = \mathrm{span}\{r^{(1)}, r^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{πρώτες } r \text{ γραμμές του } R$$

Παράδειγμα (μέρος 2)

Όπως πριν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τα παραπάνω: $m = 3, n = 4, r = 2, \dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2,$
$\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r = 1.$
Βάσεις:

$$\mathrm{range}(A^\top) = \mathrm{span}\{r^{(1)}, r^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{πρώτες } r \text{ γραμμές του } R$$

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

από τις $n - r = 2$ ελεύθερες στήλες του R προσαυξημένες με στήλες του I_r.

Παράδειγμα (μέρος 2)

Όπως πριν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τα παραπάνω: $m = 3, n = 4, r = 2, \dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2$, $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r = 1$.
Βάσεις:

$$\mathrm{range}(A^\top) = \mathrm{span}\{r^{(1)}, r^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$ πρώτες r γραμμές του R

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

από τις $n - r = 2$ ελεύθερες στήλες του R προσαυξημένες με στήλες του I_r.
Προσοχή: Τα διανύσματα βάσης επαληθεύουν ότι $\mathbb{R}^n = \mathrm{range}(A^\top) \oplus \mathrm{null}(A)$.

Ορθοκανονικές βάσεις

Χρησιμοποιούμε Gram-Schmidt για να κατασκευάσουμε ΟΚ βάσεις για τους υπόχωρους (εκτός αν είναι ήδη.)

ΟΚ βάση για $\mathrm{range}(A)$ από τις στήλες οδηγών του A

$$\mathrm{range}(A) = \mathrm{span}\{a_1, a_3\} = \{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

επομένως $q_1 = a_1/\|a_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - q_1(q_1^\top a_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}^\top \Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}^\top$$

Άρα $\mathrm{range}(A) = \mathrm{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

ΟΚ βάση για $\mathrm{null}(A^\top)$ $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ (διάσταση 1, αρκεί κανονικοποίηση)

ΟΚ βάση για $\mathrm{range}(A^\top)$ $q_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - q_1(q_1^\top a_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{8}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}$$

άρα μία ΟΚ βάση για το $\mathrm{range}(A^\top)$ είναι

$$\{q_1, q_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{609}} \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix} \right\}$$

ΟΚ βάση για $\mathrm{null}(A)$ Η βάση που υπολογίσαμε αποτελείται από τα διανύσματα

$$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Άρα } p_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{p}_2 = b_2 - p_1(p_1^\top b_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

άρα μια ΟΚ βάση για το $\mathrm{null}(A)$ είναι

$$\{p_1, p_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{435}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Gram-Schmidt και παραγοντοποίηση QR I

Παρατήρηση: Οι στήλες του $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ είναι ΟΚ και γραμμικός συνδυασμός των στηλών του $A = (a_1, a_2, .., a_n)$. Εκ κατασκευής, αναδεικνύεται η παραγοντοποίηση

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

Επειδή οι στήλες του Q είναι ΟΚ, ισχύει ότι $Q^\top A = R$,

$$R = \begin{pmatrix} q_1^\top a_1 & q_1^\top a_2 & \cdots & & q_1^\top a_n \\ q_2^\top a_1 & q_2^\top a_2 & \cdots & & q_2^\top a_n \\ q_3^\top a_1 & q_3^\top a_2 & q_3^\top a_3 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ q_n^\top a_1 & q_n^\top a_2 & q_n^\top a_3 & \cdots & q_n^\top a_n \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα

Gram-Schmidt και παραγοντοποίηση QR II

Εκ κατασκευής, $q_i \perp \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$, άρα το R είναι άνω τριγωνικό.

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1\rho_{11}, \text{ όπου } \|a_1\| = \rho_{11} \\ a_2 &= q_1(q_1^\top a_2) + q_2\rho_{22}, \text{ όπου } \rho_{22} = \|a_2 - q_1(q_1^\top a_2)\| \\ a_3 &= q_1(q_1^\top a_3) + q_2(q_2^\top a_3) + q_3\rho_{33} \end{aligned}$$

δηλ.

$$(a_1, a_2, a_3) = (q_1, q_2, q_3)\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} \\ 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix}$$

και γενικά

$$A = QR$$

Gram-Schmidt και παραγοντοποίηση QR III

όπου το Q έχει ορθογώνιες στήλες και το R είναι άνω τριγωνικό.

Παραγοντοποίηση QR

Για κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με γραμμικά ανεξάρτητες στήλες μπορούμε να γράψουμε $A = QR$ όπου το $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ έχει ορθογώνιες στήλες και το R είναι άνω τριγωνικό με μη μηδενικά στη διαγώνιο.

- Οι στήλες $q_1, \ldots, q_i$ αποτελούν ΟΚ βάση για τον υπόχωρο $\text{span}\{a_1, \cdots, a_i\}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$
- Η παραγοντοποίηση επεκτείνεται και σε $A = QR$ όπου $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε το Q περιέχει ΟΚ βάση για όλον τον $\mathbb{R}^m$.
- Η παραγοντοποίηση επεκτείνεται και στην περίπτωση γραμμικά εξαρτημένων στηλών, $AP = QR$, όπου P είναι μητρώο μετάθεσης.

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών - Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας