Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **1** : Εισαγωγή στη Γραμμική Αλγεβρα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Διανύσματα και Γραμμικοί Συνδιασμοί
- Νόρμες Διανυσμάτων και Εσωτερικά Γινόμενα
- Κανόνες για πράξεις Μητρώων
- Ανάστροφοι και Αντίστροφοι
- Μεταθέσεις
- Τεμαχισμός
- Εφαρμογές
  - Γραφήματα και Δίκτυα

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για

- Εσωτερικό γινόμενο: Καθετότητα, γωνία μεταξύ διανυσμάτων, ιδιότητες.
- Σχέσεις: Ανισότητα CBS, τριγωνική ανισότητα, κανόνας παραλληλογράμμου, ταυτότητα Πυθαγόρα.
- Τα διανύσματα e και e_j.
- Πολλαπλασιασμός μητρώων: ορισμός μέσω εσωτερικών γινομένων.
- Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων, γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα.
- Δυνάμεις μητρώου. Αντίστροφο μητρώου.

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για

- Εσωτερικό γινόμενο: Καθετότητα, γωνία μεταξύ διανυσμάτων, ιδιότητες.
- Σχέσεις: Ανισότητα CBS, τριγωνική ανισότητα, κανόνας παραλληλογράμμου, ταυτότητα Πυθαγόρα.
- Τα διανύσματα e και e_j.
- Πολλαπλασιασμός μητρώων: ορισμός μέσω εσωτερικών γινομένων.
- Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων, γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα.
- Δυνάμεις μητρώου. Αντίστροφο μητρώου.

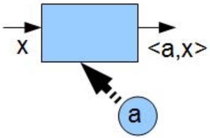
Σήμερα θα συζητήσουμε μερικες εφαρμογες:

- Ανάκτηση πληροφορίας από διάνυσμα.
- Ανάκτηση πληροφορίας από μητρώο.
- το πρόβλημα του υπολογισμού τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης και μητρώα Vandermonde
- μητρώα και γραφήματα
- μέτρηση διαδρομών με δυνάμεις και δυναμοσειρές μητρώων

Υπό συζήτηση ενότητες

Εφαρμογή: Εξόρυξη πληροφοριών από διάνυσμα

Δίνεται ένα «μαύρο κουτί» που υπολογίζει το εσωτερικό γινόμενο $\rho = \langle a, x \rangle$ ενός x (για το οποίο αποφασίζουμε εμείς) και ενός «κρυμμένου» a, που γνωρίζουμε πως έχει διάσταση n.



Άθροιση στοιχείων Επιλέγουμε $x = e$ διάστασης n (δηλ. $x \in \mathbb{R}^n$), επιστρέφεται $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \langle a, x \rangle$.

Ανάκτηση στοιχείου j Επιλέγουμε $x = e_j$ διάστασης, επιστρέφεται $\alpha_j = \langle a, e_j \rangle$

Ανάκτηση όλου Χρησιμοποιούμε το κουτί n φορές με είσοδο τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Εφαρμογή: Εξόρυξη πληροφοριών από μητρώο

Έχουμε ένα «μαύρο κουτί» που υπολογίζει το γινόμενο $y = Ax$ οπου το x ειναι δικής μας επιλογης και ενός «κρυμμένου» μητρώου A που γνωρίζουμε πως έχει διάσταση $n \times n$.

Άθροιση στοιχείων κάθε γραμμής
Επιλέγουμε $x = e$ διάστασης n.

Ανάκτηση στοιχείου στη θέση (i, j)
Επιλέγουμε $x = e_j$ και με την έξοδο $Ae_j = x_j$ υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $e_i^\top x_j$.

Ανάκτηση διαγωνίου του A;
Χρησιμοποιούμε το κουτί n φορές με είσοδο τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ και κάθε φορά υπολογίζουμε το Ae_j και στη συνέχεια το εσωτερικό του γινόμενο με το e_j, δηλ. $e_j^\top (Ae_j)$.

Μητρώα

πίνακες τιμών Λογιστικά και πρακτική αριθμητική: συσχετίσεις ποσοτήτων: (ηλικία, ύψος, βάρος), βαθμολόγια. Παρουσία γονιδίων σε δείγματα DNA (microarrays), Οικονομία: (πίνακες εισροών/εκροών. Μετεωρολογία: πίνακες βροχόπτωσης, Ανάκτηση πληροφορίας: Πίνακες όρων-κειμένων. Διαδίκτυο: Πίνακες διασύνδεσης (μητρώα γειτνίασης).

γραμμικοί μετασχηματισμοί που επιτελούν: Αλλαγή συντεταγμένων. Μετακίνηση στο χώρο (περιστροφή, διολίσθηση). Προσομοίωση (διακριτοποίηση παραγώγων και ολοκληρωμάτων).

Σχεδόν όπου χρησιμοποιούμε πίνακες αριθμών για τα δεδομένα μιας εφαρμογής.

Παράδειγμα

Υπολογισμος τιμών γραμμικής συνάρτησης
Ζητούμενο Δίνεται η συνάρτηση $\psi = 3\xi + 2$ και θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές του ψ για πολλές διαφορετικές τιμές του ξ. Θα μπορούσε να είναι η εξίσωση μιας ευθείας και έστω ότι θέλουμε να βρούμε τις τεταγμένες $\psi_1, \ldots, \psi_m$ από τις τετμημένες $\xi_1, \ldots, \xi_m$ ώστε να οπτικοποιήσουμε την ευθεία συνδέοντας τα σημεία $\{(\xi_j, \psi_j) | j = 1, ..., m\}$.
Ιδέα Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει ως εξής: 1) κατασκευάζουμε το διάνυσμα $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)^\top$, το μητρώο $A = (e, x)$. 2) και το διάνυσμα $p = (2, 3)^\top$. 2) Υπολογίζουμε το γινόμενο $y = Ap$:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 \\ 1 & \xi_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \xi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Υπολογισμος τιμών τετραγωνικής συνάρτησης (πολυωνύμου) Ζητούμενο
Δίνεται η συνάρτηση $\psi = 3\xi^2 + \xi - 1$ και θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές του ψ για πολλές διαφορετικές τιμές του ξ.
Ιδέα Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει ως εξής: 1) κατασκευάζουμε το διάνυσμα $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^\top$, το μητρώο $A = (e, x, x \odot x)$. 2) και το διάνυσμα $p = (-1, 1, 3)^\top$ όπου όπου $x \odot x$ δηλώνει το γινόμενο Hadamard.
2) Υπολογίζουμε το γινόμενο $y = Ap$:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & \xi_m & \xi_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Προσέξτε: το μητρώο έχει ειδική δομή και λέγεται μητρώο τύπου Vandermonde.

Back to the future

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

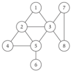
Ενότητα 6η

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής

Μη κατευθυνόμενα γραφήματα

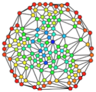
Μη κατευθυνόμενο γράφημα. $G = (V, E)$

- V = κόμβοι ή κορυφές
- E = ακμές (ή πλευρές) μεταξύ ζευγαριών κόμβων
- E: διακριτές, δυαδικές, συμμετρικές σχέσεις μεταξύ αντικειμένων
- Παράμετροι μεγέθους γραφήματος: n = |V|, m = |E|



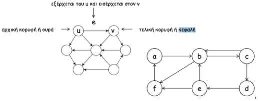
V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }
E = { 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5, 3-5, 3-7, 3-8, 4-5, 5-6 }
n = 8
m = 11

Γραφήματα
Βασικές Έννοιες και Εφαρμογές

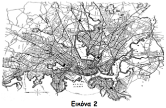


Κατευθυνόμενο γράφημα. $G = (V, E)$

- V = κόμβοι ή κορυφές
- E = ακμές (ή πλευρές) μεταξύ ζευγαριών κόμβων
- E: διακριτές, δυαδικές, ασύμμετρες σχέσεις μεταξύ αντικειμένων
- Παράμετροι μεγέθους γραφήματος: n = |V|, m = |E|
- Η ακμή e = (u, v) κατευθύνεται από τον κόμβο u στον κόμβο v



Παραδείγματα γραφημάτων



Εικόνα 2

Γράφημα	Κόμβοι	Ακμές
Οδικά δίκτυα	Διασταυρώσεις δρόμων	Τμήματα δρόμων
Δίκτυα επικοινωνιών	Υπολογιστές	Καλώδια οπτικών ινών
Παγκόσμιος Ιστός	Ιστοσελίδες	Υπερσύνδεσμοι
Κοινωνικά δίκτυα	Άνθρωποι	Σχέσεις
Τροφική αλυσίδα	Είδος οργανισμού	Θηρευτής-Θήραμα
Συστήματα λογισμικού	Συναρτήσεις	Κλήσεις συναρτήσεων
Χρονοπρογραμματισμός	Εργασίες	Περιορισμοί προτεραιότητας

Παράδειγμα: Μητρώο γραφήματος

μητρώο → γράφημα Έστω ένα τετραγωνικό μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε το γράφημα $G(A)$ του μητρώου είναι το σύνολο n κόμβων $\mathcal{K} = \{1, \dots, n\}$ και ένα σύνολο ακμών, $\mathcal{E} = \{(i,j) | i, j \in \mathcal{K}\}$ (από τον κόμβο i στον κόμβο j), έτσι ώστε αν $\alpha_{i,j} \neq 0$, τότε $(i,j) \in \mathcal{E}$ με βάρος $\omega_{i,j} = \alpha_{i,j}$, ειδάλλως δεν υπάρχει ακμή από το i στο j.

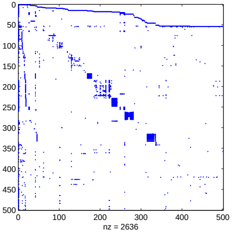
γράφημα → μητρώο Έστω το γράφημα G με n κόμβους $\mathcal{K} = \{1, \dots, n\}$ και το σύνολο ακμών, $\mathcal{E} = \{(i,j) | i, j \in \mathcal{K}\}$ βάρους ω_{ij}. Τότε το μητρώο του γραφήματος είναι το $n \times n$ μητρώο για το οποίο

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \omega_{ij} & \text{αν } (i,j) \in E \\ 0 & \text{αν όχι} . \end{cases}$$

Μητρώο γειτνίασης Ως μητρώο γειτνίασης, ενός γραφήματος G ορίζεται το μητρώο γραφήματος $G(A)$ όπου το στοιχείο $\alpha_{i,j}$ είναι ίσο με το πλήθος των ακμών από τον κόμβο i προς τον κόμβο j. Αν ένα γράφημα δεν έχει πολλαπλές ακμές και αυτοβρόχους (δηλ. ακμές τύπου (i,i)), τα στοιχεία του μητρώου γειτνίασης θα είναι $\alpha_{i,j} \in \{0, 1\}$.

Συμμετρία και κατευθυνσιμότητα: αν το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο, το μητρώο γραφήματος είναι συμμετρικό.

Γράφημα → Μητρώο γειτνίασης



Μητρώο γειτνίασης A

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ δείχνει τη σελίδα } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Harvard500

1	http://www.harvard.edu
2	http://atwork.harvard.edu
3	http://lib.harvard.edu
...	...
500	http://www.hsdm.med.harvard.edu/(...)/implant.htm

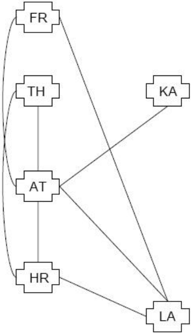
Μητρώο διασύνδεσης αεροδρομίων I

Πίνακας γειτνίασης (adjacency matrix) (αεροδρομίων)

A = (α_{ij}) όπου:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists(i \leftrightarrow j) \\ 0 & \nexists(i \leftrightarrow j) \end{cases}$$

	TH	HR	KA	LA	FR	AT
TH	0	1	0	0	0	1
HR	1	0	0	1	0	1
KA	0	0	0	0	0	1
LA	0	1	0	0	1	1
FR	0	0	0	1	0	1
AT	1	1	1	1	1	0



Τετραγωνικός πίνακας 6×6 για τα 6 αεροδρόμια
[TH, HR, KA, LA, FR, AT]
Προφανώς, με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να μοντελοποιήσουμε άλλα «δίκτυα»
Δείτε ότι παραμένει ίδιος αν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές:

Μέτρηση διαδρομών με πολλαπλασιασμό μητρώων

$$[A^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\alpha_{k,j}$$

Μέτρηση διαδρομών με πολλαπλασιασμό μητρώων

$$
\begin{aligned}
[A^2]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\alpha_{k,j} \\
&= \#\ \text{διαδρομών μήκους 2 (1 στάσης) από το } i \text{ στο } j
\end{aligned}
$$

Απόδειξη; Για δεδομένα (i, j), κάθε όρος $\alpha_{i,k}\alpha_{k,j}$ είναι 0 η 1. Η μόνη περίπτωση να είναι 1 είναι όταν $\alpha_{i,k} = 1$ και $\alpha_{k,j} = 1$. Αυτό σημαίνει ότι αμφότερες οι ακμές $(i \rightarrow k)$ και $(k \rightarrow j)$ υπάρχουν, επομένως υπάρχει η διαδρομή $i \rightarrow k \rightarrow j$. και ο όρος συνεισφέρει στο άθροισμα. Επομένως η τιμή του αθροίσματος μετρά το συνολικό αριθμό διαδρομών μήκους 2 από το i στο j.

Μέτρηση διαδρομών με πολλαπλασιασμό μητρώων

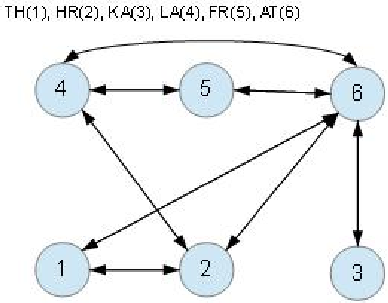
$$
\begin{aligned}
[A^2]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\alpha_{k,j} \\
&= \#\ \text{διαδρομών μήκους 2 (1 στάσης) από το } i \text{ στο } j
\end{aligned}
$$

Απόδειξη: Για δεδομένα (i,j), κάθε όρος $\alpha_{i,k}\alpha_{k,j}$ είναι 0 η 1. Η μόνη περίπτωση να είναι 1 είναι όταν $\alpha_{i,k} = 1$ και $\alpha_{k,j} = 1$. Αυτό σημαίνει ότι αμφότερες οι ακμές $(i \to k)$ και $(k \to j)$ υπάρχουν, επομένως υπάρχει η διαδρομή $i \to k \to j$. και ο όρος συνεισφέρει στο άθροισμα. Επομένως η τιμή του αθροίσματος μετρά το συνολικό αριθμό διαδρομών μήκους 2 από το i στο j.

Γενικότερα: Η τιμή $[A^k]_{i,j}$ είναι ίση με το πλήθος των διαδρομών από το i στο j μήκους k ($k-1$ στάσεις).

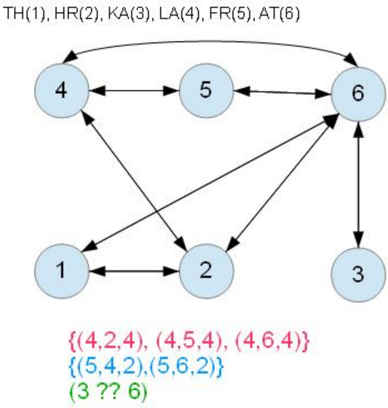
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

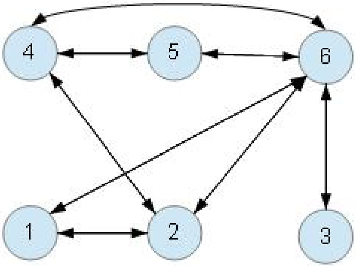


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

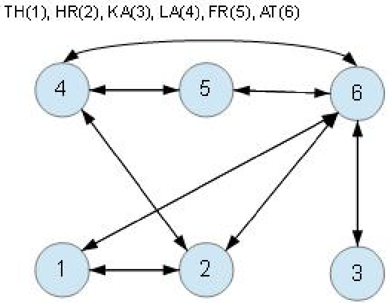
TH(1), HR(2), KA(3), LA(4), FR(5), AT(6)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

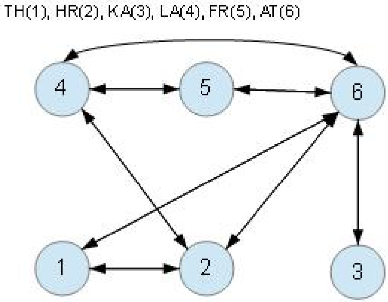


Αυτοαξιολόγηση: Αιτιολογήστε γιατί $[A^3]_{6,2} = 8$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

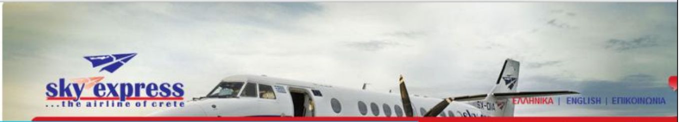
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$



<u>Ενδιαφέρον</u>: Τι πληροφορία μας παρέχει η τιμή του $[A + A^2]_{i,j}$;

www.skyexpress.gr/NEA/tabid/64/articleType/ArticleView/articleId/35/language/el-GR/__21__2012.aspx

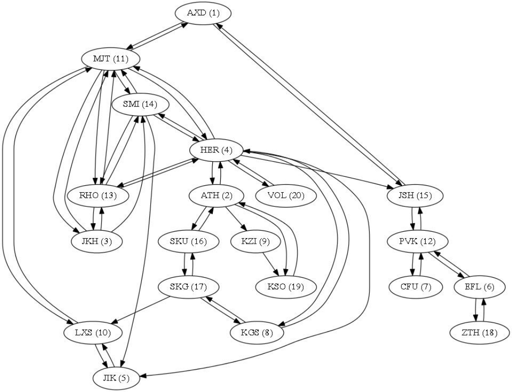


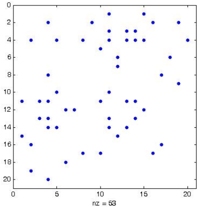
ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΙ | ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ | ΠΡΟΣΦΟΡΕΣ | B2B

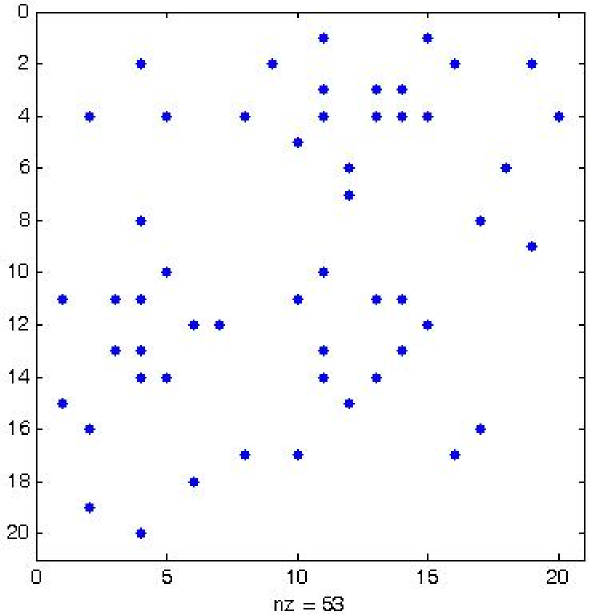
ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΙ	ΠΤΗΣΕΙΣ	ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	ΣΑΒΒΑΤΟ	ΚΥΡΙΑΚΗ
ROUTES	FLIGHTS	MON	TUE	WED	THU	FRI	SAT	SUN
ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΑΙΓΑ… ΡΟΔΟΣ - ΣΑΜΟΣ - ΧΙΟΣ - ΛΗΜΝΟ…								
MYTILINI - LIMNOS	MJT - LXS	√	√					
LIMNOS - MYTILINI	LXS - MJT	√	√					
CHIOS - MYTILINI	JKH - MJT	√	√					
MYTILINI - CHIOS	MJT - JKH	√	√					
SAMOS - MYTILINI	SMI - MJT		√					
MYTILINI - SAMOS	MJT - SMI		√					
CHIOS - SAMOS	JKH - SMI		√					
SAMOS - CHIOS	SMI - JKH		√					
RHODES - MYTILINI	RHO - MJT	√	√					
MYTILINI - RHODES	MJT - RHO	√	√					
RHODES - CHIOS	RHO- JKH	√	√					
CHIOS - RHODES	JKH - RHO	√	√					
RHODES - SAMOS	RHO -SMI		√					
SAMOS - RHODES	SMI - RHO		√					
ΙΟΝΙΟ ΚΕΡΚΥΡΑ - ΠΡΕΒΕΖΑ - ΚΕΦΑΛΟΝΙ…								
KERKYRA - PREVEZA	CFU - PVK	√	√					
PREVEZA - KERKYRA	PVK - CFU	√	√					
PREVEZA - KEFALONIA	PVK - EFL	√						
KEFALONIA - PREVEZA	EFL - PVK		√					
ZAKYNTHOS - KEFALONIA	ZTH - EFL		√					
KEFALONIA - ZAKYNTHOS	EFL - ZTH	√						
ΑΘΗΝΑ - ΣΚ… ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ - ΣΚ…								
ATHENS - SKYROS	ATH - SKU							
SKYROS - ATHENS	SKU - ATH							
THESSALONIKI - SKYROS	SKG - SKU							
SKYROS - THESSAL,ONIKI	SKU - SKG							
ΑΘΗΝΑ - ΚΟ…								
ATHENS- KOZANI	ATH-KZI	√	√					
ATHENS - KASTORIA	ATH - KSO							
ΚΑΣΤΟΡΙΑ - ΑΘΗΝΑ	KSO - ATH	√	√					

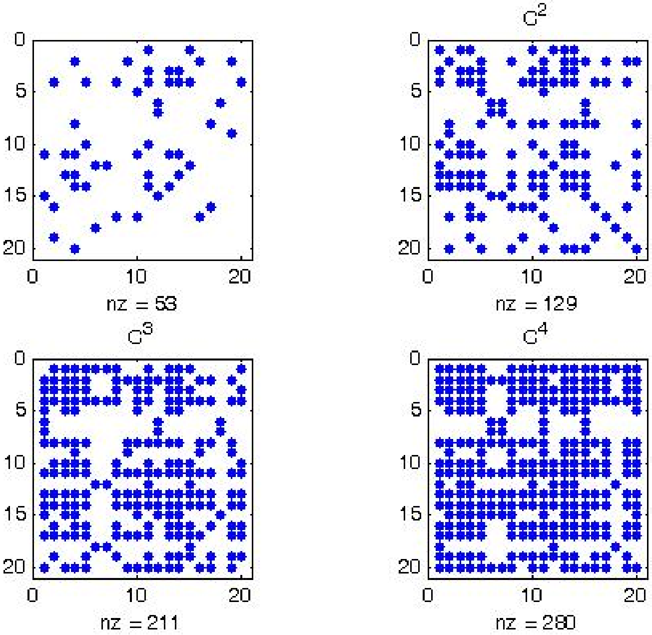
ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΙ	ΠΤΗΣΕΙΣ	ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	ΣΑΒΒΑΤΟ	ΚΥΡΙΑΚΗ
ROUTES	FLIGHTS	MON	TUE	WED	THU	FRI	SAT	SUN
KOZANI - KASTORIA	KZI - KSO	√	√			√		√
ΣΗΤΕΙΑ - ΠΡΕΒΕΖΑ ΣΗΤΕΙΑ - ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ								
SITIA - PREVEZA	JSH - PVK	√			√			
PREVEZA - SITIA	PVK - JSH		√			√		
SITIA - ALEXANDROUPOLI	JSH - AXD	√			√			
ALEXANDROUPOLI - SITIA	AXD - JSH	√			√			
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ - ΛΗΜΝΟΣ - ΙΚΑΡΙΑ								
THESSALONIKI - LIMNOS	SKG - LXS		√	√		√	√	√
LIMNOS - THESSSALONIKI	LXS - SKG		√	√		√	√	√
LIMNOS - IKARIA	LXS - JIK		√	√		√	√	√
IKARIA - LIMNOS	JIK - LXS		√	√		√	√	√
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΡΟΔΟΣ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION-RHODES	HER-RHO	√	√	√	√	√	√	√
RHODES - HERAKLION	RHO - HER	√	√	√	√	√	√	√
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΚΩΣ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION-KOS	HER-KGS	√		√			√	
KOS - HERAKLION	KGS - HER	√		√			√	
ΚΩΣ - ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ - ΚΩΣ								
KOS - THESSALONIKI	KGS - SKG						√	
THESSALONIKH - KOS	SKG - KGS						√	
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΜΥΤΙΛΗΝΗ - ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ								
HERAKLION-MYTILINI	HER-MJT					√		

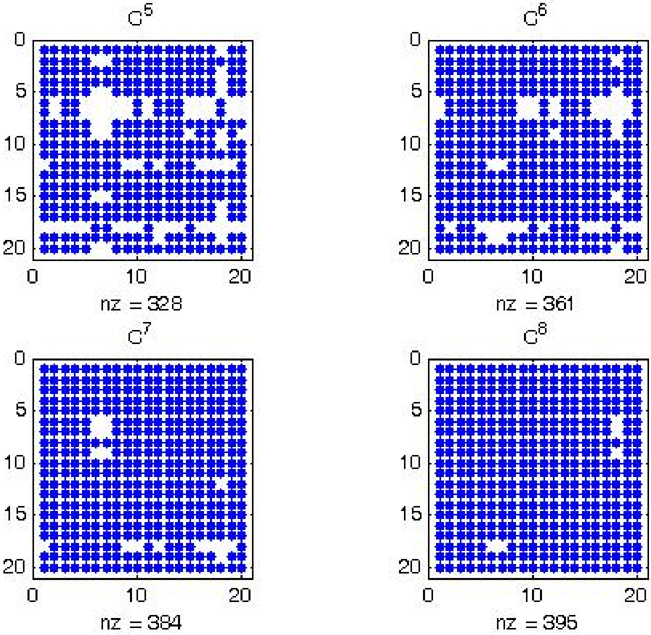
ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΙ	ΠΤΗΣΕΙΣ	ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	ΣΑΒΒΑΤΟ	ΚΥΡΙΑΚΗ
ROUTES	FLIGHTS	MON	TUE	WED	THU	FRI	SAT	SUN
SAMOS - IKARIA	SMI - JIK		√					
IKARIA - SAMOS	JIK - SMI			√				
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΣΗΤΕΙΑ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION - SITIA	HER - JSH	√			√			
SITIA - HERAKLION	JSH - HER		√			√		
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΒΟΛΟΣ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION - VOLOS	HER - VOL							
VOLOS - HERAKLION	VOL - HER							
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΙΚΑΡΙΑ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION - IKARIA	HER - JIK					√		
IKARIA - HERAKLION	JIK - HER							√

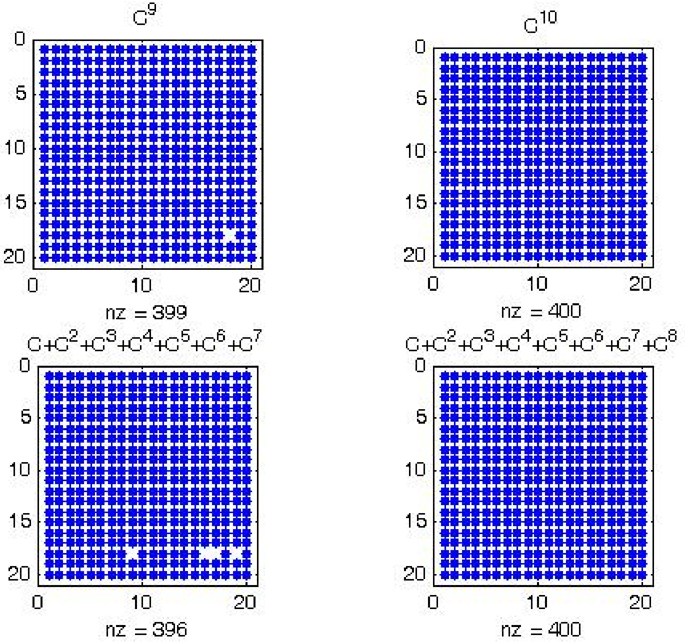

AXD (1)
MJT (11)
SMI (14)
HER (4)
RHO (13)
ATH (2)
VOL (20)
JSH (15)
JKH (3)
SKU (16)
KZI (9)
PVK (12)
SKG (17)
KSO (19)
CFU (7)
EFL (6)
LXS (10)
KGS (8)
ZTH (18)
JIK (5)


nz = 53


0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
5
10
15
20
nz = 53


nz = 53
C^2
nz = 129
C^3
nz = 211
C^4
nz = 280


C^5
nz = 328
C^6
nz = 361
C^7
nz = 384
C^8
nz = 395


C^9
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 399
C^{10}
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 400
$C+C^2+C^3+C^4+C^5+C^6+C^7$
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 396
$C+C^2+C^3+C^4+C^5+C^6+C^7+C^8$
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 400

Σχόλια

Human Relations
http://hum.sagepub.com

The Analysis of Sociograms using Matrix Algebra
Leon Festinger
Human Relations 1949; 2; 153
DOI: 10.1177/001872674900200205

Leon Festinger

Born	May 8, 1919 New York City
Died	February 11, 1989 New York City
Fields	Psychology
Known for	cognitive dissonance

THE ANALYSIS OF SOCIOGRAMS USING MATRIX ALGEBRA

LEON FESTINGER

There is, at present, no adequate analytical device for handling data from one of the most popular measurement techniques in the field of social psychology. Sociometric questions such as "who are your best friends?" or "what people do you like most to be with?" are increasingly being used whenever an interest in the "structure" or "patterning" of relationships among a number of persons is present. The exact wordings of the questions used represent an almost infinite series of variations, depending upon the context of the study in which the question is asked. The character of the data, however, is always the same. The data obtained are the specific persons mentioned by each one in response to the question. hear it and from whom, and how far removed from the original source will it be by the time a specific person hears about it?

Without any adequate representational techniques for handling such data, the analysis of the exact patterns of interconnections among members of a group is virtually impossible, unless the group is very small. As the size of the group increases, the complexity of the pattern generally makes it extremely difficult to comprehend by mere inspection. The result has been the relative neglect of this kind of analysis. Investigators have, by and large, contented themselves with analyzing sociometric patterns in such terms as how many choices people receive, what kinds of people get most choices,

- Η μέτρηση των διαδρομών μέσω δυνάμεων μητρώων βρίσκεται στη βάση πολλών αλγορίθμων μεγάλης σημασίας για πολλές εφαρμογές.
- Η αρχική ιδέα οφείλεται στον Leo Festinger (1949) ([Fes49]). Προσέξτε ότι ο LF περιγράφεται στη Wikipedia ως an American social psychologist, perhaps best known for cognitive dissonance and social comparison theory!
- η πιο διάσημη μετεξέλιξη των ιδεών αυτών είναι ο αλγόριθμος PageRank ([BP98]) που κατέστησε την Google κυρίαρχη εταιρία για λογισμικό αναζήτησης και φυλλομέτρησης.

Βιβλιογραφία I

S. Brin and L. Page.
The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine.
In *Proc. 7th Int'l. Conf. World Wide Web*, pages 107--117, Brisbane, Australia, 1998. Elsevier Science Publishers B. V.

L. Festinger.
The analysis of sociograms using matrix algebra.
Human Relations, 2:153 -- 158, 1949.

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Χρήση Έργου Τρίτων I

1. https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083/ (βλ. σελ 12)
2. http://www.skyexpress.gr/ (βλ. σελ 18)
3. http://hum.sagepub.com/content/2/2/153.refs (βλ. σελ 24)
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Leon_Festinger (βλ. σελ 24)

Σημείωμα Αναφοράς

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης