ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **2** : Επίλυση Γραμμικών Εξισώσεων

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Διανύσματα και Γραμμικές Εξισώσεις
- Έννοια της απαλοιφής
- Αντίστροφοι
- Απαλοιφή Χρησιμοποιώντας Μητρώα - Απαλοιφή Gauss
- Απαλοιφή και Παραγοντοποίηση $A = LU$
- Μητρώα Μετάθεσης

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για ορισμένες χρήσεις μητρώων και διανυσμάτων.

- Ανάκτηση πληροφορίας από διάνυσμα.
- Ανάκτηση πληροφορίας από μητρώο.
- το πρόβλημα του υπολογισμού τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης και μητρώα Vandermonde
- μητρώα και γραφήματα
- μέτρηση διαδρομών με δυνάμεις και δυναμοσειρές μητρώων.

Σήμερα θα συζητήσουμε τα εξής:

- κόστη βασικών πράξεων με μητρώα,
- αντίστροφο μητρώου, ιδιότητες και το ζήτημα του υπολογισμού του,
- ορθογώνια και ορθομοναδιαία μητρώα,
- επίλυση γραμμικών εξισώσεων (εισαγωγή).

Υπό συζήτηση ενότητες

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$
<u>Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:</u>

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $p \in \mathbb{R}^{m}$, $q \in \mathbb{R}^{m}$, $w \in \mathbb{R}^{n}$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $p \in \mathbb{R}^{m}$, $q \in \mathbb{R}^{m}$, $w \in \mathbb{R}^{n}$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n-1)$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n - 1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n-1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$; $\Omega = mn$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n - 1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$; $\Omega = mn$
- το γινόμενο μητρώων AB;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n - 1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$; $\Omega = mn$
- το γινόμενο μητρώων AB; $\Omega = (2k - 1)mn$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$
Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n - 1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$; $\Omega = mn$
- το γινόμενο μητρώων AB; $\Omega = (2k - 1)mn$

Ταυτοτικά μητρώα (υπενθύμιση)

Είδαμε ότι για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ υπάρχει το μηδενικό μητρώο

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Ταυτοτικό ως προς την πρόσθεση μητρώων

Ορίζουμε και το ταυτοτικό μητρώο $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A\,I = I\,A = A$$

Ταυτοτικό ως προς τον πολλαπλασιασμό μητρώων

Ερώτημα Υπάρχει αντίστροφο μητρώο;

$$A\boxed{;} = \boxed{;}A = I$$

Αν υπήρχε ...

πώς θα το γράφαμε; Μάλλον A^{-1}
πώς θα έμοιαζε;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Αν υπήρχε ...

<u>πώς θα το γράφαμε;</u> Μάλλον A^{-1}
<u>πώς θα έμοιαζε;</u>

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Αν υπήρχε ...

πώς θα το γράφαμε; Μάλλον A^{-1}

πώς θα έμοιαζε;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

πώς θα το υπολογίζαμε; ; ; ;

Ιδιότητες αντιστρόφου

- Ακόμα και αν $A \neq 0$, μπορεί να μην υπάρχει αντίστροφο! Δεν φαίνεται πάντα με `γυμνό μάτι!'
- Αν δεν υπάρχει αντίστροφο, το A λέγεται μη αντιστρέψιμο, ή ιδιάζον ή και ιδιόμορφο.
- Ένα διαγώνιο ή τριγωνικό μητρώο είναι αντιστρέψιμο $\Leftrightarrow$ τα διαγώνια στοιχεία είναι όλα μη μηδενικά.
- Το αντίστροφο διαγωνίου είναι διαγώνιο. Το αντίστροφο τριγωνικού είναι τριγωνικό (ίδιας δομής.)

Ιδιότητες και Ορθογώνια μητρώα

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Γενικά $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$,
- ενώ πάντα $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- Γενικά, άλλο η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ και άλλο η ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ
- $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} = A^{-\top}$
- Για ορισμένα ειδικά μητρώα, μπορεί να ισχύει $A^{-1} = A^\top$ οπότε $AA^\top = A^\top A = I$. Κάθε πραγματικό τετραγωνικό μητρώο που ικανοποιεί $A^\top = A^{-1}$ αποκαλείται ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΜΗΤΡΩΟ.
- Αν ένα μιγαδικό μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ικανοποιεί $C^*C = I$, αποκαλείται ορθομοναδιαίο (unitary).
- ... προσέξτε ότι για όλες τις στήλες (και αντίστοιχα για τις γραμμές) ενός ορθογώνιου ή ορθομοναδιαίου μητρώου ισχύει ότι

$$\langle a_i, a_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j, \\ 0 & \text{αν } i \neq j. \end{cases}$$

Παράδειγμα

- Το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

  είναι ορθογώνιο:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Προσέξτε ότι αν

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

  τότε $A = R(\frac{\pi}{6})$.

- Ενδιαφέρον: Τα $R(\phi)$ είναι μητρώα με στοιχεία που είναι συναρτήσεις κάποιας παραμέτρου ϕ. Επίσης, για κάθε ϕ, το μητρώο $R(\phi)$ είναι ορθογώνιο.

Σχετικά με το αντίστροφο μητρώο

ΥΠΑΡΧΕΙ;	ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ;	ΠΩΣ ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ;
όχι πάντα $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	ναι, όταν υπάρχει Αν $AB = BA = I$, και $CA = I = AC$	σπάνια απλά $D = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$
δεν ξεχωρίζει εύκολα $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$	τότε $\underbrace{(CA)B}_{=C(AB)=C} = BI = B$	συνήθως κοπιαστικά
... από ένα αντιστρέψιμο $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$		$A^{-1} = \begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $H^{-1} = \begin{pmatrix}9 & -36 & 30\\ -36 & 192 & -180\\ 30 & -180 & 180\end{pmatrix}$

Υπενθύμιση

Είδαμε ότι στο λογισμό μητρώων μπορεί $AB = 0$ ενώ $A \neq 0, B \neq 0$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = 0$$

Ενδιαφέρον: Θα δούμε ότι αν $AB = 0$ και $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (τετραγωνικά) τότε τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι ιδιόμορφο

Στο λογισμό μητρώων, τα ιδιόμορφα μητρώα έχουν το ρόλο του μηδεν!

- Αν A ιδιόμορφο, τότε BA και AB είναι ιδιόμορφα για οποιοδήποτε B.
- Προσοχή: Ιδιόμορφο δεν σημαίνει 0, απλά ε έχει το ρόλο ιδεατού μηδενικού: Ό,τι πολλαπλασιάσει, το κάνει ιδιόμορφο.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\gamma & \beta + 2\delta \\ 2\alpha + 4\gamma & 2\beta + 4\delta \end{pmatrix},$$

και προσέξτε οτι οι στήλες (και οι γραμμές) του γινομένου είναι γραμμικά εξαρτημένες ό,τι και να είναι τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Ελέγξτε ότι για να υπάρχει $B = A^{-1}$ θα πρέπει $AB = I$.
Για να υπάρχει τέτοιο B θα πρέπει η πρώτη στήλη του $B(:,1)$ που μπορούμε χάριν οικονομίας να τη συμβολίσουμε ως $b_1 = [\beta_{11}, \beta_{21}]^\top$ να ικανοποιεί

$$Ab_1 = e_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

επομένως

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\beta_2 &= 1 \\ 2\beta_1 + 4\beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

που είναι αδύνατο γιατί τότε

$$2(\beta_1 + 2\beta_2) - (2\beta_1 + 4\beta_2) = 2 - 0 \Rightarrow 2 = 0$$

Αναζήτηση αντιστρόφου

αν υπάρχει

Θα το αναζητήσουμε λύνοντας μία σειρά από υποπροβλήματα (που εντέλει είναι πιο σημαντικό)!
Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ζητούμε το $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε

$$AB = I \Leftrightarrow A[b_1, b_2, \ldots, b_n] = [e_1, e_2, \ldots, e_n], \quad \text{όπου } e_1 = (1, 0, \ldots)^\top, \text{ κ.λπ.}$$

Υπολογίζουμε το B ανά στήλες, δηλ. κάθε διάνυσμα b_j που ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα

$$Ab_j = e_j, \; j = 1, \ldots, n.$$

Το επόμενο βασικό ζήτημα είναι η επίλυση γραμμικού συστήματος

Από τα A, b να υπολογιστεί το x ώστε $Ax = b$.

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

'Μητέρα των προβλημάτων' της Γραμμικής Άλγεβρας:

Δίδονται n «γραμμικές εξισώσεις» για m αγνώστους και ζητάμε να υπολογίσουμε τους αγνώστους $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n & = & \beta_1 \\
\alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n & = & \beta_2 \\
\ddots & = & \vdots \\
\alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n & = & \beta_m
\end{array}
$$

$$
Ax = b \text{ όπου } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}
$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε ότι οι βαθμωτοί α_{11} ως α_{44} και β_1 ως β_4 είναι «γνωστές» τιμές που δεν έχουν ακόμα προσδιοριστεί.

$$\begin{array}{lllll} \alpha_{11}\xi_1 & +\alpha_{12}\xi_2 & & +\alpha_{14}\xi_4 & = 1 \\ \alpha_{21}\xi_1 & & +\alpha_{23}\xi_3 & & = -500 \\ & +\alpha_{32}\xi_2 & +\alpha_{33}\xi_3 & & = \frac{1}{43} \\ \alpha_{41}\xi_1 & & & +\alpha_{44}\xi_4 & = 0 \end{array}$$

Αλγεβρική γραφή

Δοθέντων $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, θέλουμε να βρούμε τη λύση, $x \in \mathbb{R}^n$ του $Ax = b$.

Ύπαρξη	Υπάρχει λύση;
Μοναδικότητα	Αν υπάρχει, είναι μοναδική;
Εύρεση	Ποιά ή ποιές είναι;

Δηλ. θέλουμε να υπολογιστεί το σύνολο

$$\mathcal{X} = \arg_{x \in \mathbb{R}^n} \{Ax = b | A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m\}$$

ή απλά να βρεθεί ένα $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = b$.

Παρατηρήσεις

Με ένα μόνο σύμβολο συνοψίζουμε

- Με A τους mn συντελεστές (γνωστοί)
- Με x το διάνυσμα με τους n αγνώστους,
- Με b το διάνυσμα των m στοιχείων του δεξιού μέλους (γνωστά).

Η σύντομη διατύπωση βασίζεται στην «ειδική» πράξη πολλαπλασιασμού μητρώων-διανυσμάτων και επιτυγχάνει εξαιρετική οικονομία στη γραφή.

Στη συνέχεια και μέχρι να δηλωθεί διαφορετικά, θα ασχολούμαστε με τετραγωνικά συστήματα ($m = n$)

Παράδειγμα

$$\begin{array}{lllll}
\xi_1 & +\xi_2 & & +\xi_4 & = 1 \\
\pi\xi_1 & & +e\xi_3 & & = -500 \\
 & +2.0\xi_2 & -44\xi_3 & & = \frac{1}{43} \\
-\xi_1 & & & +7\xi_4 & = 0
\end{array}$$

Παράδειγμα

Μη γραμμικό σύστημα!

$$\begin{array}{lllll} \sqrt{\xi_1} & +\xi_1\xi_2 & & +\xi_4 & = 1 \\ \pi\xi_1 & & +e^2\xi_3 & & = -500 \\ & +2.0\xi_2 & -44\xi_3 & & = \frac{1}{43} \\ -\xi_1 & & & +\sqrt{7}\xi_4 & = 0 \end{array}$$

Η «έφοδος» του Θυμαρίδα (400-350 π.Χ.) (Ιάμβλιχος, 245-325 μ.Χ.)

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \xi_1 & + \cdots & +\xi_n & = & \beta_1 \\ \xi_1 & +\xi_2 & & = & \beta_2 \\ \vdots & & + \ddots & = & \vdots \\ \xi_1 & & +\xi_n & = & \beta_n \end{array}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & & \ddots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{b}$$

Ερμηνεία με γεωμετρία

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\alpha_{1,1}\xi_1 + \alpha_{1,2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1,n}\xi_n = \beta_n$$

ονομάζεται υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$. Λέγεται επίσης ότι έχει διάσταση $n-1$.

- $n = 1 \Rightarrow$ σημείο στον $\mathbb{R}$.
- $n = 2 \Rightarrow$ ευθεία στον $\mathbb{R}^2$.
- $n = 3 \Rightarrow$ επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.

Θεώρηση γραμμών:

- Κάθε εξίσωση αντιστοιχεί σε ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$
- Η λύση x είναι το σημείο τομής των n υπερεπιπέδων (π.χ. ευθειών όταν $n = 2$).

Θεώρηση στηλών:

- Έστω οι στήλες (διανύσματα) του μητρώου $A = [a_1, \ldots, a_n]$.
- Η λύση x είναι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού που παράγει το b, δηλ. $\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = b$.

Προσοχή: ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ; ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ; ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ;

Θεώρηση γραμμών:

- Κάθε εξίσωση αντιστοιχεί σε ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$
- Η λύση x είναι το σημείο τομής των n υπερεπιπέδων (π.χ. ευθειών όταν $n = 2$).

Θεώρηση στηλών:

- Έστω οι στήλες (διανύσματα) του μητρώου $A = [a_1, \ldots, a_n]$.
- Η λύση x είναι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού που παράγει το b, δηλ. $\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = b$.

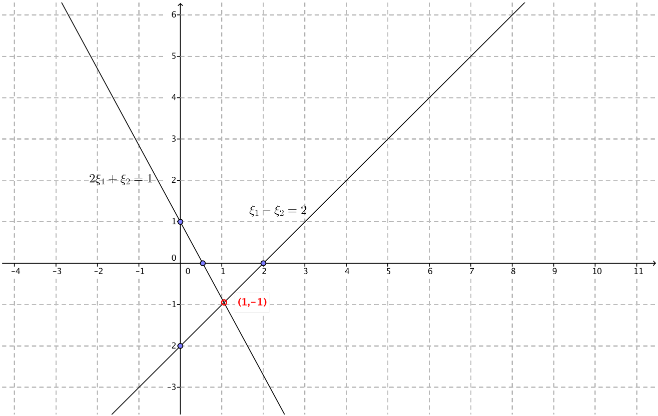
Προσοχή: ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ; ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ; ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ;

Είπε ότι κόκκινες γραμμές είναι **να μην υπάρξουν υφεσιακά μέτρα** και να επιλυθεί ένα σύστημα εξισώσεων με τρεις αγνώστους: πρωτογενές πλεόνασμα σε σχέση με το ποια θα είναι η αναδιάρθρωση του χρέους και επενδύσεις μεγαλύτερες από τις αποταμιεύσεις.

Ερμηνεία λύσης ως σημείο τομής υπερεπιπέδων

Ένα υπερεπίπεδο (γραμμή στον $\mathbb{R}^2$) ανά εξίσωση

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



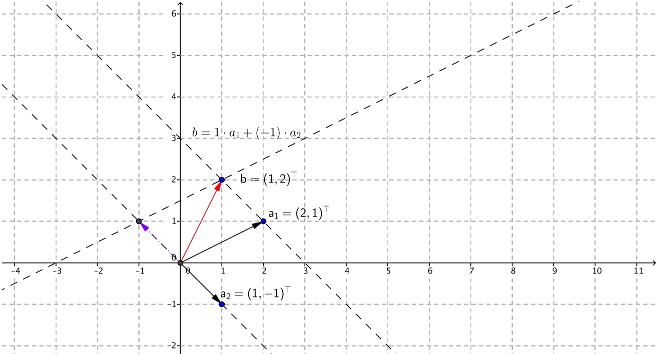
Ερμηνεία λύσης ως πολλαπλασιαστές διανυσμάτων

Ένα διάνυσμα ανά στήλη

Αναζητούμε το γραμμικό συνδυασμό των στηλών του $A = [a_1, a_2]$ που παράγει το b:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ η λύση ικανοποιεί } b = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$$

(Τα ζητούμενα ξ_1, ξ_2 αντιστοιχούν στην κλιμάκωση των a_1, a_2 ώστε $c_1 = \xi_1 a_1$, $c_2 = \xi_2 a_2$ και $b = c_1 + c_2$.)



Δυσχέρειες επίλυσης

όταν $n = 2$ Ερμηνεία γραμμών

- οι εξισώσεις ορίζουν ευθείες που είναι παράλληλες χωρίς κοινό σημείο - ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ
- οι εξισώσεις ορίζουν ευθείες που είναι παράλληλες και έχουν άπειρα κοινά σημεία - ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ερμηνεία στηλών

- οι στήλες του μητρώου είναι στην ίδια ευθεία και το διάνυσμα b ορίζει σημείο εκτός αυτής - ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ
- οι στήλες του μητρώου είναι στην ίδια ευθεία και το διάνυσμα b ορίζει σημείο επ' αυτής - ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γενίκευση σε πολλές διαστάσεις

της ερμηνείας γραμμών (δυσκολεύει) Στις $n = 3$ διαστάσεις

- σημεία προάγονται σε γραμμές
- γραμμές προάγονται σε επίπεδα
- η λύση είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των 3 επιπέδων (ένα για κάθε εξίσωση)

Παραδείγματα δυσκολιών

- αν οποιαδήποτε 2 από τα επίπεδα ή και όλα είναι παράλληλα μεταξύ τους $\Rightarrow$ ΛΥΣΗ ΜΗ ΔΥΝΑΤΗ
- αν η ευθεία τομής δυο επιπέδων κείται επί του τρίτου $\Rightarrow$ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στην πράξη, οι δυσκολίες είναι περισσότερες γιατί οι υπολογισμοί γίνονται σε αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας[1]

[1] περισσότερα στην Αριθμητική Ανάλυση & Περιβάλλοντα Υλοποίησης

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

- Από τα πιο σημαντικά προβλήματα
- Εμφανίζεται σε πολλές εκδοχές και μεταμφιέσεις
- Μία από αυτές είναι ο υπολογισμός του αντιστρόφου μητρώου
- Πολλές μέθοδοι επίλυσης
- Στη σύγχρονη έρευνα αξιοποιούν «δομικές» πληροφορίες από την εφαρμογή για επιτάχυνση
- Εδώ θα εξετάσουμε έναν «πρωταρχικό» τρόπο
- Ονόματα κλειδιά: Απαλοιφή **Gauss**, παραγοντοποίηση *LU*.
- Στόχοι: Να προετοιμαστείτε για την «αυτοματοποίηση» της επίλυσης μέσω αλγορίθμου, που μπορεί να εφαρμοστεί και σε μεγάλα προβλήματα.

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ