Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα 4 : Ορθογωνιότητα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σκοπός Ενότητας

- Ορθογωνιότητα των 4ων υποχώρων
- Προβολές
- Ορθογώνιες βάσεις και μέθοδος Gram-Schmidt
- Προβλήματα γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για ορισμένες χρήσεις μητρώων και διανυσμάτων.

- Την αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή μητρώου (ΑΓΚΜ).
- Επίλυση γενικού συστήματος $Ax = b$ (διάγνωση αν υπάρχει λύση και αν ναι, εύρεση της πλήρους λύσης).
- Εύρεση βάσης αριστερού μηδενοχώρου.
- Παραγοντοποίηση τάξης μητρώου.

Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Πράξεις μεταξύ υπόχωρων (άθροισμα, τομή, ευθύ άθροισμα, ένωση) και χαρακτηρισμός αποτελέσματος.
2. Ορθογωνιότητα: Ορθογώνιο συμπλήρωμα. Σχέσεις ορθογωνιότητας των τεσσάρων υποχώρων.
3. Ορθογώνια προβολή και κατασκευή τελεστή (μητρώου) ορθογώνιας προβολής για υπόχωρους.

Υπό συζήτηση ενότητες

Συνδυασμοί υπόχωρων

Ορισμοί

Έστω διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ και οι υποχώροι $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$. Τότε:

Άθροισμα υποχώρων $\mathcal{R} + \mathcal{S} = \{r + s : r \in \mathcal{R}, s \in \mathcal{S}\}$.

Τομή υποχώρων $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{v : v \in \mathcal{R}$ και $v \in \mathcal{S}\}$.

Ένωση υποχώρων $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{v : v \in \mathcal{R}$ ή $v \in \mathcal{S}\}$.

Πρόταση

Το άθροισμα και η τομή είναι υπόχωρος. Η ένωση δύο υποχώρων, δεν είναι κατ' ανάγκη υπόχωρος.

Παράδειγμα

$\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ και οι υποχώροι

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{u = (\alpha, 0)^\top | \alpha \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{S} &= \{u = (0, \alpha)^\top | \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \mathcal{R} + \mathcal{S}, \\ Z &= \mathcal{R} \cap \mathcal{S}, \end{aligned}$$

το σύνολο $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ δεν είναι υπόχωρος.

Ευθύ άθροισμα και συμπλήρωμα I

Ορισμός

Έστω διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ και οι υποχώροι $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$. Ονομάζουμε ευθύ άθροισμα των $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ και το συμβολίζουμε $\mathcal{T} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ αν

1. $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = 0$, και
2. $\mathcal{R} + \mathcal{S} = \mathcal{T}$

Τότε λέμε ότι ο $\mathcal{R}$ είναι συμπλήρωμα του $\mathcal{S}$ και ότι ο $\mathcal{S}$ είναι συμπλήρωμα του $\mathcal{R}$.

- Το συμπλήρωμα του $\mathcal{R}$ (όπως και του $\mathcal{S}$) δεν είναι μοναδικό. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ και θέσουμε ως $\mathcal{R}$ κάποια γραμμή που περνά από την αρχή των αξόνων, τότε οποιαδήποτε άλλη γραμμή που περνά από την αρχή είναι συμπλήρωμα του $\mathcal{R}$.

Ευθύ άθροισμα και συμπλήρωμα II

Θεώρημα

Έστω ότι $\mathcal{T} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$. Τότε

1. κάθε $t \in \mathcal{T}$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως $t = r + s$ όπου $r \in \mathcal{R}$ και $s \in \mathcal{S}$.
2. $\dim(\mathcal{T}) = \dim(\mathcal{R}) + \dim(\mathcal{S})$.

Θεώρημα

Αν $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ είναι οποιοιδήποτε υπόχωροι διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$,

$$\dim(\mathcal{R} + \mathcal{S}) = \dim(\mathcal{R}) + \dim(\mathcal{S}) - \dim(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}).$$

Ευθύ άθροισμα και συμπλήρωμα III

Παράδειγμα $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ και οι υποχώροι

$$\mathcal{R} = \{u = (\alpha, 0)^\top | \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathcal{S} \;=\; \{u = (0, \alpha)^\top | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

τότε

$$\mathbb{R}^2 \;=\; \mathcal{R} \oplus \mathcal{S},$$

και όσον αφορά στις διαστάσεις,

$$2 \;=\; 1 + 1$$

Ορθογωνιότητα

Στο μέρος αυτό των διαλέξεων θα μας απασχολήσουν οι εξής έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας:

1. οι σχέσεις ορθογωνιότητας μεταξύ των 4 υποχωρων
2. η ορθογωνιότητα σε στοιχεία διανυσματικών χώρων - ακόμα και σε συναρτήσεις!
3. ορθογώνια προβολή
4. βέλτιστη προσέγγιση και ορθογωνιότητα
5. το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων (επέκταση του προβλήματος επίλυσης συστημάτων)
6. μέθοδοι επίλυσής του προβλήματος των ελαχίστων τετραγώνων
7. η διαδικασία Gram-Schmidt για την παραγωγή ορθογώνιων διανυσμάτων

Θεμελιώδες θεώρημα της ΓΑ κατά Strang, Μέρος I

Υπενθύμιση

Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε

1. $\dim(\mathrm{range}(A)) = \dim(\mathrm{range}(A^\top)) = r$
2. $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r$ και
   $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r$.

Σχέσεις ορθογωνιότητας θεμελιωδών υποχώρων

Ορισμός

Έστω ο $\mathbb{R}^n$. Για κάθε δ.υ. $\mathcal{V}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα, $\mathcal{V}^\perp$ είναι ο δ. υπόχωρος όλων των διανυσμάτων καθέτων στο $\mathcal{V}$. Τότε $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$.

Σχέσεις ορθογωνιότητας θεμελιωδών υποχώρων

Ορισμός

Έστω ο $\mathbb{R}^n$. Για κάθε δ.υ. $\mathcal{V}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα, $\mathcal{V}^\perp$ είναι ο δ. υπόχωρος όλων των διανυσμάτων καθέτων στο $\mathcal{V}$. Τότε $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$.

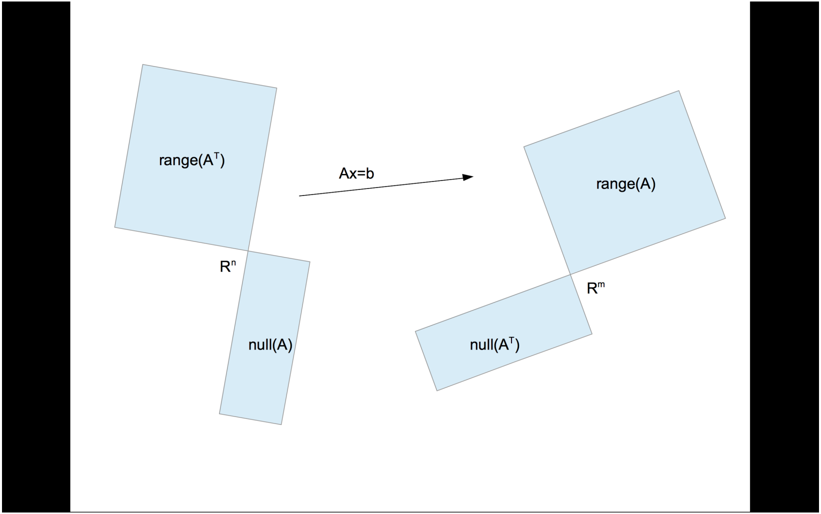
Προσέξτε ότι εξ ορισμού, τα στοιχεία των $\mathrm{null}(\mathrm{A})$ και $\mathrm{range}(A^\top)$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Ομοίως, τα στοιχεία των $\mathrm{null}(\mathrm{A}^\top)$ και $\mathrm{range}(A)$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Θεμελιώδες Θεώρημα Γραμμικής Άλγεβρας II

(κατά Strang:)

- $\mathrm{range}(A) \perp \mathrm{null}(A^\top)$ και $\mathrm{range}(A^\top) \perp \mathrm{null}(A)$,
- $(\mathrm{null}(A))^\perp = \mathrm{range}(A^\top)$, $(\mathrm{null}(A^\top))^\perp = \mathrm{range}(A)$,
- $\mathbb{R}^m = \underbrace{\mathrm{range}(A)}_{r} \oplus \underbrace{\mathrm{null}(A^\top)}_{m-r}$, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathrm{range}(A^\top)}_{r} \oplus \underbrace{\mathrm{null}(A)}_{n-r}$

Ζεύγη και ορθογωνιότητα υποχώρων μητρώου



Προβολή και ορθογώνια προβολή

Έστω υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^n$ και ότι

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$$

όπου

$$\mathcal{V}^\perp = \{y | y \perp x, \forall x \in \mathcal{V}\}$$

Τότε κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται μοναδικά και ως άθροισμα των

$$\begin{aligned} x &= v + u, v \in \mathcal{V}, u \in \mathcal{V}^\perp \\ &= Px + (I - P)x \end{aligned}$$

όπου P η ορθογώνια προβολή επί του $\mathcal{V}$. Προσέξτε ότι $I - P$ επιτελεί ορθογώνια προβολή στο ορθογώνιο συμπλήρωμα $\mathcal{V}^\perp$.

Ορθογώνια προβολή

Θέμα: Μας δίνεται ένα διάνυσμα x από τον δ.χ. και αναζητούμε:

1. Την προβολή, δηλ. το διάνυσμα που προκύπτει από την προβολή του διανύσματος σε κάποιον υπόχωρο.
2. Θα δούμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε την προβολής ως ένα ειδικό μητρώο προβολής επί το x.

Θεωρούμε εδώ ότι η προβολή ενός διανύσματος

- σε ευθεία είναι το μέρος του διανύσματος κατά μήκος της ευθείας.
- σε επίπεδο είναι το μέρος του διανύσματος επί του επιπέδου.
- παρόμοια γενικεύουμε την έννοια της προβολής διανύσματος επί μεγαλύτερου υπόχωρου.

Προσοχή: Το βιβλίο του Strang (και εμείς εδώ) θα αναφερόμαστε αποκλειστικά σε ορθογώνιες προβολές. Υπάρχουν όμως και πλαγιογώνιες προβολές.

Απλό παράδειγμα

Ο δ.χ. είναι το $\mathbb{R}^3$ και μας ενδιαφέρουν οι υπόχωροι $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{e_3\}$ και $\mathcal{T} := \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. Τότε αν

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \text{προβολή επί του } \mathcal{S} \text{ είναι } x_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \text{προβολή επί του } \mathcal{T} \text{ είναι } x_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Απλό παράδειγμα

Ο δ.χ. είναι το $\mathbb{R}^3$ και μας ενδιαφέρουν οι υπόχωροι $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{e_3\}$ και $\mathcal{T} := \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. Τότε αν

$$
\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\quad \text{προβολή επί του } \mathcal{S} \text{ είναι } x_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\quad \text{προβολή επί του } \mathcal{T} \text{ είναι } x_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Απλό παράδειγμα

Ο δ.χ. είναι το $\mathbb{R}^3$ και μας ενδιαφέρουν οι υπόχωροι $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{e_3\}$ και $\mathcal{T} := \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. Τότε αν $x = (1, 2, -1)^\top$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow x_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}} x, \text{ όπου } P_{\mathcal{S}} &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_3 (e_3^\top e_3)^{-1} e_3^\top \\
\Rightarrow x_{\mathcal{T}} = P_{\mathcal{T}} x, \text{ όπου } P_{\mathcal{T}} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_2^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_2^\top \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Αναπαράσταση ορθογώνιας προβολής με μητρώα

Προβολή σε 1 διάσταση

- Κάθε μονοδιάστατος υποχώρος αποτελείται από διανύσματα που είναι παράλληλα σε κάποιο διάνυσμα u. Δοθέντος του u, το μητρώο

$$P := \frac{uu^\top}{u^\top u}$$

είναι ο τελεστής ορθογώνιας προβολής επί του υποχώρου.

- Δείτε την επίδραση του παραπάνω P σε τυχόν διάνυσμα x:

$$\begin{aligned} \frac{uu^\top}{u^\top u}x &= \frac{u}{\|u\|}\frac{u^\top x}{\|u\|} \\ &= v\|x\|\cos(x,u), \quad \textit{όπου } v := \frac{u}{\|u\|} \end{aligned}$$

Το Px είναι η ορθογώνια προβολή του στην κατεύθυνση (δηλ. παράλληλα) του $\langle v\rangle$.

- Προσέξτε ότι

$$(Px)^\top(x - Px) = 0 \Rightarrow x - Px \perp Px$$

που επιβεβαιώνει την ορθογωνιότητα

Η εφαρμογή του $P := uu^\top / u^\top u$ σε τυχόν διάνυσμα x έχει σαν αποτέλεσμα την προβολή του x στον υποχώρο $\mathrm{span}\{u\}$.

Παράδειγμα Έστω $u = [1, 2, 3]^\top$, τότε

$$P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Για τυχαίο διάνυσμα x έχουμε

$$\begin{aligned} Px &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} \xi_1 + 2\,\xi_2 + 3\,\xi_3 \\ 2\,\xi_1 + 4\,\xi_2 + 6\,\xi_3 \\ 3\,\xi_1 + 6\,\xi_2 + 9\,\xi_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\xi_1 + 2\,\xi_2 + 3\,\xi_3}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Μητρώα προβολής

Ορισμός

Ένα μητρώο $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποκαλείται μητρώο προβολής αν είναι αυτοπαθές[1], δηλ.

$$PP = P$$

Το P αποκαλείται μητρώο ορθογώνιας προβολής αν επιπλέον ισχύεο ότι είναι συμμετρικό, δηλ. $P^\top = P$.

Πώς φτιάχνουμε μητρώο ορθογώνιας προβολής (ΟΠ);

Έστω ο υπόχωρος $\mathcal{V} = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ όπου τα v_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα αποτελούν βάση. Αν $V = (v_1, \dots, v_n)$, τότε το μητρώο

$$P := V(V^\top V)^{-1} V^\top$$

είναι το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί του $\mathcal{V}$.

[1] idempotent

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών - Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ