Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **3** : Διανυσματικοί Χώροι και Υπόχωροι

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Χώροι Διανυσμάτων
- Ο Μηδενόχωρος του A
- Η Τάξη και η Μορφή Αναγμένων Γραμμών
- Η πλήρης λύση της $Ax = b$
- Ανεξαρτησία, Βάση και Διάσταση
- Διάσταση των 4ων υποχώρων

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για ορισμένες χρήσεις μητρώων και διανυσμάτων.

- Στοιχεία άλγεβρας (ομάδες, δακτύλιοι, σώματα)
- Εισαγωγή στους διανυσματικούς χώρους.
- Την έννοια των χώρων και των υπόχωρων και παραδείγματα
- Τους υπόχωρους στηλών και το μηδενόχωρο μητρώου.
- Τους υπόχωρους γραμμών και τον αριστερό μηδενόχωρο
- Τη βάση και διάσταση χώρων και υπόχωρων.

Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Τη λύση του $Ax = 0$.
2. Την κλιμακωτή μορφή μητρώου.
3. Εύρεση βάσης για το μηδενόχωρο.
4. Εύρεση βάσης για το χώρο στηλών.
5. Τις διαστάσεις των 4 δ. υπόχωρων που ορίζονται από το μητρώο.

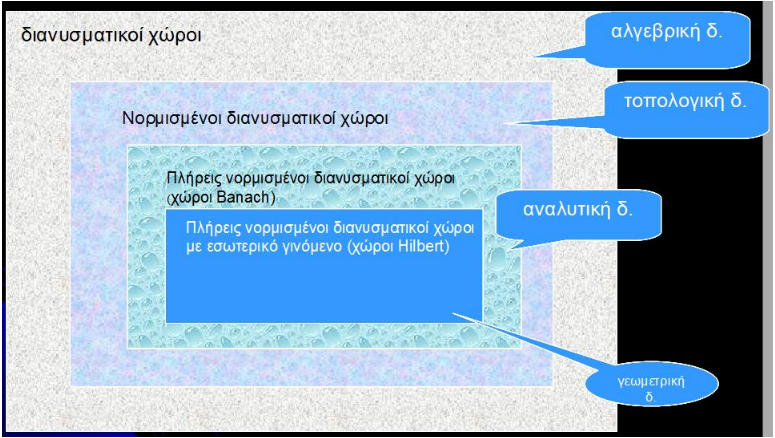
Υπό συζήτηση ενότητες

Νορμισμένος διανυσματικός χώρος

Έτσι ονομάζεται ένας δ.χ. $\mathcal{V}$ στον οποίο ορίζουμε επιπλέον μια νόρμα, δηλαδή μια συνάρτηση που σε κάθε στοιχείον $v \in \mathcal{V}$ αντιστοιχεί ένα πραγματικό μη αρνητικό αριθμό $\|v\|$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

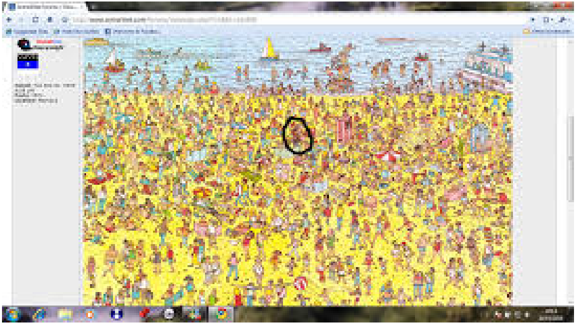
1. $\|v\| \geq 0$ με ισότητα αν και μόνον αν $v = 0$ (θετική ορισιμότητα)
2. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$
3. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$

Μια γεωγραφία των μαθηματικών χώρων



Βρες το Βάση (βρες το Χώρο), Βρες τη/τις Λύσεις

Βρες το Βάση (βρες το Χώρο), Βρες τη/τις Λύσεις



Βάση διανυσματικού χώρου

Ορισμός

Ένα σύνολο διανυσμάτων, X, του δ.χ. $\mathcal{V}$ χαρακτηρίζεται **βάση** του $\mathcal{V}$ ανν

1. $\mathrm{span}(X) = \mathcal{V}$, και
2. Το X είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων

Παράδειγμα Τα $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ (μερικές φορές αποκαλείται τυπική βάση.

Παράδειγμα Τα $\{1, \ldots, \zeta^n\}$ είναι βάση του $\mathbb{P}_n$ (σύνολο πολυωνύμων βαθμού n).

Διάσταση δ.χ.

Θεώρημα

Το πλήθος των διανυσμάτων βάσης ενός δ.χ. καλείται διάσταση του χώρου και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της βάσης.

Για ένα δ.χ. ή υπόχωρο μπορούμε να πούμε ότι

☺ βάσεις υπάρχουν άπειρες, διάσταση μόνο μία ☺

Ορισμός

Αν η βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}(\neq \emptyset)$ έχει n στοιχεία, τότε ο χώρος λέγεται n-**διάστατος** (ή ότι έχει διάσταση n) και γράφουμε $\dim(\mathcal{V}) = n$ ή $\dim\mathcal{V} = n$. Χάριν συνέπειας, και επειδή το μηδενικό διάνυσμα (0) ανήκει σε όλους τους διανυσματικούς χώρους, θέτουμε $\dim(0) = 0$. Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ λέγεται πως είναι **πεπερασμένης διάστασης** αν έχει βάση $n < +\infty$ στοιχείων. Ειδάλλως, ο χώρος $\mathcal{V}$ χαρακτηρίζεται ως απειροδιάστατος.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Στο μάθημα αυτό ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Οι **2** (+2) βασικοί διανυσματικοί υπόχωροι

και οι διαστάσεις τους

Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε

1. ο δ.χ. διάνοιγμα των στηλών ονομάζεται χώρος στηλών του A, συμβ. $\mathrm{range}(A)$
2. ... ισχύει προφανώς $\dim(\mathrm{range}(A)) \leq m$
3. ο δ.χ. διάνοιγμα των γραμμών ονομάζεται ο χώρος γραμμών του A, $\mathrm{range}(A^\top)$
4. ... ισχύει προφανώς $\dim(\mathrm{range}(A^\top)) \leq n$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Η διάσταση $r = \dim(\mathrm{range}(A))$ αποκαλείται **ΤΑΞΗ** του A και συμβολίζεται επίσης ως $\mathrm{rank}(A)$. Είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Ο **ίδιος** αριθμός, r, είναι και ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A.

$$\mathrm{rank}(A) = r = \dim(\mathrm{range}(A)) = \dim(\mathrm{range}(A^\top))$$

Η τάξη αφορά εξίσου γραμμές και στήλες, αποκαλύπτει τα μεγέθη των 4 υποχώρων και εντέλει πόση χρήσιμη πληροφορία περιέχει το μητρώο.

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.
Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.
Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
Εύρεση: Τι σημαίνει *εύρεση υπόχωρου;*

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.
Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
Εύρεση: Τι σημαίνει *εύρεση υπόχωρου;*
Για να ορίσουμε υπόχωρο, αρκεί να βρούμε κάποια βάση του. Ο υπόχωρος θα είναι το διάνοιγμα των διανυσμάτων της βάσης του.

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.
Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
Εύρεση: Τι σημαίνει *εύρεση υπόχωρου;*
Για να ορίσουμε υπόχωρο, αρκεί να βρούμε κάποια βάση του. Ο υπόχωρος θα είναι το διάνοιγμα των διανυσμάτων της βάσης του.
Πρόβλημα: Συνήθως οι βάσεις ΔΕΝ είναι προφανείς απλά παρατηρώντας το A.

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.

Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Εύρεση: Τι σημαίνει *εύρεση υπόχωρου;*

Για να ορίσουμε υπόχωρο, αρκεί να βρούμε κάποια βάση του. Ο υπόχωρος θα είναι το διάνοιγμα των διανυσμάτων της βάσης του.

Πρόβλημα: Συνήθως οι βάσεις ΔΕΝ είναι προφανείς απλά παρατηρώντας το A.

Διαδικασία

1. θα αναγάγουμε τον A σε ισοδύναμη «κλιμακωτή μορφή γραμμών»
2. ... από αυτή προκύπτει άμεσα η διάσταση του υπόχωρου
3. με απλή διαδικασία υπολογίζουμε και μία βάση.
4. και μετά θα κάνουμε μια ακόμα αναγωγή για να έχουμε εύκολη πρόσβαση σε όλες τις βάσεις

Απλό παράδειγμα

- Όλες οι λύσεις του $\xi + 2\psi + \zeta = 0$ είναι ένα επίπεδο, υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Το επίπεδο είναι ο μηδενόχωρος του $A = [1, 2, 1]$. Ισοδύναμα, είναι όλα τα σημεία που είναι κάθετα στην ευθεία που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 2, 1)^\top$.
- Όλες οι λύσεις του

$$\begin{aligned} \xi - \psi + \zeta &= 0 \\ \xi - 2\psi - \zeta &= 0 \end{aligned}$$

  - είναι επί της ευθείας $2\xi - 3\psi = 0$, που περνά από το 0 και είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ (η τομή των επιπέδων που ορίζονται από τα 2 παραπάνω επίπεδα).
  - (ισοδύναμα) είναι στην ευθεία που είναι κάθετη στον υπόχωρο

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

  - (ισοδύναμα) είναι στο μηδενόχωρο $\mathrm{null}(A)$ του $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Κλιμακωτή μορφή

Ένα μητρώο είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών (row echelon form) αν ισχύουν τα εξής:

1. οι μηδενικές γραμμές (αν υπάρχουν) παρατίθενται τελευταίες,
2. το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (οδηγός) κάθε (μη μηδενικής γραμμής) ανήκει σε στήλη που βρίσκεται αριστερότερα από οποιοδήποτε άλλο μη μηδενικό στοιχείο των γραμμών που έπονται,
3. (επομένως) τα στοιχεία στη στήλη κάτω από τον οδηγό είναι 0.
4. Ελεύθερη αποκαλείται κάθε στήλη που δεν περιέχει οδηγό. Ελεύθερες ονομάζονται και οι αντίστοιχες μεταβλητές.

Παράδειγμα: κλιμακωτή μορφή που προέκυψε από ένα μητρώο μεγέθους 6×8.

Οποιοδήποτε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ μπορεί να αναχθεί σε κλιμακωτή μορφή γραμμών

Κλιμακωτή μορφή

Ένα μητρώο είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών (row echelon form) αν ισχύουν τα εξής:

1. οι μηδενικές γραμμές (αν υπάρχουν) παρατίθενται τελευταίες,
2. το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (οδηγός) κάθε (μη μηδενικής γραμμής) ανήκει σε στήλη που βρίσκεται αριστερότερα από οποιοδήποτε άλλο μη μηδενικό στοιχείο των γραμμών που έπονται,
3. (επομένως) τα στοιχεία στη στήλη κάτω από τον οδηγό είναι 0.
4. Ελεύθερη αποκαλείται κάθε στήλη που δεν περιέχει οδηγό. Ελεύθερες ονομάζονται και οι αντίστοιχες μεταβλητές.

Παράδειγμα: κλιμακωτή μορφή που προέκυψε από ένα μητρώο μεγέθους 6×8.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οποιοδήποτε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ μπορεί να αναχθεί σε κλιμακωτή μορφή γραμμών

Κλιμακωτή μορφή και τάξη μητρώου

Αν U είναι η κλιμακωτή μορφή του A, τότε:

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) = \#\ \text{ΟΔΗΓΩΝ}\ (A) = \#\ \text{ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ}\ (U) = \#\ \text{ΣΤΗΛΩΝ ΟΔΗΓΩΝ}}$$

Κλιμακωτή μορφή και τάξη μητρώου

Αν U είναι η κλιμακωτή μορφή του A, τότε:

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) = \#\ \text{ΟΔΗΓΩΝ}\ (A) = \#\ \text{ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ}\ (U) = \#\ \text{ΣΤΗΛΩΝ ΟΔΗΓΩΝ}}$$

Προσοχή Για καθε μητρώο, η κλιμακωτή μορφή γραμμών είναι μοναδική ως προς τη μορφή της (που είναι τα μηδενικά και τα μη μηδενικά). ΔΕΝ είναι μοναδική όσον αφορά στις τιμές.

Κλιμακωτή μορφή και τάξη μητρώου

Αν U είναι η κλιμακωτή μορφή του A, τότε:

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) = \#\ \text{ΟΔΗΓΩΝ}\ (A) = \#\ \text{ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ}\ (U) = \#\ \text{ΣΤΗΛΩΝ ΟΔΗΓΩΝ}}$$

Προσοχή Για καθε μητρώο, η κλιμακωτή μορφή γραμμών είναι μοναδική ως προς τη μορφή της (που είναι τα μηδενικά και τα μη μηδενικά). ΔΕΝ είναι μοναδική όσον αφορά στις τιμές.
Ισοδύναμα μητρώα Αν $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τότε αποκαλούνται ισοδύναμα αν υπάρχουν αντιστρέψιμα P, Q τέτοια ώστε $B = PAQ$. Αν το B είναι κλιμακωτό, λέγεται ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή του A.

Κλιμακωτή μορφή και τάξη μητρώου

Αν U είναι η κλιμακωτή μορφή του A, τότε:

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) = \#\ \text{ΟΔΗΓΩΝ}\ (A) = \#\ \text{ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ}\ (U) = \#\ \text{ΣΤΗΛΩΝ ΟΔΗΓΩΝ}}$$

Προσοχή Για καθε μητρώο, η κλιμακωτή μορφή γραμμών είναι μοναδική ως προς τη μορφή της (που είναι τα μηδενικά και τα μη μηδενικά). ΔΕΝ είναι μοναδική όσον αφορά στις τιμές.

Ισοδύναμα μητρώα Αν $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ τότε αποκαλούνται ισοδύναμα αν υπάρχουν αντιστρέψιμα P, Q τέτοια ώστε $B = PAQ$. Αν το B είναι κλιμακωτό, λέγεται ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή του A.

Ένα μητρώο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς (Gauss και εναλλαγής).

Παράδειγμα I

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Τότε οι μετασχηματισμοί (εύκολοι) οδηγούν σε άνω κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι:

Τάξη: είναι $\mathrm{rank}(A) = 2$ (= πλήθος μη μηδενικών γραμμών = πλήθος οδηγών)

Βάση χώρου στηλών: οι στήλες οδηγών του A.

$$\mathrm{range}(A) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

Βάση μηδενόχωρου: Θα προκύψει από το μητρώο στην κλιμακωτή μορφή. Χρειάζεται όμως λίγη περισσότερη επεξεργασία που δείχνουμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα II

Ζητούμενα Επίλυση του $Ax = 0$ (πέραν του $x = 0$): Εντοπίζουμε τις στήλες οδηγούς και τους αντίστοιχους αγνώστους. Στην περίπτωσή μας είναι οι $\{\xi_1, \xi_4\}$. Οι ελεύθερες στήλες αντιστοιχούν στους $\{\xi_2, \xi_3\}$. Προκύπτουν $r = 2$ εξισώσεις για 4 αγνώστους:

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= 0 \\ \xi_4 &= 0 \end{aligned}$$

Η πλήρης λύση του $Ax = 0$ προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης του μηδενόχωρου $\mathrm{null}(A)$.
Πλήρης λύση του $Ax = 0$: γραμμικός συνδυασμός των ειδικών λύσεων

$$x = \xi_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η πλήρης λύση του $Ax = 0$ προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης του μηδενόχωρου $\mathrm{null}(A)$.

Πλήρης λύση του $Ax = 0$: γραμμικός συνδυασμός των ειδικών λύσεων

$$x = \xi_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ορολογία

- Τα διανύσματα βάσης του $\mathrm{null}(A)$ του λέγονται ειδικές λύσεις.
- Το μητρώο των διανυσμάτων βάσης του $\mathrm{null}(A)$ λέγεται μητρώο μηδενόχωρου.

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 2$

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 2$
Συμπέρασμα 2: $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2 - 2 = 0.$

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

Βήμα 2: Υπολογισμός πλήρους λύσης: Παρατήρηση: Ήδη έχουμε συμπεράνει ότι ο $\mathrm{null}(A)$ επομένως δεν πρέπει να αναμένουμε άλλη λύση του $Ax = 0$ πέραν της τετριμμένης.
ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ: $Ax = 0 \Leftrightarrow (P_2L_1)Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$
Επίλυση $Ux = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2$ οδηγοί, $\{\xi_1, \xi_2\}$, λύνουμε με πίσω αντικατάσταση,

$$\xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = 0,$$

επομένως η μοναδική λύση του $Ax = 0$ είναι η τετριμμένη λύση $x = 0$, επομένως $\dim(\mathrm{null}(A)) = 0$ όπως ήταν αναμενόμενο.

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 1$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 1$
Συμπέρασμα 2: $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2 - 1 = 1$.

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 2: Υπολογισμός πληρους λύσης: $Ax = 0 \Leftrightarrow L_1 Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$

Επίλυση $Ux = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r = 1$ οδηγός, $\{\xi_1\}$, λύνουμε με πίσω αντικατάσταση,

$$\xi_1 = -2\xi_2$$

Θέτουμε $\xi_2 = 1$, οπότε $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, επομένως

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

και η πλήρης λύση του $Ax = 0$ είναι

$$\begin{aligned} x &= \xi_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 2$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 2$
Συμπέρασμα 2: $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 3 - 2 = 1.$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 2: Υπολογισμός πληρους λύσης: $Ax = 0 \Leftrightarrow L_2 L_1 Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$

Επίλυση $Ux = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2$ οδηγοί, $\{\xi_1, \xi_2\}$, λύνουμε με πίσω αντικατάσταση ,τοποθετώντας τον ελεύθερο άγνωστο ξ_3 ως δεξιό μέλος

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 &= -\xi_3 \\ -2\xi_2 &= -\xi_3 \end{aligned}$$

Θέτουμε $\xi_3 = 1$, οπότε $x = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, επομένως

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

και η πλήρης λύση του $Ax = 0$ είναι

$$x = \xi_3 \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi_3 \\ \frac{1}{2}\xi_3 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Προσέξτε ότι $\dim(\mathrm{null}(A)) = 1$ όπως ήταν αναμενόμενο.

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ