Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **3** : Διανυσματικοί Χώροι και Υπόχωροι

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σκοπός Ενότητας

- Χώροι Διανυσμάτων
- Ο Μηδενόχωρος του A
- Η Τάξη και η Μορφή Αναγμένων Γραμμών
- Η πλήρης λύση της $Ax = b$
- Ανεξαρτησία, Βάση και Διάσταση
- Διάσταση των 4ων υποχώρων

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για ορισμένες χρήσεις μητρώων και διανυσμάτων.

- Απαλοιφή Gauss: Χρήση εναλλαγών για την αποφυγή μηδενικών οδηγών (οδήγηση). Στοιχειώδη μητρώα μητρώα εναλλαγής και μητρώα μετάθεσης.
- Παρουσίαση της διαδικασίας απαλοιφής Gauss ως μετασχηματισμό του $[A, b]$ σε $[U, \hat{b}]$ με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με ς.μ. Gauss και εναλλαγής.
- Παραγοντοποίηση LU και επίλυση συστήματος.
- Εφαρμογή: Εύρεση πολυωνύμου (συντελεστών της δυναμομορφής) με βάση τις τιμές του (παρεμβολή).
- Μέθοδος Gauss-Jordan για αντιστροφή μητρώου.

Σήμερα θα συζητήσουμε ή/και θα εισαγάγουμε:

1. Στοιχεία άλγεβρας και εισαγωγή στους διανυσματικούς χώρους.
2. Την έννοια των χώρων και των υπόχωρων και παραδείγματα
3. Τους υπόχωρους στηλών και το μηδενόχωρο μητρώου.
4. Τους υπόχωρους γραμμών και τον αριστερό μηδενόχωρο
5. Τη βάση και διάσταση χώρων και υπόχωρων.

Υπό συζήτηση ενότητες

Exploiting Similarities among Languages for Machine Translation

Tomas Mikolov
Google Inc.
Mountain View
tmikolov@google.com

Quoc V. Le
Google Inc.
Mountain View
qvl@google.com

Ilya Sutskever
Google Inc.
Mountain View
ilyasu@google.com

arXiv:1309.4168v1 [cs.CL] 17 Sep 2013

Abstract

Dictionaries and phrase tables are the basis of modern statistical machine translation systems. This paper develops a method that can automate the process of generating and extending dictionaries and phrase tables. Our method can translate missing word and phrase entries by learning language structures based on large monolingual data and mapping between languages from small bilingual data. It uses distributed representation of words and learns a linear mapping between vector spaces of languages. Despite its simplicity, our method is surprisingly effective: we can achieve almost 90% precision@5 for translation of words between English and Spanish. This method makes little assumption about the languages, so it can be used to extend and refine dictionaries and translation tables for any

Our study found that it is possible to infer missing dictionary entries using distributed representations of words and phrases. We achieve this by learning a linear projection between vector spaces that represent each language. The method consists of two simple steps. First, we build monolingual models of languages using large amounts of text. Next, we use a small bilingual dictionary to learn a linear projection between the languages. At the test time, we can translate any word that has been seen in the monolingual corpora by projecting its vector representation from the source language space to the target language space. Once we obtain the vector in the target language space, we output the most similar word vector as the translation.

The representations of languages are learned using the distributed Skip-gram or Continuous Bag-of-Words (CBOW) models recently proposed

Ομάδα (Group)

Ομάδα είναι ένα σύνολο $\mathbb{F}$ μαζί με μία πράξη $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ έτσι ώστε

(A1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

(A2) υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in \mathbb{F}$ τ.ώ. $\alpha + 0 = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$.

(A3) για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$, υπάρχει ένα στοιχείο $(-\alpha) \in \mathbb{F}$ τ.ώ. $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Αν επίσης ισχύει και ότι

(A4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

τότε είναι Αβελιανή Ομάδα.

Είναι εντυπωσιακο πόσα πολλά μπορούν να ειπωθούν και τί θεωρίες θεμελιώνονται με βάση μόνον με αυτές τις ιδιότητες.

Δακτύλιος (Ring)

Δακτύλιος είναι ένα σύνολο $\mathbb{D}$ μαζί με δύο πράξεις $+, \cdot$ έτσι ώστε:

1. το $\mathbb{D}$ μαζί την $+$ σχηματίζει αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το 0.
2. η πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική, $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ για κάθε α, β, $\gamma \in \mathbb{D}$.
3. η πράξη $\cdot$ είναι επιμεριστική ως προς την $+$, δηλ. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{D}$.
4. υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $1 \in \mathbb{D}$ τ.ώ. $\alpha \cdot 1 = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{D}$.
5. Αν ισχύει $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, ο δακτύλιος καλείται αντιμεταθετικός δακτύλιος.

Παραδείγματα Τα σύνολα των ακεραίων, ρητών, πραγματικών, μιγαδικών, με τους συνήθεις κανόνες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Σώμα (Field)

Σώμα είναι ένα σύνολο $\mathbb{F}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+, \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω Αξιώματα:

(A1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

(A2) υπάρχει στοιχείο $0 \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\alpha + 0 = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$.

(A3) για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$, υπάρχει στοιχείο $(-\alpha) \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\alpha + (-\alpha) = 0$.

(A4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M1) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

(M2) υπάρχει στοιχείο $1 \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\alpha \cdot 1 = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$.

(M3) για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, υπάρχει στοιχείο $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

(M4) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(Δ) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

Τα Αξιώματα (A1)–(A3) δηλώνουν ότι το $(\mathbb{F}, +)$ είναι ομάδα, ενώ αν ισχύει και το (A4), τότε η ομάδα είναι αβελιανή. Τα αξιώματα (M1)–(M4) δηλώνουν ότι το $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Παραδείγματα

- Τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ με τη συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό είναι σώματα.
- Οι ρητές συναρτήσεις ως προς την απροσδιόριστη μεταβλητή x

$$\left\{ \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_p x^p}{\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_q x^q} \ : \ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \ ; \ p, q \in \mathbf{Z}^+ \right\}$$

  όπου $\mathbf{Z}^+ = \{0,1,2,\ldots\}$, είναι σώμα.
- Το σύνολο $\mathbb{R}^{m\times n}$ δεν είναι σώμα: η αξιωματική ιδιότητα (M1) δεν ισχύει εκτός αν $m = n$. Ακόμα και τότε δεν είναι σώμα γιατί, γενικά, δεν ισχύει η ιδιότητα (M4) (παρότι ισχύουν τα υπόλοιπα 8 αξιώματα).
- Αν και τα σώματα που αναφέραμε έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων, σε πολλές περιπτώσεις ενδιαφέρουν και τα «πεπερασμένα σώματα» (finite fields). Το «εξωτικό» όνομα μην σας παραπλανά καθώς έχουν σημαντικές εφαρμογές, π.χ. στην κρυπτογραφία.
- Μία περίπτωση σώματος με 2 μόνο στοιχεία είναι το (Σώμα Galois) $\mathrm{GF}(2)$ με στοιχεία $\{0, 1\}$ και τους κανόνες δυαδικής αριθμητικής για $+, \cdot$.

Διανυσματικός χώρος

Αυτή η ενότητα πηγαίνει στην καρδιά της Γραμμικής Άλγεβρας (Strang)

Ονομάζεται διανυσματικός χώρος (ενίοτε και γραμμικός χώρος) επί του σώματος $\mathbb{F}$ ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{V}$ μαζί με δυο πράξεις $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ και $\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ τέτοια ώστε

(V1) το $(\mathcal{V}, +)$ είναι Αβελιανή ομάδα.

(V2) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ και για κάθε $v \in \mathcal{V}$.

(V3) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ και για κάθε $v \in \mathcal{V}$.

(V4) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$ και για κάθε $v, w \in \mathcal{V}$.

(V5) $1 \cdot v = v$ για κάθε $v \in \mathcal{V}$ $(1 \in \mathbb{F})$.

Ένας διανυσματικός χώρος συμβολίζεται με $(\mathcal{V}, \mathbb{F})$ ή απλά $\mathcal{V}$, εφόσον δεν υπάρχει θέμα σύγχυσης ως προς το υποκείμενο σώμα.

Προσοχή: Με τον αφαιρετικό αυτό ορισμό «απελευθερωνόμαστε» από την αντιστοίχιση των διανυσμάτων με n-πλειάδες αριθμών (π.χ. στοιχεία του $\mathbb{R}^n$). Οποιοδήποτε σύνολο $\mathcal{V}$ και σώμα $\mathbb{F}$ που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες αποτελεί διανυσματικό χώρο, τα στοιχεία του $\mathcal{V}$ διανύσματα και τα στοιχεία του $\mathbb{F}$ βαθμωτοί. Προς επίρρωση αυτού, σημειώστε ότι οι δ.χ. αποκαλούνται και γραμμικοί χώροι.

Παραδείγματα (Strang)

$\mathbb{R}^n$	Ο χώρος όλων των διανυσμάτων (στηλών) με n πραγματικές συνιστώσες. Ο $\mathbb{C}^n$ ορίζεται αντίστοιχα.
$\mathcal{M}$	Ο δ.χ. $\{A \| A \in \mathbb{R}^{m\times n}\}$ όλων των πραγματικών μητρώων $m \times n$.
$\mathcal{F}$	Ο δ.χ. όλων των πραγματικών συναρτήσεων $\{f \| f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{Z}$	Ο δ.χ. που απαρτίζεται μόνον από το μηδενικό διάνυσμα.
$\mathcal{C}[\alpha,\beta]$	Ο δ.χ. όλων των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[\alpha,\beta]$: $\{f \| f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}\}$.

Άλλα παραδείγματα και συμβολισμοι:

- $\mathbb{P}$: Ο δ.χ. των πολυωνύμων.
- $\mathbb{P}_n$: Ο δ.χ. των πραγματικών (ή μιγαδικών) πολυωνύμων βαθμού έως n.
- ℓ_2: Ο δ.χ. των ακολουθιών $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ τέτοιων ώστε $\sum_j^\infty |\xi_j|^2 < \infty$ όπου η άθροιση και ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό ορίζονται με τον προφανή τρόπο.
- ο δ.χ. όλων των λύσεων $u(t)$ της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2}{dt^2}u(t) + u(t) = 0$.
- Ο δ.χ. $\{U|U \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ όλων των πραγματικών άνω τριγωνικών μητρώων.
- ο δ.χ. των λύσεων του συστήματος $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- ο δ.χ. των διανυσμάτων $\{Ax | A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n\}$.
- ΠΡΟΣΟΧΗ το σύνολο των διανυσμάτων $\{x|Ax = b\}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ δ.χ.

Διανυσματικοί υπόχωροι

Διανυσματικός υπόχωρος

Αν κάποιο $\mathcal{V}$ είναι δ.χ. επί σώματος $\mathbb{K}$ και $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{W} \neq \emptyset$. Τότε το $\mathcal{W}$ ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{V}$ αν και μόνον αν το $\mathcal{W}$ είναι διανυσματικός χώρος, ή, ισοδύναμα, αν και μόνον αν $(\alpha w_1 + \beta w_2) \in \mathcal{W}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ και για κάθε $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$.

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός για τον υπόχωρο αναδεικνύει έναν εύκολο τρόπο να ελέγξουμε κατά πόσον ένα σύνολο είναι υπόχωρος (ή διανυσματικός υπόχωρος)· απλά επαληθεύουμε ότι το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Παρατηρήστε επίσης ότι $0 \in \mathbb{K}$, επομένως κάθε υπόχωρος πρέπει να περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Όταν λέμε ένα σύνολο κλειστό ως προς κάποια πράξη εννοούμε ότι όταν εκτελείται η πράξη που αφορά σε στοιχεία από το σύνολο, το αποτέλεσμα ανήκει στο σύνολο.
Παρατήρηση: Για να αποδείξουμε την ισότητα δύο υπόχωρων, συνήθως αποδεικνύουμε ξεχωριστά τις δύο σχέσεις έγκλεισης: Δείχνουμε ότι τυχαίο $r \in \mathcal{R}$ ανήκει και στο $\mathcal{S}$ και ότι τυχαίο $s \in \mathcal{S}$ ανήκει στο $\mathcal{R}$.

Παραδείγματα (Strang)

Οι δυνατοί δ.υ. του $\mathbb{R}^3$ είναι:

$\mathcal{L}$ οποιαδήποτε ευθεία διερχόμενη από το $(0,0,0)$
$\mathcal{P}$ οποιοδήποτε επίπεδο διερχόμενο από το $(0,0,0)$
$\mathbb{R}^3$ όλος ο $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{Z}$ μόνο το διάνυσμα $(0,0,0)$ (τετριμμένος)

όμως:

- Όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ με μη αρνητικές τιμές (δηλ. το πρώτο $n-$υπεροκτημόριο) δεν αποτελούν δ.υ.
- Όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ με τουλάχιστον ένα στοιχείο 0 δεν συνιστούν δ.υ.
- ΠΡΟΣΟΧΗ Το $\mathbb{R}^2$ ΔΕΝ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Τα διανύσματα του ενός δεν μπορούν καν να συνδυαστούν σε πράξεις δ.χ. με τα διανύσματα του άλλου.

"O day and night, but this is wondrous strange"

FLATLAND

A ROMANCE OF MANY DIMENSIONS

No Dimensions
POINTLAND

One Dimension
LINELAND

By A Square

(Edwin A. Abbott)

Two Dimensions
FLATLAND

Three Dimensions
SPACELAND

"And therefore as a stranger give it welcome."

BASIL BLACKWELL · OXFORD

Price Seven Shillings and Sixpence net

Χώρος στηλών μητρώου

Ορισμός

Για κάθε $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών

$$\{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \xi_j \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποκαλείται χώρος στηλών του A. Ο υπόχωρος συμβολίζεται $\mathrm{range}(A)$.

Χώρος στηλών μητρώου

Ορισμός

Για κάθε $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών

$$\{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \xi_j \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποκαλείται χώρος στηλών του A. Ο υπόχωρος συμβολίζεται $\mathrm{range}(A)$.

Γιατί είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$;

Χώρος στηλών μητρώου

Ορισμός

Για κάθε $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών

$$\{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \xi_j \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποκαλείται χώρος στηλών του A. Ο υπόχωρος συμβολίζεται $\mathrm{range}(A)$.

Προσέξτε ότι $\mathrm{range}(A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$.

Χώρος στηλών μητρώου

Ορισμός

Για κάθε $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών

$$\{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \xi_j \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποκαλείται χώρος στηλών του A. Ο υπόχωρος συμβολίζεται $\mathrm{range}(A)$.

Προσέξτε ότι $\mathrm{range}(A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$.

Το σύστημα $Ax = b$ **έχει λύση ανν** $b \in \mathrm{range}(A)$.

Μηδενόχωρος μητρώου

Ορισμός

Ο μηδενόχωρος $\mathrm{null}(A)$ ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{null}(A) = \{x | Ax = 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Μηδενόχωρος μητρώου

Ορισμός

Ο μηδενόχωρος $\mathrm{null}(A)$ ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{null}(A) = \{x | Ax = 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Γιατί είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$; (ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ)

Μηδενόχωρος μητρώου

Ορισμός

Ο μηδενόχωρος $\mathrm{null}(A)$ ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{null}(A) = \{x | Ax = 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Οι άλλοι 2 υπόχωροι:

Χώρος γραμμών: $\mathrm{range}(A^\top) = \{A^\top y | y \in \mathbb{R}^m\}$, (υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.)

Αριστερός μηδενόχωρος: $\mathrm{null}(A^\top) = \{y | A^\top y = 0, y \in \mathbb{R}^m\}$, (υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.)

Θεμελιώδη προβλήματα γραμμικών συνδυασμών και διατύπωσή τους μέσω υποχώρων

Δίνεται μια συλλογή διανυσμάτων $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ όπου $a_j \in \mathcal{V}$. Θέτουμε $A = (a_1, \ldots, a_n)$ και διατυπώνουμε τα προβλήματς εναλλακτικά:

Άμεσο πρόβλημα Αν γνωρίζουμε τους βαθμωτούς $\xi_1, \ldots, \xi_n$ να υπολογίσουμε το γραμμικό συνδυασμό $\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j$.

ισοδύναμα να βρείτε το στοιχείο $b \in \mathrm{range}(A)$ ώστε $b = Ax$ όπου $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας Κατά πόσον υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_n$, όχι όλα μηδενικά, τ.ώ. $\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = 0$.

ισοδύναμα να βρείτε αν υπάρχει μη μηδενικό $x \in \mathrm{null}(A)$.

Αντίστροφο πρόβλημα Δοθέντος ενός διανύσματος b, μπορούμε να το γράψουμε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων του $\mathcal{A}$;

ίσοδύναμα αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = b$.

Ταυτοποίηση διανοίγματος Ποιό είναι το διάνοιγμα $\mathcal{Y} := \{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \alpha_j \in \mathbb{R}\}$.

ίσοδύναμα ποιός είναι ο $\mathrm{range}(A)$;

Βάση διανυσματικού χώρου

Ορισμός

Ένα σύνολο διανυσμάτων, X, του δ.χ. $\mathcal{V}$ χαρακτηρίζεται βάση του $\mathcal{V}$ ανν

1. $\mathrm{span}(X) = \mathcal{V}$, και
2. Το X είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων

Παράδειγμα Τα $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ (μερικές φορές αποκαλείται τυπική βάση.

Παράδειγμα Τα $\{1, \ldots, \zeta^n\}$ είναι βάση του $\mathbb{P}_n$ (σύνολο πολυωνύμων βαθμού n).

Διάσταση δ.χ.

Θεώρημα

Το πλήθος των διανυσμάτων βάσης ενός δ.χ. καλείται διάσταση του χώρου και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της βάσης.

Για ένα δ.χ. ή υπόχωρο μπορούμε να πούμε ότι

☺ βάσεις υπάρχουν άπειρες, διάσταση μόνο μία ☺

Ορισμός

Αν η βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}(\neq \emptyset)$ έχει n στοιχεία, τότε ο χώρος λέγεται n-**διάστατος** (ή ότι έχει διάσταση n) και γράφουμε $\dim(\mathcal{V}) = n$ ή $\dim \mathcal{V} = n$. Χάριν συνέπειας, και επειδή το μηδενικό διάνυσμα (0) ανήκει σε όλους τους διανυσματικούς χώρους, θέτουμε $\text{dim}(0) = 0$. Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ λέγεται πως είναι **πεπερασμένης διάστασης** αν έχει βάση $n < +\infty$ στοιχείων. Ειδάλλως, ο χώρος $\mathcal{V}$ χαρακτηρίζεται ως απειροδιάστατος.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Στο μάθημα αυτό ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Χρήση Έργου Τρίτων I

1. http://arxiv.org/pdf/1309.4168.pdf (βλ. σελ 7)
2. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/51/Flatland_cover.jpg (βλ. σελ 16)

Σημείωμα Αναφοράς

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ