Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **1** : Εισαγωγή στη Γραμμική Αλγεβρα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Διανύσματα και Γραμμικοί Συνδιασμοί
- Νόρμες Διανυσμάτων και Εσωτερικά Γινόμενα
- Κανόνες για πράξεις Μητρώων
- Ανάστροφοι και Αντίστροφοι
- Μεταθέσεις
- Τεμαχισμός
- Εφαρμογές
  - Γραφήματα και Δίκτυα

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για

- πολλαπλασιασμό μητρώων-διανυσμάτων
- πολλαπλασιασμό μητρώων: ορισμός μέσω γραμμικών συνδυασμών.
- παραδείγματα και ιδιαιτερότητες
- εσωτερικό γινόμενο, ευκλείδειο μήκος και άλλες νόρμες διανύσματος, μοναδιαία διανύσματα.

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για

- πολλαπλασιασμό μητρώων-διανυσμάτων
- πολλαπλασιασμό μητρώων: ορισμός μέσω γραμμικών συνδυασμών.
- παραδείγματα και ιδιαιτερότητες
- εσωτερικό γινόμενο, ευκλείδειο μήκος και άλλες νόρμες διανύσματος, μοναδιαία διανύσματα.

Σήμερα θα συζητήσουμε τα εξής:

- εσωτερικά γινόμενα
- καθετότητα και γωνίες διανυσμάτων
- ισότητες και ανισότητες
- πολλαπλασιασμός μητρώων: ερμηνεία μέσω εσωτερικών γινομένων
- αναστροφή και πολλαπλασιασμός
- κανόνες πολλαπλασιασμού μητρώων
- δυνάμεις μητρώου και πολυώνυμο μητρώου
- γραμμική ανεξαρτησία και γραμμική εξάρτηση
- υπομητρώα και συμβολισμοί

Υπό συζήτηση ενότητες

Καθετότητα / ορθογωνιότητα - γωνίες

Ορθογωνιότητα διανυσμάτων

Λέμε ότι δύο διανύσματα a, b είναι κάθετα ή ορθογώνια μεταξύ τους αν $\langle a, b \rangle = 0$.

Γωνία μεταξύ διανυσμάτων

Η γωνία μεταξύ των a και b ορίζεται ως η τιμή

$$\phi := \arccos\left(\frac{1}{\|a\|_2 \|b\|_2} \langle a, b \rangle\right).$$

Συχνά χρησιμοποιούμε απευθείας το συνημίτονο $\cos\phi = \frac{1}{\|a\|_2\|b\|_2}\langle a, b\rangle$

Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ διανυσμάτων

Ορίζεται ως $\|a - b\|_2$. Επομένως το μήκος ενός διανύσματος a είναι η απόστασή του από το 0.

Παρατηρήσεις

(Θεωρούμε ότι χρησιμοποιούμε την νόρμα $\|\cdot\|_2$)

Δίδονται σύμμορφα διανύσματα a, b,

$$\begin{aligned}
\|a+b\|^2 &= \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a+b\rangle + \langle b, a+b\rangle \\
&= (\langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle) + (\langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle) \\
&= \|a\|^2 + \|b\|^2 + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle \\
&= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\Re\langle a, b\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|a-b\|^2 &= \langle a-b, a-b\rangle = \langle a, a-b\rangle - \langle b, a-b\rangle \\
&= \|a\|^2 + \|b\|^2 - \langle a, b\rangle - \langle b, a\rangle \\
&= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\Re\langle a, b\rangle
\end{aligned}$$

Αν τα a, b είναι κάθετα μεταξύ τους, $\langle a, b\rangle = 0$ επομένως

$$\|a-b\|^2 = \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \text{ Πυθαγόρειο θεώρημα!}$$

Βασικές ισότητες και ανισότητες

Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz (CBS)

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ με ισότητα ανν $x = \alpha y$ ή ένα από τα x, y μηδενικό.

Τριγωνική ανισότητα

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Κανόνας παραλληλογράμου

$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Πυθαγόρεια ταυτότητα

Αν $x \perp y$ τότε $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Πολλαπλασιασμός μητρώων

(θεώρηση μέσω εσωτερικών γινομένων)
Ο πολλαπλασιασμός του $m \times k$ μητρώου A με το $k \times n$ μητρώο B γράφεται ως

$$C = AB$$

Το γινόμενο C είναι $m \times n$ και νοείται μόνον όταν το πλήθος στηλών του A είναι ίσο με το πλήθος γραμμών του B.

Μέσω εσωτερικών γινομένων

Το στοιχείο στη θέση (i, j) του C είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του A με τη στήλη j του B.

Πολλαπλασιασμός μητρώων

(θεώρηση μέσω εσωτερικών γινομένων)

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,n} \\ \boxed{\gamma_{2,1}} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m,1} & \gamma_{m,2} & \cdots & \gamma_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,k} \\ \boldsymbol{\alpha_{2,1}} & \boldsymbol{\alpha_{2,2}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{2,k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta_{1,1}} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \boldsymbol{\beta_{2,1}} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\beta_{k,1}} & \beta_{k,2} & \cdots & \beta_{k,n} \end{pmatrix}$$

Γενικός τύπος

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j} &= \alpha_{i,1}\beta_{1,j} + \alpha_{i,2}\beta_{2,j} + \cdots + \alpha_{i,k}\beta_{k,j} \\ &= \sum_{s=1}^{k} \alpha_{i,s}\beta_{s,j}, \text{ για } i = 1, \ldots, m \text{ και } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ιδιότητες

- Για σύμμορφα A, B, C, ισχύει προσεταιριστική ιδιότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό μητρώων:

$$A(BC) = (AB)C$$

- Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα:

$$A(B+C) = AB + AC$$

- Προσοχή (μία ακόμα φορά): Γενικά (όχι πάντα), δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, κάτι που οδηγεί σε σημαντικές διαφορές του λογισμού μητρώων από το λογισμό με πραγματικούς και μιγαδικούς. Γενικά,

$$AB \neq BA$$

- $$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A^2 + \underbrace{BA + AB}_{\neq 2AB} + B^2$$

- $$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$$

Παραδείγματα 1/2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Αν $c = B(:, 1)$, τότε

$$Ac = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \text{ενώ το } cA \text{ δεν ορίζεται!}$$

Παραδείγματα 2/2

Αν

$$a = [1,\ 2], b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

τότε

$$ab = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11, \quad ba = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix},$$

Αναστροφή μητρώου

- Το **ανάστροφο** ενός μητρώου A συμβολίζεται με $A^\top$. Το στοιχείο σε κάθε θέση (i,j) του $A^\top$ είναι ίδιο με το στοιχείο στη θέση (j,i) του A, δηλ. $(A^\top)_{ij} = \alpha_{ji}$.
- Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, τότε $A^\top \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
- Αν $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, το **ερμιτιανό ανάστροφό** του (ή συζυγές ανάστροφο) συμβολίζεται A^* (ή ενίοτε με A^H) και το στοιχείο στη θέση (i,j) είναι $(A^*)_{ij} = (\overline{a_{ji}})$, όπου η γραμμή δηλώνει το μιγαδικό συζυγές·
- Ένα μητρώο A ονομάζεται **συμμετρικό** αν $A = A^\top$ και **ερμιτιανό** αν $A = A^*$.

Παραδείγματα

1. Το μητρώο $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικό (και ερμιτιανό).
2. Το μητρώο $A = \begin{bmatrix} 5 & 7+j \\ 7+j & 2 \end{bmatrix}$ είναι μιγαδικό συμμετρικό αλλά όχι ερμιτιανό.
3. Το μητρώο $A = \begin{bmatrix} 5 & 7+j \\ 7-j & 2 \end{bmatrix}$ είναι ερμιτιανό (αλλά όχι συμμετρικό).

Αναστροφή γινομένου μητρώων

Το ανάστροφο του γινομένου είναι το γινόμενο των αναστρόφων σε ανάστροφη φορά!

- $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- $(AB)^* = B^* A^*$

ΠΡΟΣΟΧΗ Γενικά $(AB)^\top \neq A^\top B^\top$

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Δύο μη μηδενικά διανύσματα u, v αποκαλούνται γραμμικά ανεξάρτητα αν

$$\alpha u + \beta v = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Ένα σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων $U = \{u_1, \ldots, u_s\}$ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{U}$ αποκαλούνται γραμμικά ανεξάρτητα αν

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0.$$

Αν ένα σύνολο διανυσμάτων δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αποκαλούνται «γραμμικά εξαρτημένα».

Άσκηση

Δίνονται

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε αν μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω και αν ναι να τα υπολογίσετε:

$$AA, AA^\top, A^\top A, AB, BA, B^2, AA^\top - B, AA^\top AA^\top$$

Δυνάμεις μητρώου

Για κάθε τετραγωνικό μητρώο A και θετικό ακέραιο k η k-οστή δύναμη του A είναι το μητρώο που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του A με τον εαυτό του, k φορές.

$$A^k = A \cdot A \cdots A.$$

Επιπλέον $A^0 = I$.

Αντιστροφή και αρνητικές δυνάμεις: Θα δούμε σύντομα ότι εφόσον ένα τετραγωνικό μητρώο A ικανοποιεί τη συνθήκη της αντιστρεψιμότητας, τότε μπορούμε να ορίσουμε και το μητρώο A^{-1} για το οποίο ισχύει ότι

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Πολυώνυμα μητρώου

Ορισμός: Έστω το πραγματικό πολυώνυμο βαθμού m,

$$p(\zeta) \quad = \quad \gamma_0 + \gamma_1 \zeta + \cdots + \gamma_m \zeta^m.$$

Τότε για οποιοδήποτε μητρώο και μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, το πολυώνυμο $p(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι το μητρώο

$$p(A) \quad = \quad \gamma_0 I + \gamma_1 A + \cdots + \gamma_m A^m.$$

Σημ. Ο ορισμός επεκτείνεται με προφανή τρόπο σε μιγαδικά πολυώνυμα και μητρώα.

Υπομητρώα

ʼ

Εστω μητρώο A μεγέθους $m \times n$ και φυσικοί αριθμοί $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$ και $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_l \leq n$. Τότε το μητρώο μεγέθους $k \times l$ του οποίου το (μ, ν) στοιχείο είναι $a_{i_\mu j_\nu}$ αποκαλείται υπομητρώο του A. Αν $k = l$ και $i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k$ τότε το μητρώο καλείται κύριο (principal). Αν $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$ τότε το μητρώο καλείται αρχικό (leading).

Τεμαχισμός, σύνθετα μητρώα, πλοκάδες (μπλοκ)

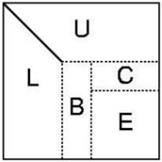
- Συνηθίζεται να τεμαχίζουμε σε υπομητρώα με διαδοχικές γραμμές/στήλες (πλοκάδες).
- Ενα μητρώο A μεγέθους $m \times n$ λέγεται πως είναι τεμαχισμένο σε πλοκάδες (ή μπλοκ) όταν είναι γραμμένο ως

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix}$$

όπου A_{ij} είναι $m_i \times n_j$ υπομητρώο του A.

- Αν δυο μητρώα είναι σύμμορφα τεμαχισμένα (conformally partitioned), τότε τα υπομητρώα που τα αποτελούν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν βαθμωτοί στο πλαίσιο πράξεων μητρώων αρκεί να μην χρησιμοποιείται αντιμεταθετικότητα στον πολλαπλασιασμό μητρώων.

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
a&e&&&e&&&&&&&&&&&\\
e&a&e&&&e&&&&&&&&&&\\
&e&a&e&&&e&&&&&&&&&\\
&&e&a&&&&e&&&&&&&&\\ \hline
e&&&&a&e&&&e&&&&&&&\\
&e&&&e&a&e&&&e&&&&&&\\
&&e&&&e&a&e&&&e&&&&&\\
&&&e&&&e&a&&&&e&&&&\\ \hline
&&&&e&&&&a&e&&&e&&&\\
&&&&&e&&&e&a&e&&&e&&\\
&&&&&&e&&&e&a&e&&&e&\\
&&&&&&&e&&&e&a&&&&e\\ \hline
&&&&&&&&e&&&&a&e&&\\
&&&&&&&&&e&&&e&a&e&\\
&&&&&&&&&&e&&&e&a&e\\
&&&&&&&&&&&e&&&e&a
\end{array}\right]
*
\begin{bmatrix}
U(1,1,m+1)\\ U(2,1,m+1)\\ U(3,1,m+1)\\ U(4,1,m+1)\\
U(1,2,m+1)\\ U(2,2,m+1)\\ U(3,2,m+1)\\ U(4,2,m+1)\\
U(1,3,m+1)\\ U(2,3,m+1)\\ U(3,3,m+1)\\ U(4,3,m+1)\\
U(1,4.m+1)\\ U(2,4,m+1)\\ U(3,4,m+1)\\ U(4,4m+1)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b(1,1,m)\\ b(2,1,m)\\ b(3,1,m)\\ b(4,1,m)\\
b(1,2,m)\\ b(2,2,m)\\ b(3,2,m)\\ b(4,2,m)\\
b(1,3,m)\\ b(2,3,m)\\ b(3,3,m)\\ b(4,3,m)\\
b(1,4,m)\\ b(2,4,m)\\ b(3,4,m)\\ b(4,4,m)
\end{bmatrix}
$$



$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0\\
0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0\\
0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
A & 0 & 0\\
0 & B & 0\\
0 & 0 & C
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt}\\ \frac{dq_2}{dt}\\ \vdots \\ \frac{dq_m}{dt} \end{bmatrix}
= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{B} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right.\\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} -\rho_1 \mathbf{1}_c & 0 & \cdots & 0\\ f_{12}\rho_2\mathbf{1}_c & -\rho_2\mathbf{1}_c & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{1m}\rho_m\mathbf{1}_c & f_{2m}\rho_m\mathbf{1}_c & \cdots & -\rho_m\mathbf{1}_c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_m \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{B}-\rho_1\mathbf{1} & 0 & \cdots & 0\\ f_{12}\rho_2\mathbf{1} & \mathbf{B}-\rho_2\mathbf{1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{1m}\rho_m\mathbf{1} & f_{2m}\rho_m\mathbf{1} & \cdots & \mathbf{B}-\rho_m\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_m \end{bmatrix}\\
&= \mathbf{A}\mathbf{q},
\end{aligned}
$$

Ένα μητρώο, έστω A, μπορεί να τεμαχιστεί σε «υπομητρώα» με διαμερισμό κατά γραμμές ή και στήλες π.χ.

$$\left(\begin{array}{c|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \hline \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \hline \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\right),$$

κ.λπ.
(Προσοχή: Ο διαμερισμός που μας ενδιαφέρει προς το παρόν διαπερνά το μητρώο από άκρο σε άκρο.)
Μπορούμε να γράψουμε το καθένα παραπανω συνοπτικά μέσω των πλοκάδων που το απαρτίζουν

Μετά μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{array}\right)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_{11} &= \alpha_{11} \\ A_{12} &= (\alpha_{12}, \alpha_{13}) \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Ο τεμαχισμός δεν είναι μοναδικός ούτε κατ' ανάγκη 2×2. Μπορούμε να επιλέξουμε πολλούς τεμαχισμούς (ό,τι ταιριάζει στην εφαρμογή μας).
- Το παραπάνω μητρώο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι 2×2 αν το δείτε 'από πολύ μακριά'. Μόνον που το κάθε στοιχείο του είναι και αυτό μητρώο. Αυτα τα υπομητρώα αναφέρονται συχνά και ως μπλοκ ενώ το αρχικό μητρώο θα λέγεται *σύνθετο*.
- Οι δείκτες των υπομητρώων αφορούν τη θέση τους στο σύνθετο υπομητρώο.

Αν

$$A = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

όπου οι πλοκάδες είναι 2×2 τότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \text{ όπου } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \text{ όπου } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Προσοχή: Τα 0 στο B είναι μηδενικά μητρώα και δεν έχουν όλα την ίδια διάσταση!

- Εκείνα που είναι στις θέσεις $(2,1), (3,1), (1,2), (1,3)$ είναι 4×4. Το 0 στη θέση $(2,3)$ είναι 4×2 και το 0 στη θέση $(3,2)$ είναι 2×4.
- Διαγώνιο κατά πλοκάδες, μη ομοιόμορφος διαμερισμός.
- όταν δεν είναι ακολουθεί από τις διαστάσεις των υπολοίπων μητρώων, υποδεικνύπουμε τα μεγέθη

$$B = \begin{pmatrix} D & 0_{4\times 4} & 0_{4\times 2} \\ 0_{4\times 4} & D & 0_{4\times 2} \\ 0_{2\times 4} & 0_{2\times 4} & A \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$$

Πράξεις μεταξύ σύνθετων μητρώων

Μπορούμε να προβούμε σε πράξεις με σύνθετα μητρώα,

1. εφόσον οι διαστάσεις όλων των επιμέρους υπομητρώων είναι συμβατές για τις πράξεις,
2. (οπότε) οι διαστάσεις των αρχικών μητρώων είναι επίσης συμβατές.
3. επομένως μπορούμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα βάσει πράξεων μεταξύ των πλοκάδων που αποτελούν τα πολλαπλασιαζόμενα μητρώα.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \cdots & A_{1,K}+B_{1,K} \\ A_{2,1}+B_{2,1} & \cdots & A_{2,K}+B_{2,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M,1}+B_{M,1} & \cdots & A_{M,K}+B_{M,K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,K} \\ A_{2,1} & \cdots & A_{2,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M,1} & \cdots & A_{M,K} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,K} & \\ B_{2,1} & \cdots & B_{2,K} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{M,1} & \cdots & B_{M,K} & \end{pmatrix}$$

Προσοχή: υπό την προϋπόθεση ότι τα ζεύγη των υπομητρώων $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ είναι σύμμορφα.

Πράξεις σύνθετων μητρώων: Παραδείγματα

- Πριν γράψαμε το B ως σύνθετο μητρώο με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Παρόλο, που η πράξη $B+B$ είναι πάντα εφικτή, δεν είναι δυνατόν να την εκφράσουμε ως πρόσθεση των παρακάτω εκφράσεων ως σύνθετα μητρώα: π.χ. οι δυο εκδοχές του B

$$\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & G \\ H & F \end{pmatrix}$$

όπου $E = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, F = A, G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}, H = 0, F = (0, A).$

- ενώ

$$A = \begin{pmatrix} I & I \\ I & D \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} D & 0 \\ I & D \end{pmatrix}$$

$$2A + C = A = \begin{pmatrix} 2I + D & 2I \\ 3I & 3D \end{pmatrix}$$

Αναστροφή σύνθετων μητρώων

Προκειμένου για σύνθετα μητρώα, η αναστροφή ορίζεται όπως θα περιμέναμε. Για παράδειγμα, αν έχει γίνει σωστά ο διαχωρισμός σε μπλοκ A_{ij} για το μητρώο A, τότε

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_{11}^\top & A_{21}^\top & \cdots & \\ A_{12}^\top & A_{22}^\top & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^\top = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right)^\top = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11}^\top & A_{21}^\top \\ A_{21}^\top & A_{22}^\top \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώου με διάνυσμα

$$A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ όπου } \; a_i \in \mathbb{R}^m \text{ και } x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

Το πλήθος στηλών του A πρέπει να είναι ίσο με το μέγεθος (πλήθος γραμμών) του x

Το γινόμενο b του μητρώου A με το διάνυσμα x, που γράφουμε απλά $b = Ax$ μπορεί να θεωρηθεί (ισοδύναμα) ότι είναι:

Παρένθεση/σχόλιο: Το σύμβολο «:» χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε ή και να επιλέξουμε στοιχεία ενός πίνακα (μεπτομέρειες σε επόμενη διάλεξη), Προς το παρόν να θεωρήσετε ότι $A_{:,j}$ είναι η στήλη j και $A_{i,:}$ είναι η γραμμή i του μητρώου A.

Δύο θεωρήσεις

1η θεώρηση (κατά στήλες) με γραμμικό συνδυασμό το διάνυσμα του γραμμικού συνδυασμού των στηλών του A με συντελεστές τα στοιχεία του x

$$b = \xi_1 A_{:,1} + \cdots + \xi_n A_{:,n}, \in \mathbb{R}^m,$$

2η θεώρηση (κατά γραμμές) με εσωτερικά γινόμενα το διάνυσμα που περιέχει για στοιχεία στις θέσεις $i = 1, \ldots, m$ το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του A με το x

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{1,:}x \\ A_{2,:}x \\ \vdots \\ A_{m,:}x \end{pmatrix}$$

Και στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\cdot\xi_1 + \alpha_{12}\cdot\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \alpha_{21}\cdot\xi_1 + \alpha_{22}\cdot\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\cdot\xi_1 + \alpha_{m2}\cdot\xi_2 + \cdots + \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Με γραμμικό συνδυασμό

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Με εσωτερικά γινόμενα

$$Ax = \begin{pmatrix} 50 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \\ 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων

Ως γενίκευση πολλαπλασιασμού μητρώου επί διάνυσμα Αν A είναι $m \times k$ και το B είναι $k \times n$ τότε

$$\begin{aligned} C &= AB = A\big(B_{:,1}, \cdots, B_{:,n}\big) \\ &= \big(AB_{:,1}, \cdots, AB_{:,n}\big) \end{aligned}$$

που είναι $m \times n$.

Εναλλακτικά

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,:} \\ \vdots \\ A_{m,:} \end{pmatrix} (B_{:,1}, \ldots, B_{:,n}) = \begin{pmatrix} A_{1,:}B_{:,1} & \cdots & A_{1,:}B_{:,n} \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ A_{m,:}B_{:,1} & \cdots & A_{m,:}B_{:,n} \end{pmatrix}$$

εναλλακτικά

$$AB = (A_{:,1}, \ldots, A_{:,k}) \begin{pmatrix} B_{1,:} \\ \vdots \\ B_{k,:} \end{pmatrix} = A_{:,1}B_{1,:} + \cdots + A_{:,k}B_{k,:}$$

Παράδειγμα: πολλαπλασιασμος σύνθετων μητρώων

Εφόσον οι τεμαχισμοί είναι σύμμορφοι,

$$\begin{pmatrix} B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21} & B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22} \\ B_{21}C_{11} + B_{22}C_{21} & B_{21}C_{12} + B_{22}C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων

Θεώρηση μέσω των σύνθετων μητρώων

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,N} \\ \boxed{C_{2,1}} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{M,1} & C_{M,2} & \cdots & C_{M,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,K} \\ \mathbf{A_{2,1}} & \mathbf{A_{2,2}} & \cdots & \mathbf{A_{2,k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M,1} & A_{M,2} & \cdots & A_{M,K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B_{1,1}} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,N} \\ \mathbf{B_{2,1}} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B_{K,1}} & B_{K,2} & \cdots & B_{K,N} \end{pmatrix}$$

Γενικός τύπος

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \cdots + A_{i,K}B_{K,j} \\ &= \sum_{s=1}^{k} A_{i,s}B_{s,j}, \text{ για } i = 1, \ldots, M \text{ και } j = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

Προσοχή: Για εγκυρότητα πρέπει οι διαστάσεις των υπομητρώων που πολλαπλασιάζονται να είναι συμβατές και οι όροι που αθροίζονται να είναι σύμμορφοι!

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\hline \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{array}\right),\ B=\left(\begin{array}{cc|c}\beta_{11}&\beta_{12}&\beta_{13}\\ \beta_{21}&\beta_{22}&\beta_{23}\\\hline \beta_{31}&\beta_{32}&\beta_{33}\end{array}\right),$$

$$C=\left(\begin{array}{c|cc}\gamma_{11}&\gamma_{12}&\gamma_{13}\\ \gamma_{21}&\gamma_{22}&\gamma_{23}\\\hline \gamma_{31}&\gamma_{32}&\gamma_{33}\end{array}\right),\ D=\left(\begin{array}{cc|c}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\\hline \delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\\ \delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\end{array}\right)$$

- τα παραπάνω μητρώα μπορούν να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους χωρίς πρόβλημα
- αν όμως θέλουμε να εκφράσουμε τα γινόμενα μέσω επιμέρους πράξεων των υπομητρώων που τα απαρτίζουν, από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ποιοί είναι έγκυροι; (να εξηγήσετε)

AA	AB	AC	AD	BB	BC	BD	CC	CD	DD
🙂	😕	😕	🙂	🙂	🙂	😕	😕	🙂	😕

Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Σημείωμα Αναφοράς

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης