Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **3** : Διανυσματικοί Χώροι και Υπόχωροι

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Χώροι Διανυσμάτων
- Ο Μηδενόχωρος του A
- Η Τάξη και η Μορφή Αναγμένων Γραμμών
- Η πλήρης λύση της $Ax = b$
- Ανεξαρτησία, Βάση και Διάσταση
- Διάσταση των 4ων υποχώρων

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για ορισμένες χρήσεις μητρώων και διανυσμάτων.

- Τη λύση του $Ax = 0$.
- Την κλιμακωτή μορφή μητρώου.
- Εύρεση βάσης για το μηδενόχωρο.
- Εύρεση βάσης για το χώρο στηλών.
- Τις διαστάσεις των 4 δ. υπόχωρων που ορίζονται από το μητρώο.

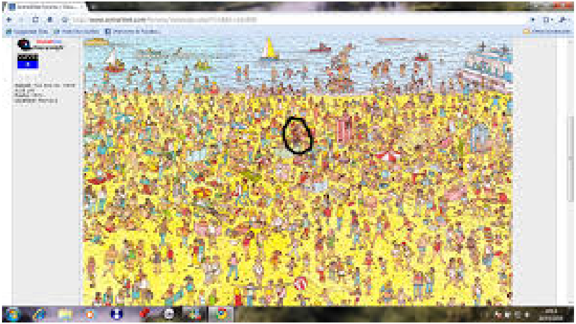
Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Την αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή μητρώου (ΑΓΚΜ).
2. Επίλυση γενικού συστήματος $Ax = b$ (διάγνωση αν υπάρχει λύση και αν ναι, εύρεση της πλήρους λύσης).
3. Εύρεση βάσης αριστερού μηδενοχώρου.
4. Παραγοντοποίηση τάξης μητρώου.

Υπό συζήτηση ενότητες

Βρες το Χώρο (βρες μια Βάση), Βρες τη/τις Λύσεις (αν $\exists$)

Βρες το Χώρο (βρες μια Βάση), Βρες τη/τις Λύσεις (αν ∃)



Οι **2** (+2) βασικοί διανυσματικοί υπόχωροι

και οι διαστάσεις τους

Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε

1. ο δ.χ. διάνοιγμα των στηλών ονομάζεται χώρος στηλών του A, συμβ. $\mathrm{range}(A)$
2. ... ισχύει προφανώς $\dim(\mathrm{range}(A)) \leq m$
3. ο δ.χ. διάνοιγμα των γραμμών ονομάζεται ο χώρος γραμμών του A, $\mathrm{range}(A^\top)$
4. ... ισχύει προφανώς $\dim(\mathrm{range}(A^\top)) \leq n$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάσταση $r = \dim(\mathrm{range}(A)\ )$ αποκαλείται **ΤΑΞΗ** του A και συμβολίζεται επίσης ως $\mathrm{rank}(A)$. Είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών.
ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο **ίδιος** αριθμός, r, είναι και ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A.

$$\mathrm{rank}(A) = r = \dim(\mathrm{range}(A)) = \dim(\mathrm{range}(A^\top))$$

- Η τάξη αφορά εξίσου γραμμές και στήλες, αποκαλύπτει τα μεγέθη των 4 υποχώρων και εντέλει πόση χρήσιμη πληροφορία περιέχει το μητρώο.
- Ο Strang αποκαλεί Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας (Ι) το ότι $\dim(\mathrm{range}(A)) = \dim(\mathrm{range}(A^\top)) = r$ και ότι $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r$ και $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r$.

Τι σημαίνει εύρεση χώρου;

Εύρεση υποχώρου: σημαίνει *εύρεση βάσης*;

Πρόβλημα: Συνήθως ούτε οι βάσεις ούτε οι διαστάσεις των υποχώρων φαίνονται απλά παρατηρώντας το A.

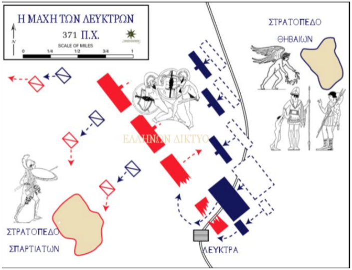
Αντιμετώπιση: Προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε το A σε πιο αποκαλυπτικές, ισοδύναμες μορφές.

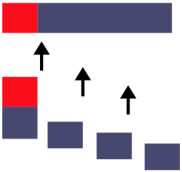
1) Κλιμακωτή μορφή γραμμών

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EUROPEAN PARLIAMENT

1999 2004





Top: Traditional hoplite order of battle and advance.
Bottom: Epaminondas's strategy at Leuctra. The strong left wing advanced more than the weaker right wing. The red blocks show the placement of the elite troops within each phalanx.

11 July 2001

REPORT

on the existence of a global system for the inter
communications (ECHELON interception syste

Ιστορικολεξικολογική παρένθεση

- Η κλιμακωτή μορφή γραμμών είναι μετάφραση του row echelon form.
- Ο όρος echelon προέρχεται από τα Γαλλικά (echelle για κλίμακα, σκάλα) και χρησιμοποιείται στη στρατιωτική ορολογία για να χαρακτηρίσει A formation of troops, ships, etc. in diagonal parallel rows (Wikipedia).
- Αξίζει να σημειωθεί ότι ο η διάταξη αυτή χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 371 π.Χ. στη μάχη των Λεύκτρων (μεταξύ Θηβαίων και Σπαρτιατών) με το σχηματισμό που έγινε γνωστός ως Λοξή Φάλαγγα.
- Επειδή μας ενδιαφέρει η αποκάλυψη πληροφοριών από το μητρώο, αξίζει να σημειώσουμε ότι echelon έχει ονομαστεί και το *αυτοματοποιημένο σύστημα αναπτυγμένο σήμερα σε δίκτυο, παγκόσμιας ηλεκτρονικής παρακολούθησης όλων των ειδών επικοινωνιών* (Wikipedia) (αποκαλύπτει σε λίγους για τους πολλούς ...)

Προσοχή

(σελ. 172-4 Strang)

- Αν το A είναι $m \times n$ και $m < n$ τότε η $Ax = 0$ πάντα διαθέτει μη μηδενική λύση. Στην περίπτωση αυτή, το $Ax = b$ έχει άπειρες ή καμία λύση.

Προσοχή

(σελ. 172-4 Strang)

- Αν το A είναι $m \times n$ και $m < n$ τότε η $Ax = 0$ πάντα διαθέτει μη μηδενική λύση. Στην περίπτωση αυτή, το $Ax = b$ έχει άπειρες ή καμία λύση.
- Οι στήλες οδηγών του A δεν είναι γραμμικοί συνδυασμοί των προηγούμενων στηλών. Οι ελεύθερες στήλες είναι συνδυασμοί των προηγούμενων στηλών.

Προσοχή

(σελ. 172-4 Strang)

- Αν το A είναι $m \times n$ και $m < n$ τότε η $Ax = 0$ πάντα διαθέτει μη μηδενική λύση. Στην περίπτωση αυτή, το $Ax = b$ έχει άπειρες ή καμία λύση.
- Οι στήλες οδηγών του A δεν είναι γραμμικοί συνδυασμοί των προηγούμενων στηλών. Οι ελεύθερες στήλες είναι συνδυασμοί των προηγούμενων στηλών.
- Λέμε ότι ο A έχει πλήρη τάξη γραμμών αν κάθε γραμμή έχει έναν οδηγό, δηλ. $r = m$. Τότε το U δεν περιέχει μηδενικές γραμμές.
- Λέμε ότι ο A έχει πλήρη τάξη γραμμών αν κάθε στήλη έχει έναν οδηγό, δηλ. $r = n$. Τότε δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές.
- Ένα $m \times n$ μητρώο είναι αντιστρέψιμο ανν ειναι τετραγωνικό και πλήρους τάξης, δηλ. $r = m = n$.
- Το σύστημα $Ax = b$ έχει τουλάχιστον μια λύση ανν $\mathrm{range}([A, b]) = \mathrm{range}(A)$. Αν $\mathrm{range}([A, b]) \neq \mathrm{range}(A)$, το σύστημα δεν έχει λύση (ασυνεπές).

Αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή μητρώου

Ένα μητρώο λέγεται ότι είναι σε **αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή (ΑΓΚΜ)** (row reduced echelon form (RREF)) αν ισχύουν τα εξής:

1. Οι μηδενικές γραμμές παρατίθενται τελευταίες.
2. Το κυρίαρχο στοιχείο των μηδενικών γραμμών είναι 1.
3. Κάθε στήλη που περιέχει κυρίαρχο 1, έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις.
4. Το κυρίαρχο 1 κάθε γραμμής είναι στην πιο αριστερή θέση οποιουδήποτε κυρίαρχου των γραμμών που έπονται.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή

Ένα μητρώο λέγεται ότι είναι σε **αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή (ΑΓΚΜ)** (row reduced echelon form (RREF)) αν ισχύουν τα εξής:

1. Οι μηδενικές γραμμές παρατίθενται τελευταίες.
2. Το κυρίαρχο στοιχείο των μηδενικών γραμμών είναι 1.
3. Κάθε στήλη που περιέχει κυρίαρχο 1, έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις.
4. Το κυρίαρχο 1 κάθε γραμμής είναι στην πιο αριστερή θέση οποιουδήποτε κυρίαρχου των γραμμών που έπονται.

2) Αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή

Ένα μητρώο λέγεται ότι είναι σε **αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή (ΑΓΚΜ)** (row reduced echelon form (RREF)) αν ισχύουν τα εξής:

1. Οι μηδενικές γραμμές παρατίθενται τελευταίες.
2. Το κυρίαρχο στοιχείο των μηδενικών γραμμών είναι 1.
3. Κάθε στήλη που περιέχει κυρίαρχο 1, έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις.
4. Το κυρίαρχο 1 κάθε γραμμής είναι στην πιο αριστερή θέση οποιουδήποτε κυρίαρχου των γραμμών που έπονται.

Πρόταση

Κάθε μητρώο μπορεί να αναχθεί με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς σε αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή. Το μητρώο που προκύπτει είναι μοναδικό.

2) Αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή

Ένα μητρώο λέγεται ότι είναι σε **αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή (ΑΓΚΜ)** (row reduced echelon form (RREF)) αν ισχύουν τα εξής:

1. Οι μηδενικές γραμμές παρατίθενται τελευταίες.
2. Το κυρίαρχο στοιχείο των μηδενικών γραμμών είναι 1.
3. Κάθε στήλη που περιέχει κυρίαρχο 1, έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις.
4. Το κυρίαρχο 1 κάθε γραμμής είναι στην πιο αριστερή θέση οποιουδήποτε κυρίαρχου των γραμμών που έπονται.

Πρόταση

Κάθε μητρώο μπορεί να αναχθεί με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς σε αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή. Το μητρώο που προκύπτει είναι μοναδικό.

Σημαντικό: καθώς οι διαδοχικοί μετασχηματισμοί επιτελούν μόνον γραμμικούς συνδυασμούς γραμμών, ο χώρος γραμμών του μητρώου παραμένει αμετάβλητος , δηλ. το μητρώο στη μορφή ΑΓΚΜ έχει τον ίδιο χώρο γραμμών με το αρχικό μητρώο.

Για αναγωγή σε ΑΓΚΜ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στη συνέχεια θα δείξουμε πως από την ΑΓΚΜ μπορούμε να υπολογίσουμε ό,τι χρειάζεται για τους υπόχωρους του A καθώς και την πλήρη λύση του $Ax = b$.

Θα επιτρέψουμε τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στο βήμα k

- εναλλαγή γραμμής k με γραμμή $i > k$ αν το στοιχείο στη θέση (k, k) είναι 0 ενώ στη θέση (i, k) όχι.
- γρ.συνδ. γραμμών για μηδενισμό των στοιχείων κάτω και επάνω από το τους οδηγούς (όπως στην Gauss-Jordan), δηλ. στις θέσεις (i, k) για $i = 1 : k, i = k + 1 : m$
- κανονικοποίηση των οδηγών με διαίρεση κάθε γραμμής με αυτούς και αναγωγή τους στη μονάδα. Αυτό ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό με το διαγώνιο μητρώο με στοιχεία τα αντίστροφα των οδηγών.

Για αναγωγή σε ΑΓΚΜ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στη συνέχεια θα δείξουμε πως από την ΑΓΚΜ μπορούμε να υπολογίσουμε ό,τι χρειάζεται για τους υπόχωρους του A καθώς και την πλήρη λύση του $Ax = b$.

Θα επιτρέψουμε τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στο βήμα k

- εναλλαγή γραμμής k με γραμμή $i > k$ αν το στοιχείο στη θέση (k, k) είναι 0 ενώ στη θέση (i, k) όχι.
- γρ.συνδ. γραμμών για μηδενισμό των στοιχείων κάτω και επάνω από το τους οδηγούς (όπως στην Gauss-Jordan), δηλ. στις θέσεις (i, k) για $i = 1 : k, i = k + 1 : m$
- κανονικοποίηση των οδηγών με διαίρεση κάθε γραμμής με αυτούς και αναγωγή τους στη μονάδα. Αυτό ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό με το διαγώνιο μητρώο με στοιχεία τα αντίστροφα των οδηγών.

Επιπλέον βήματα επί των στηλών - παραλλαγές

- *(πιο επιθετική πολιτική:) μετάθεση στηλών ώστε οι ελεύθερες στήλες να παρατίθενται τελευταίες.*
- *επιθετικότερη:* γρ.συνδ. στηλών για μηδενισμό των «ελεύθερων στηλών».

Παράδειγμα

αναγωγής στην αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 L_1 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, DM_2 L_1 A = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

<u>Για την επιθετική πολιτική για Πλήρη Αναγωγή</u>: Θέτουμε

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (DM_2 L_1 A)Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επίλυση $Ax = 0$

από την αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, R = DM_2L_1A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

Μεταβλητές: ελεύθερες $\{\xi_3, \xi_4\}$ επομένως από το ισοδύναμο σύστημα $Ex = 0$ προκύπτουν

$$\begin{aligned} \xi_1 \quad - \xi_3 - 2\xi_4 &= 0 \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 3\xi_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ενεργώντας όπως πριν για τις ελεύθερες μεταβλητές

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Πλήρης αναγωγή

Θεώρημα

Για κάθε $m \times n$ μητρώο A υπάρχουν αντιστρέψιμα μητρώα P, Q (κατάλληλων διαστάσεων) τέτοια ώστε

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου r είναι η τάξη του A.

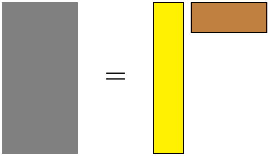
Παραγοντοποίηση τάξης

Παραγοντοποίηση τάξης μητρώου

Κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τάξης $r \le \min\{m, n\}$ μπορεί να εκφραστεί ως $A = BC$ όπου $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Οι παράγοντες B, C δεν είναι μοναδικοί. Ο παράγοντας B (C) δεν μπορεί να έχει λιγότερες από r στήλες (γραμμές).

Κάθε μητρώο τάξης r γράφεται ανάγεται σε $m \times r$ επί $r \times n$. Κατάλληλοι παράγοντες (μη μοναδικοί) μπορούν να υπολογιστούν από την ΑΓΚΜ.

A = (στήλες οδηγών του A) $\times$ (πρώτες r γραμμές του R).



(Σημ.: Δείτε την άσκηση 3.3.33 (σελ. 182) Strang)

Παραγοντοποίηση τάξης

Παράδειγμα

όπως πριν,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

επομένως μια παραγοντοποίηση τάξης είναι $A = BC$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

που επιβεβαιώνει ότι μπορούμε να γράψουμε

$$A = (\text{στήλες οδηγών του } A) \times (\text{πρώτες } r \text{ γραμμές του } R)$$

Παρατηρήσεις επί της ΑΓΚΜ

Έστω ότι έχει τη μορφή

$$R = \begin{pmatrix} I_r & F_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να γράψουμε τη βάση για το μηδενοχώρο $\mathrm{null}(A)$ ως

$$N = \begin{pmatrix} -F_{r,n-r} \\ I_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα παρακάτω $\mathrm{rank}(A) = 1$ και η βάση για το $\mathrm{null}(A)$ είναι

$$\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0$$

$$A = R = [1, 2, 3], \quad N = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πλήρης λύση γενικού συστήματος

Η πλήρης λύση θα έχει τη μορφή

$$\text{ΠΛΗΡΗΣ ΛΥΣΗ} = \boxed{\text{ΜΕΡΙΚΗ ΛΥΣΗ}} + \boxed{\text{ΠΛΗΡΗΣ ΛΥΣΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ}}$$

1. υπολογίζουμε τη (μοναδική) μερική λύση ως προς τις r μη ελεύθερες μεταβλητές (θέτοντας 0 τις ελεύθερες)
2. υπολογίζουμε τις $n-r$ ειδικές λύσεις θέτοντας κάθε φορά 1 μία από τις ελεύθερες μεταβλητές και 0 τις υπόλοιπες.

Πλήρης λύση γενικού συστήματος

$Ax = b$ όπου

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

κλιμακωτή μορφή Παρακολουθούμε τις μεταβολές στα A, b μέσω του επαυξημένου μητρώου

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \beta_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & \beta_3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & 0 & 2 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \beta_3 - \beta_1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & 0 & 2 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta_3 - \beta_1) - \beta_2 \end{array}\right)$$

Προσοχή: Για να υπάρχει λύση (λέμε να είναι συμβατές οι εξισώσεις) πρέπει οπωσδήποτε $\beta_3 - \beta_1 - \beta_2 = 0$. Θεωρούμε ότι τα A, b δίνονται από την εφαρμογή, επομένως δεν τα ελέγχουμε.

Πλήρης λύση γενικού συστήματος

$Ax = b$ όπου

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Παρακολουθούμε τις μεταβολές στα A, b μέσω του επαυξημένου μητρώου

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε κάνει την αναγωγή σε ΑΓΚΜ (τα βήματα παραλείπονται).
Στήλες οδηγοί οι $\{1,3\}$. Ελεύθερες στήλες $\{2,4\}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. υπολογίζουμε τη μερική λύση ως προς τις r μη ελεύθερες μεταβλητές (θέτοντας 0 τις ελεύθερες)
2. υπολογίζουμε τις $n-r$ ειδικές λύσεις (για $b=0$) θέτοντας κάθε φορά 1 μία από τις ελεύθερες μεταβλητές και 0 τις υπόλοιπες.

<u>*Ι.* Υπολογισμός μερικής λύσης:</u> Θέτουμε $\xi_2 = \xi_4 = 0$. Με πίσω αντικατατάσταση $\xi_3 = 6, \xi_1 = 1$.
<u>*ΙΙ.* Υπολογισμός των $2 = n - r$ ειδικών λύσεων:</u>
1η λύση: $\xi_2 = 1, \xi_4 = 0 \Rightarrow \xi_1 = -3, \xi_3 = 0$ και
2η λύση: $\xi_2 = 0, \xi_4 = 1 \Rightarrow \xi_1 = -2, \xi_3 = -4$.
δηλ.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οι 4 βασικοί διανυσματικοί υπόχωροι

που ορίζει κάθε μητρώο

Δίνεται ένα μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τάξης r

	(υπό)χωρος	διάσταση	όνομα
$\mathrm{range}(A)$	του $\mathbb{R}^m$	$r = \mathrm{rank}(A)$	χώρος στηλών
$\mathrm{null}(A)$	του $\mathbb{R}^n$	$n - r$	μηδενόχωρος
$\mathrm{range}(A^\top)$	του $\mathbb{R}^n$	r	χώρος γραμμών
$\mathrm{null}(A^\top)$	του $\mathbb{R}^m$	$m - r$	αριστερός μηδενόχωρος

Θεμελιώδες Θεώρημα Γραμμικής Άλγεβρας I

(κατά Strang:)

1. $\mathrm{rank}(A) = r = \dim(\mathrm{range}(A)) = \dim(\mathrm{range}(A^\top))$
2. $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r, \dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r$

Εύρεση των υπόχωρων μητρώου

Βήμα 1 εύρεση των διαστάσεών τους, άμεσα από την τάξη

Βήμα 2 εύρεση βάσης για κάθε υπόχωρο.

Αν το μητρώο $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών,

βάση για $\mathrm{range}(U)$ οι r στήλες οδηγών του U

βάση για $\mathrm{null}(U)$ οι $n-r$ ειδικές λύσεις του $Ux = 0$.

βάση για $\mathrm{range}(U^\top)$ οι πρώτες r γραμμές του U

βάση για $\mathrm{null}(U^\top)$ $m-r$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του $y^\top U = 0$,

$$\text{δηλ. της μορφής } y = (\overbrace{0,\ldots,0}^{r}, \overbrace{\star,\star,\ldots,\star}^{m-r})^\top.$$

Προσοχή: Αν το μητρώο δεν είναι σε κλιμακωτή μορφή τότε: βάση για το $\mathrm{range}(A)$ είναι οι στήλες οδηγών στο A. Για τη βάση του $\mathrm{null}(A^\top)$ πρέπει να λάβουμε υπόψη το $\hat{L}$ που ανάγει σε κλιμακωτή μορφή. Ειδικότερα, μια βάση του $\mathrm{null}(A^\top)$ θα είναι οι $m-r$ τελευταίες γραμμές του $\hat{L}$.

Εξήγηση: αν $\hat{L}A = U$, και $y \in \mathrm{null}(U^\top)$ τότε $0 = y^\top U = (y^\top \hat{L})A$. Θέτοντας $y_1 = e_{r+1}, \ldots, y_{m-r} = e_m$, μια βάση του $\mathrm{null}(A^\top)$ είναι οι $m-r$ τελευταίες γραμμές του L. (Μπορείτε να αποδείξετε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες;)

Εύρεση των υποχώρων μητρώου από την ΑΓΚΜ

Βήμα 1 εύρεση των διαστάσεών τους, άμεσα από την τάξη
Βήμα 2 εύρεση βάσης για κάθε υπόχωρο.
Έστω ότι $R = \texttt{rref}(A)$ είναι η ΑΓΚΜ του A. Τότε:

βάση για $\mathrm{range}(A)$ οι r στήλες οδηγών του A (όχι του R)

βάση για $\mathrm{null}(A)$ οι $n - r$ ειδικές λύσεις του $Ry = 0$ μέσω της διαδοχικής ανάθεσης τιμών $\{1, 0\}$ στις $n - r$ ελεύθερες μεταβλητές και επίλυση.

βάση για $\mathrm{range}(A^\top)$ οι πρώτες r γραμμές του R (ή οι γραμμές του A που καταλήγουν να αντιστοιχούν σε γραμμές οδηγών)

βάση για $\mathrm{null}(A^\top)$ Αφού $y^\top R = 0$. για $y_1 = e_{r+1}, \ldots, y_{m-r} = e_m$, για βάση του $\mathrm{null}(A^\top)$ πρέπει να λάβουμε υπόψη το $\hat{M}$ που ανάγει σε ΑΓΚΜ. Ειδικότερα, μια βάση του $\mathrm{null}(A^\top)$ θα είναι οι $m - r$ τελευταίες γραμμές του $\hat{M}$ (ανάστροφες).

Παράδειγμα εύρεσης $\mathrm{null}(A^\top)$

Όπως πριν,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ για το οποίο είχαμε υπολογίσει } DM_2L_1A = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως $\hat{M} = DM_2L_1$, και βάση είναι οι τελευταία γραμμή (καθώς $m - r = 3 - 2 = 1$) του $\hat{M}$.
Επομένως αν κάνετε τους υπολογισμούς (πολύ εύκολο)

$$e_3^\top \hat{M} = ((e_3^\top D)M_2)L_1 = (e_3^\top M_2)L_1 = (0, -2, 1) \Rightarrow \mathrm{null}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Παρατήρηση 1: το διαγώνιο D δεν αλλάζει κάτι ουσιαστικό στη βάση και μπορούμε να μην ασχοληθούμε με αυτό.

Παρατήρηση 2: Επειδή υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού (και άπειρες βάσεις), αν δεν μας περιορίζει η εκφώνηση του προβλήματος, επιλέγουμε ό,τι *υπολογίζεται πιο εύκολα*. Για παράδειγμα, αντί για τα παραπάνω, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το $\mathrm{null}(A^\top)$ θέτοντας $B = A^\top$ και στη συνέχεια υπολογίζοντας το $\mathrm{null}(B)$. Επίσης, για το χώρο γραμμών $\mathrm{range}(A^\top)$ αρκεί ο χώρος στηλών του B, κ.λπ.

Σύνοψη σχετικά με την επίλυση του $Ax = b$

Συνοψίζουμε: *τι αποκαλύπτεται σχετικά με τη λύση από τις ισοδύναμες μορφές ενός γραμμικού συστήματος;*

$Ax = b$ (γενική)	δεν αναδεικνύεται αν υπάρχουν λύσεις ούτε φαίνονται οι λύσεις
$Ux = c$ (Κλιμακωτή μ.)	αναδεικνύεται αν υπάρχουν λύσεις δεν φαίνονται, αλλά υπολογίζονται, αναδεικνύεται η τάξη
$Rx = d$ (ΑΓΚΜ)	αναδεικνύεται αν υπάρχουν λύσεις προκύπτουν εύκολα

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης