Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **2** : Επίλυση Γραμμικών Εξισώσεων

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Διανύσματα και Γραμμικές Εξισώσεις
- Έννοια της απαλοιφής
- Αντίστροφοι
- Απαλοιφή Χρησιμοποιώντας Μητρώα - Απαλοιφή Gauss
- Απαλοιφή και Παραγοντοποίηση $A = LU$
- Μητρώα Μετάθεσης

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για ορισμένες χρήσεις μητρώων και διανυσμάτων.

- κόστη βασικών πράξεων με μητρώα,
- αντίστροφο μητρώου, ιδιότητες και το ζήτημα του υπολογισμού του,
- ορθογώνια και ορθομοναδιαία μητρώα,
- επίλυση γραμμικών εξισώσεων (εισαγωγή).
- ερμηνεία κατά γραμμές, ερμηνεία κατά στήλες, θέματα ύπαρξης και μοναδικότητας

Σήμερα θα παρουσιάσουμε:

- περιπτώσεις εύκολης αντιστροφής ή διάγνωσης για μη αντιστρεψιμότητα,
- σχετικά με την (μη χρήση) του αντιστρόφου στην πράξη,
- «πίσω (και εμπρός) αντικατάσταση» για την επίλυση άνω (και κάτω) τριγωνικών συστημάτων.
- την απαλοιφή Gauss για την επίλυση γενικών τετραγωνικών γραμμικών συστημάτων.

Υπό συζήτηση ενότητες

Τύπος αντιστρόφου

Strang, σελ. 90

Αντίστροφος μητρώου 2×2:

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Επομένως το μητρώο είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Όπως θα μάθουμε, αυτή είναι η ορίζουσα του A.
Προσοχή: Αυτή είναι από τις λίγες περιπτώσεις που το αντίστροφο μητρώο υπολογίζεται εύκολα.
ΠΡΟΣΟΧΗ (1): Σχεδόν ποτέ δεν χρησιμοποιούμε αντιστροφή για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα.
ΠΡΟΣΟΧΗ (2): Ο υπολογισμός του αντιστρόφου χρειάζεται πολύ πιο σπάνια από το να λύσουμε γραμμικά συστήματα.

Περιπτώσεις που το αντίστροφο είναι εύκολο να βρεθεί ή να δειχτεί ότι δεν είναι αντιστρέψιμο

- διαγώνιο μητρώο
- στοιχειώδης μετασχηματισμός Gauss
    - ορθογώνιο
        - 2×2
- κατά πλοκάδες διαγώνιο αν γνωρίζουμε τα αντίστροφα των πλοκάδων

Δεν υπάρχει

- μηδενικό μητρώο
- σταθερό μητρώο
- διαγώνιο ή τριγωνικό με κάποιο διαγώνιο στοιχείο 0
- μητρώο με γραμμικά εξαρτημένες στήλες ή γραμμές
- 2×2 με μηδενική ορίζουσα
- κατά πλοκάδες διαγώνιο ή τριγωνικό αν κάποια διαγώνια πλοκάδα είναι μη αντιστρέψιμη
- γινόμενο μητρώων από τα οποία ένα μη αντιστρέψιμο

Αντίστροφο κατά πλοκάδες κάτω τριγωνικού μητρώου

Αναζητούμε το αντίστροφο του $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ Επειδή θα είναι και αυτό κατά πλοκάδες κάτω τριγωνικό (αν υπάρχει), το γράφουμε στη μορφή (με τις σωστές διαστάσεις) $N = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}$

Θα πρέπει να ικανοποιεί $MN = I$ δηλ.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

άρα

$$\begin{aligned} A\hat{A} &= I \Rightarrow \hat{A} = A^{-1} \\ D\hat{D} &= I \Rightarrow \hat{D} = D^{-1} \\ C\hat{A} + D\hat{C} &= 0 \Rightarrow \hat{C} = -D^{-1}CA^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Αν το A είναι αντιστρέψιμο,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix}$$

π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ - Εμπεδώστε ότι:

- Ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι συνήθως πολύ πιο ακριβός σε πράξεις από την λύση ενός γραμμικού συστήματος

ΠΡΟΣΟΧΗ - Εμπεδώστε ότι:

- Ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι συνήθως πολύ πιο ακριβός σε πράξεις από την λύση ενός γραμμικού συστήματος
- η αντιστροφή συνήθως υλοποιείται με επίλυση γραμμικών συστημάτων ισάριθμων με το μέγεθος του μητρώου,

ΠΡΟΣΟΧΗ - Εμπεδώστε ότι:

- Ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι συνήθως πολύ πιο ακριβός σε πράξεις από την λύση ενός γραμμικού συστήματος
- η αντιστροφή συνήθως υλοποιείται με επίλυση γραμμικών συστημάτων ισάριθμων με το μέγεθος του μητρώου,
- σχεδόν ποτέ δεν χρησιμοποιούμε αντιστροφή για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα,

ΠΡΟΣΟΧΗ - Εμπεδώστε ότι:

- Ο υπολογισμός του αντιστρόφου είναι συνήθως πολύ πιο ακριβός σε πράξεις από την λύση ενός γραμμικού συστήματος
- η αντιστροφή συνήθως υλοποιείται με επίλυση γραμμικών συστημάτων ισάριθμων με το μέγεθος του μητρώου,
- σχεδόν ποτέ δεν χρησιμοποιούμε αντιστροφή για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα,
- ακόμα και όταν γράφουμε $A^{-1}b$, συνήθως εννοούμε την εύρεση του x ώστε $Ax = b$.

Απαλοιφή Gauss

Βασική ιδέα: Μετατροπή του αρχικού προβλήματος σε ένα πιο εύκολο

$$Ax = b \Rightarrow Ux = \hat{b}$$

όπου το U είναι άνω τριγωνικό

$$U = \begin{pmatrix} \upsilon_{11} & \upsilon_{12} & & \upsilon_{1n} \\ & \upsilon_{22} & & \\ & \vdots & \ddots & \upsilon_{n-1,n} \\ & & & \upsilon_{n,n} \end{pmatrix}$$

και συνδέεται με έναν σχετικά απλό τρόπο με το αρχικό A.

Γιατί να το κάνουμε αυτό;

Η λύση με το U υπολογίζεται εύκολα ($\xi_n \to \xi_{n-1} \to \cdots \to \xi_1$)
Πίσω αντικατάσταση Ένα απλό παράδειγμα: Έστω

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ζητούμενο } x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}$$

Βήμα 1: Επίλυση της n-στής εξίσωσης ως προς ξ_n ($n = 4$):

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \boxed{\xi_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\xi_4 = -1} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \boxed{\xi_3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Επίλυση της 3ης εξίσωσης ως προς ξ_3:

$$\overbrace{2}^{\upsilon_{33}}\xi_3 + \overbrace{\frac{2}{3}}^{\upsilon_{34}}\overbrace{(-1)}^{\xi_4} = \frac{10}{3} \Rightarrow \boxed{\xi_3 = 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \boxed{\xi_2} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Επίλυση της 2ης εξίσωσης ως προς ξ_2:

$$\overbrace{2}^{\upsilon_{22}}\xi_2 + \overbrace{\frac{4}{3}}^{\upsilon_{23}}\overbrace{2}^{\xi_3} + \overbrace{\frac{2}{3}}^{\upsilon_{24}}\overbrace{(-1)}^{\xi_4} = 2 \Rightarrow \boxed{\xi_2 = 0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\xi_1} \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 4: Επίλυση της 1ης εξίσωσης ως προς ξ_1:

$$\overbrace{2}^{\upsilon_{11}}\,\xi_1 + \overbrace{\frac{4}{3}}^{\upsilon_{12}}\,\overbrace{0}^{\xi_2} + \overbrace{\frac{2}{3}}^{\upsilon_{13}}\,\overbrace{2}^{\xi_3} + \overbrace{0}^{\upsilon_{14}}\,\overbrace{(-1)}^{\xi_4} = 2 \Rightarrow \boxed{\xi_1 = \frac{1}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Επίλυση τριγωνικών συστημάτων

- Είδαμε ότι η επίλυση $Ux = b$ είναι «εύκολη».
- Πόσο στοιχίζει;

Επίλυση τριγωνικών συστημάτων

- Είδαμε ότι η επίλυση $Ux = b$ είναι «εύκολη».
- Πόσο στοιχίζει; $\Omega = n^2$ (να το επαληθεύσετε!)
- Τι γίνεται αν θέλαμε να λύσουμε κάτω τριγωνικό $Lx = b$;

Επίλυση τριγωνικών συστημάτων

- Είδαμε ότι η επίλυση $Ux = b$ είναι «εύκολη».
- Πόσο στοιχίζει; $\Omega = n^2$ (να το επαληθεύσετε!)
- Τι γίνεται αν θέλαμε να λύσουμε κάτω τριγωνικό $Lx = b$; εμπρός αντικατάσταση (ίδια ιδέα)

Προτείνουμε: να δοκιμάσετε να λύσετε μερικά μικρά κάτω τριγωνικά και άνω τριγωνικά συστήματα ...

Επίλυση με αναγωγή σε άνω τριγωνική μορφή $Ux = \hat{b}$

ΕΡΩΤΗΜΑ Πώς πετυχαίνουμε την αναγωγή του A στη μορφή U;
Κάτι σαν

$$MA = U \Rightarrow M(Ax) = Mb \Rightarrow \underbrace{(MA)}_{U} x = \underbrace{Mb}_{\hat{b}}$$

Θα παρουσιάσουμε μία μέθοδο βαθμιαίας μετατροπής του μητρώου A σε άνω τριγωνικό.

Αρχικοποίηση $A^{(0)} = A$
for $k = 1, \ldots, n-1$ **do**
Μηδενισμός τιμών κάτω από την διαγώνιο της στήλης k του τρέχοντος μητρώου $A^{(k)}$
Αντίστοιχος μετασχηματισμός του δεξιού διανύσματος
end for

Ό,τι αλλαγές χρειάζονται μπορούν να επιτευχθούν αποκλειστικά με πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά με ειδικά *στοιχειώδη μητρώα*.

Δύο βασικά στοιχειώδη μητρώα:

(1) Μητρώο Gauss L_k μηδενίζει το διάνυσμα στις θέσεις κάτω από τη γραμμή k:

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $x = [4, 3, 2, 1]^\top$. Τότε

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{3}{4} & 1 & & \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_3 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Δύο βασικά στοιχειώδη μητρώα:

(2) Μητρώο εναλλαγής $P_{k,j}$ Εναλλάσσει τις γραμμές k και j του διανύσματος που πολλαπλασιάζει (θεωρούμε ότι $k < j$)

Παράδειγμα Έστω $x = [1, 2, 3, 4]^\top$. Τότε

$$P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{1,2}x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, P_{1,3}x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, P_{1,4}x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{2,3}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, P_{2,4}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, P_{3,4}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 b = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 b = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{7} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2(L_1 b) = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{12}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}, L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{20}{7} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 b = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{7} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2(L_1 b) = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{12}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}, L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{20}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3(L_2(L_1 b)) = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{12}{7} \\ 0 \end{pmatrix}, L_3(L_2(L_1 A)) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Επίλυση με απαλοιφή Gauss

Αναγωγή σε άνω τριγωνικό $Ax = b \Leftrightarrow L_3L_2L_1Ax = L_3L_2L_1b \Leftrightarrow Ux = \hat{b}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{12}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Πίσω αντικατάσταση

Βήμα 1: $\frac{5}{3}\xi_4 = 0 \Rightarrow \xi_4 = 0,$

Βήμα 2: $\frac{12}{7}\xi_3 = \frac{12}{7} - \frac{10}{7}\overbrace{0}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_3 = 1,$

Βήμα 3: $\frac{7}{4}\xi_2 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\overbrace{1}^{\xi_3} - \frac{5}{4}\overbrace{0}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_2 = -1,$

Βήμα 4: $4\xi_1 = 3 - 3\overbrace{(-1)}^{\xi_2} - 2\overbrace{1}^{\xi_3} - 1\overbrace{0}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_1 = 1.$

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδες μητρώο Gauss

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_k \\ \xi_{k+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \Rightarrow L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & -\xi_{k+1}/\xi_k & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & -\xi_{k+2}/\xi_k & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\xi_n/\xi_k & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Μητρώο Gauss L_k μηδενίζει το διάνυσμα στις θέσεις κάτω από τη γραμμή k:

Παράδειγμα Έστω $x = [4, 3, 2, 1]^\top$. Τότε

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{3}{4} & 1 & & \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_3 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Σχόλια

- Πολλαπλασιάζοντας με στ.μ. Gauss επιτυγχάνουμε σταδιακά την αναγωγή του A σε άνω τριγωνική μορφή.
- Όποτε χρειάζεται, αρχίζοντας από το $A^{(0)} = A$, θα ονομάζουμε $A^{(k)}, k = 1, ..., n-1$ το μητρώο που έχει προκύψει μετά από k βήματα της διαδικασίας.
- Θα ονομάζουμε τα στοιχείο με τα οποίο επιχειρούμε το μηδενισμό οδηγούς (pivots).
- Στα παραπάνω, οι οδηγοί είναι τα στοιχεία $\alpha_{1,1}^{(0)}, \alpha_{2,2}^{(1)}, \cdots, \alpha_{n-1,n-1}^{(n-2,n-2)}$.

ΘΕΜΑ Αν παρουσιαστεί μηδενικός οδηγός;

Περίπτωση 1: Να μπορούμε να παρακάμψουμε το πρόβλημα

Περίπτωση 2: Το μητρώο δεν είναι αντιστρέψιμο (δεν υπάρχει λύση ή υπάρχουν άπειρες λύσεις)

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης