# Γραμμική Άλγεβρα

## Ενότητα 1 : Εισαγωγή στη Γραμμική Αλγεβρα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

## Σκοπός Ενότητας

- Διανύσματα και Γραμμικοί Συνδιασμοί
- Νόρμες Διανυσμάτων και Εσωτερικά Γινόμενα
- Κανόνες για πράξεις Μητρώων
- Ανάστροφοι και Αντίστροφοι
- Μεταθέσεις
- Τεμαχισμός
- Εφαρμογές
  - Γραφήματα και Δίκτυα

# Περιεχόμενα

# Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για

- Τα Διαδικαστικά. Τα ΓΙΑΤΙ και τα ΤΙ του μαθήματος. Οι δυσκολίες. Η Γραμμική Άλγεβρα σαν σκάκι.
- Οι πρωταγωνιστές: Μητρώα και διανύσματα. Τα πιόνια: οι βαθμωτοί. Οι πολλαπλές προσωπικότητες (Μητρώα ως παράταξη διανυσμάτων ή βαθμωτών, τα διανύσματα ως παράταξη βαθμωτών ή ως εκφυλισμένα διανύσματα, οι βαθμωτοί ως εκφυλισμένα μητρώα, κ.λπ.).
- Συμβολισμός Householder.
- Ειδικά διανύσματα: Τα $e_j$. Ειδικά μητρώα: Μηδενικά, Ταυτοτικά, Διαγώνια, Τριγωνικά. Η "πράξη" της αναστροφής.
- Απλή αριθμητική: Άθροιση μητρώων, πολλαπλασιασμός με βαθμωτό.
- Γραμμικός συνδυασμός και διάνοιγμα διανυσμάτων.
- Πολλαπλασιασμός μητρώου με διάνυσμα, π.χ. $Bv$ και $u^\top B$: ορισμός μέσω γραμμικών συνδυασμών. Συνθήκη διαστάσεων για να είναι επιτρεπτός ο πολλαπλασιασμός.

# Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για

- Τα Διαδικαστικά. Τα ΓΙΑΤΙ και τα ΤΙ του μαθήματος. Οι δυσκολίες. Η Γραμμική Άλγεβρα σαν σκάκι.
- Οι πρωταγωνιστές: Μητρώα και διανύσματα. Τα πιόνια: οι βαθμωτοί. Οι πολλαπλές προσωπικότητες (Μητρώα ως παράταξη διανυσμάτων ή βαθμωτών, τα διανύσματα ως παράταξη βαθμωτών ή ως εκφυλισμένα διανύσματα, οι βαθμωτοί ως εκφυλισμένα μητρώα, κ.λπ.).
- Συμβολισμός Householder.
- Ειδικά διανύσματα: Τα $e_j$. Ειδικά μητρώα: Μηδενικά, Ταυτοτικά, Διαγώνια, Τριγωνικά. Η "πράξη" της αναστροφής.
- Απλή αριθμητική: Άθροιση μητρώων, πολλαπλασιασμός με βαθμωτό.
- Γραμμικός συνδυασμός και διάνοιγμα διανυσμάτων.
- Πολλαπλασιασμός μητρώου με διάνυσμα, π.χ. $Bv$ και $u^\top B$: ορισμός μέσω γραμμικών συνδυασμών. Συνθήκη διαστάσεων για να είναι επιτρεπτός ο πολλαπλασιασμός.

Σήμερα θα συζητήσουμε τα εξής:

- Πολλαπλασιασμός μητρώων (συνέχεια)
- Παραδείγματα
- Πολλαπλασιασμός μητρώων: ορισμός μέσω γραμμικών συνδυασμών.

# Υπό συζήτηση ενότητες

# Σημαντικές παρατηρήσεις

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Για να είναι έγκυρος ο πολλαπλασιασμός πρέπει να υπάρχουν στοιχεία στις κατάλληλες θέσεις.
Στην 1η περίπτωση το δεξιό διάνυσμα-στήλη πρέπει να έχει όσες γραμμές είναι οι στήλες του μητρώου.
Στην 2η περίπτωση το αριστερό διάνυσμα-γραμμή πρέπει να έχει όσες στήλες είναι οι γραμμές του μητρώου.
Πρόταση

Αν το $A$ είναι $m \times k$ και το $B$ είναι $\hat{k} \times n$ τότε ο πολλαπλασιασμός $AB$ είναι έγκυρος αν και μόνον αν $k = \hat{k}$, οπότε το αποτέλεσμα θα είναι $m \times n$.

# Παρατηρήσεις I

Είδαμε ότι ο πολλαπλασιασμός εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός π.χ. $c = Ax$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αλλά θα μπορούσαμε να γράψουμε και

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$c = Ax = \hat{A}\hat{x}, \text{ όπου } \hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Τα μητρώα $A, \hat{A}$ και τα διανύσματα $x, \hat{x}$ σχετίζονται μεταξύ τους:

- Το $\hat{A}$ έχει προέλθει από εναλλαγή της στήλης 1 με 2 του $A$.

# Παρατηρήσεις ΙΙ

- Το $\hat{x}$ έχει προέλθει από εναλλαγή της γραμμής 1 με 2 του $x$.

Οι εναλλαγές αυτές μπορούν να κωδικοποιηθούν μέσω ενός μητρώου μετάθεσης και πολλαπλασιασμούς με αυτό:
Μητρώο μετάθεσης (η ειδική περίπτωση εδώ καλείται και μητρώο εναλλαγής)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2{}^\top \\ e_1^\top \end{pmatrix}$$

Επαληθεύστε ότι:

$$\hat{x} = Px \text{ και } \hat{A} = AP$$

Παρατήρηση: Γράφουμε $AP$ εννοώντας τον πολλαπλασιασμό του μητρώου $A$ με το μητρώο $P$. Αυτή τη στιγμή θεωρήστε αυτό ως τις στήλες που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του $A$ με τις στήλες του $P = (e_1, e_2)$. Δηλ. η 1η στήλη του $\hat{A}$ είναι το $Ae_1$ και η 2η στήλη του $\hat{A}$ είναι το $A_2$.
Συνοπτικά $\hat{A} = (Ae_1, Ae_2)$.
Προσοχή: Επαληθεύστε ότι όταν το μητρώο μετάθεσης πολλαπλασιάζει από τα αριστερά (δεξιά), γίνεται μετάθεση των γραμμών (στηλών).

# Πολλαπλασιασμός μητρώων

Πώς πολλαπλασιάζουμε μητρώα μεταξύ τους; α) ο πολλαπλασιασμός δεν είναι πάντα έγκυρος. β) Όταν είναι, υπάρχουν πολλές ισοδύναμες ερμηνείες.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Το αριστερό μητρώο επί κάθε διάνυσμα-στήλη του δεξιού μητρώο

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

γιατί

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -14 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

# Πολλαπλασιασμός μητρώων

Πώς πολλαπλασιάζουμε μητρώα μεταξύ τους; α) ο πολλαπλασιασμός δεν είναι πάντα έγκυρος. β) Όταν είναι, υπάρχουν πολλές ισοδύναμες ερμηνείες.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Κάθε διάνυσμα-γραμμή του αριστερού μητρώου επί το δεξιό μητρώο

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

γιατί

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

# Πολλαπλασιασμός μητρώων

$$\begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -14 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ονομάζουμε τα παραπάνω μητρώα $A$, $B$ και το γινόμενο $C$ οπότε γράφουμε $C = AB$.
Μπορούμε να υπολογίσουμε το $BA$;

1. Το πλήθος στηλών του $B$ είναι όσες οι γραμμές του $A$ άρα ο πολλαπλασιασμός είναι έγκυρος.
2. Με τι ισούται; Χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις παραπάνω μεθόδους:

$$\begin{pmatrix} -5 & -11 \\ -11 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>ΠΡΟΣΕΞΤΕ</u> Γενικά $AB \neq BA$. ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ!

# Αλυσίδα πολλαπλασιασμών - Προσεταιριστική ιδιότητα ΟΚ

Δίδονται μητρώα $A, B, C$, τέτοια ώστε το $A, B$ να μπορούν να πολλαπλασιαστούν και το ίδιο το $C$ με το $AB$, τότε

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

και με αντίστοιχους όρους θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε

$$F = (((A \cdot B) \cdot C) \cdot D) \cdot E$$

με όποια σειρά θέλουμε όσον αφορά στις παρενθέσεις. Για παράδειγμα

$$F = A \cdot (B \cdot (C \cdot (D \cdot E)))$$

Όμως απαγορεύεται να αλλάξουμε τη σειρά των μητρώων στο γινόμενο! π.χ.

$$(((A \cdot B) \cdot C) \cdot D) \cdot E \neq (((B \cdot A) \cdot C) \cdot D) \cdot E$$

# Ιδιαιτερότητες

Θυμηθείτε Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ τότε $\alpha\beta \neq 0$.

# Ιδιαιτερότητες

<u>Θυμηθείτε</u> Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ τότε $\alpha\beta \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>ΠΡΟΣΕΞΤΕ</u> μπορεί να ισχύει ότι $AB = 0$ ενώ $A \neq 0$ και $B \neq 0$.

# Ιδιαιτερότητες

Θυμηθείτε Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ τότε $\alpha\beta \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ μπορεί να ισχύει ότι $AB = 0$ ενώ $A \neq 0$ και $B \neq 0$.
... και επιβεβαιώνοντας την έλλειψη αντιμεταθετικότητας:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

# Ιδιαιτερότητες

Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha\beta = \alpha\gamma$ τότε $\beta = \gamma$.

# Ιδιαιτερότητες

Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha\beta = \alpha\gamma$ τότε $\beta = \gamma$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ μπορεί να ισχύει ότι $AB = AC$ ενώ $B \neq C$.

# Ορολογία

- Πραγματικό διάνυσμα = Διάνυσμα με στοιχεία που λαμβάνουν πραγματικές τιμές
- Μιγαδικό διάνυσμα = Διάνυσμα με στοιχεία που λαμβάνουν μιγαδικές τιμές
- Ο πραγματικός ευκλείδειος χώρος, $\mathbb{R}^n$, αποτελείται από το σύνολο των $n$-άδων ($n$-tuples) πραγματικών αριθμών, (το σύμβολο " :" σηματοδοτεί ορισμό του αριστερού μέλους με το δεξιό):

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

- Ορίζουμε επίσης το

$$\mathbb{C}^n := \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 \in \mathbb{C}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}\}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι όλα τα διανύσματα στα οποία αναφερόμαστε είναι σύμμορφα άρα μπορούν να συνδυαστούν γραμμικά.

## Εσωτερικό γινόμενο: μικρή υπενθύμιση από τη Φυσική

Στον Ευκλείδειο χώρο 2 διαστάσεων: Αν

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Αν $a, b \in \mathbb{R}^2$ τότε

$$\langle a, b \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

Ορολογία: Από διανύσματα παράγεται βαθμωτός. Το εσωτερικό γινόμενο λέγεται επίσης βαθμωτό γινόμενο ή στικτό γινόμενο. (που είναι μεταφράσεις των inner, scalar, dot product αντίστοιχα.)

# Εσωτερικό γινόμενο, μήκος, μοναδιαίο διάνυσμα

## Εσωτερικό (ή βαθμωτό) γινόμενο

Ορίζεται ως οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση $\langle\ ,\ \rangle$ (δηλ. το αποτέλεσμα είναι βαθμωτός) ενός διατεταγμένου ζεύγους διανυσμάτων $(a, b)$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle &= \overline{\langle b, a\rangle} \\ \langle \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2, b\rangle &= \xi_1\langle a_1, b\rangle + \xi_2\langle a_2, b\rangle \\ \langle a, a\rangle &\geq 0 \text{ και } \langle a, a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

## Μήκος πραγματικού διανύσματος

Το μήκος διανύσματος $a$ (επίσης, ‘ευκλείδεια νόρμα’ ή ‘νόρμα-2’) ορίζεται ως[1].

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}$$

[1]Προσέξτε: από αυτά που είδαμε για το εσωτερικό γινόμενο, το όρισμα θα είναι πραγματικός μη αρνητικός αριθμός. Επίσης εδώ εννοείται η θετική τετραγωνική ρίζα.

# Εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο

Αν $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ τότε τα διανύσματα είναι της μορφής

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

και ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως το βαθμωτό

$$\langle a, b \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

Στο λογισμό μητρώων: Γράφουμε $a^\top b$ όπου τα $a, b$ είναι διανύσματα (στήλες).

Άσκηση: Να επαληθεύσετε ότι ο παραπάνω τύπος ικανοποιεί τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

# Μαθηματικές παρατηρήσεις

Έστω ότι υπάρχει κάποιος 'χώρος'[2] $\mathcal{V}$ από τον οποίο αντλούμε διανύσματα. Επίσης συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_+$ τους πραγματικούς μη αρνητικούς αριθμούς.

- Όταν τα διανύσματα είναι πραγματικά, προσέξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τη συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$:
  - συμμετρία
  - γραμμικότητα ως προς κάθε μεταβλητή (διγραμμικότητα)
  - αυστηρή θετικότητα του $\langle a, a \rangle$ για κάθε μη μηδενικό $a$.
- Πιο γενικά, η νόρμα ($\|\cdot\|$) μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ για την οποία ισχύει ότι $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x$ στο χώρο και ότι $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

[2] Σύντομα θα δούμε τι χώρος είναι αυτός (γραμμικός διανυσματικός χώρος)

## Προσοχή στο σώμα ορισμού και στο είδος της νόρμας!

Ποιό είναι το μήκος του $x = [4, -1, \sqrt{8}]$;

- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle >} = \sqrt{4^2 + 1 + 8} = 5$
- Όμως υπάρχουν και άλλες νόρμες: $\|x\|_1 = |4| + |-1| + |\sqrt{8}|$, $\|x\|_\infty = \max\{|4|, |-1|, |\sqrt{8}|\} = 4$.
- Γενικότερα $\|x\|_p = \left(|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p\right)^{1/p}$ για θετικό ακέραιο $p$
- $\|x\|_0 = (\#$ μη μηδενικών στοιχείων του $x)$

Η περίπτωση των μιγαδικών διανυσμάτων: Ποια είναι η Ευκλείδεια νόρμα του $x = [1, \iota]$;

- Είναι $\sqrt{1 + \iota^2}$;
- ΟΧΙ γιατί τότε θα είχε μηδενική νόρμα-2 !!! (αντιβαίνει στον κανόνα ότι το μόνο το μηδενικό διάνυσμα έχει μηδέν νόρμα).
- Για να αποφευχθεί αυτό το πρόβλημα, ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου στον ευκλείδειο μιγαδικό χώρο είναι λίγο διαφορετικός.
- Βλ. επόμενη διαφάνεια και σελ. 614-615 του βιβλίου.

# Στον Ευκλείδειο χώρο

- Για πραγματικά διανύσματα (δηλ. διανύσματα με πραγματικά στοιχεία)

$$\langle a, b \rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j$$

$$\|a\| = \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right)^{1/2}$$

- Για μιγαδικά διανύσματα (δείτε και παρακάτω)

$$\langle a, b \rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j}$$

$$\|a\| = \left( \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}$$

# Μοναδιαίο διάνυσμα

Μοναδιαίο αποκαλείται κάθε διάνυσμα μήκους 1. Οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα μπορεί να «κανονικοποιηθεί» ώστε να παραχθεί ένα «συγγραμμικό» διάνυσμα μήκους 1:

$$\hat{a} = \frac{1}{\|a\|} a$$

Παράδειγμα: Αν $a = [3, 4]^\top$ τότε

$$\hat{a} = \frac{1}{\|a\|} a = \frac{1}{\sqrt{5}} a = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες

**Συμμετρία** $\langle a, b\rangle = \overline{\langle b, a\rangle}$

**Διγραμμικότητα** $\langle \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2, b\rangle = \xi_1\langle a_1, b\rangle + \xi_2\langle a_2, b\rangle$

**Θετικότητα** $\langle a, a\rangle \geq 0$ και ισότητα με 0 αν και μόνον αν $a = 0$.

## Εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο

- Για πραγματικά διανύσματα (δηλ. διανύσματα με πραγματικά στοιχεία)

$$\langle a, b\rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j$$

$$\|a\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^{1/2}$$

- Για μιγαδικά διανύσματα (δείτε και παρακάτω)

$$\langle a, b\rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j}$$

# Στον μιγαδικό ευκλείδειο χώρο $\mathbb{C}^n$

Ο χώρος που αποτελείται από το σύνολο των σημείων ($n$-tuples) του Καρτεσιανού γινομένου

$$\mathbb{C}^n := \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 \in \mathbb{C}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}\}$$

Τότε

$$\langle a, b \rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta}_j$$

Προσέξτε ότι η παραπάνω τροποποίηση είναι απαραίτητη, ειδάλλως μπορεί να ισχύει ότι $\langle a, a \rangle < 0$, κάτι που δεν θέλουμε. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούσαμε τον ορισμό για τα πραγματικά διανύσματα για το διάνυσμα $a = [\iota, 0]$, τότε θα είχαμε για μήκος τη τετραγωνική ρίζα του $\iota \cdot \iota + 0 = -1$. Με τον τροποποιημένο ορισμό, $\langle a, a \rangle = (-\iota)\iota + 0 = 1$ επομένως δεν υπάρχει πρόβλημα (προκύπτει ότι $\|a\| = 1$.)

# Βιβλιογραφία I

G. Strang.
*Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.*
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

# Σημείωμα Αναφοράς

**Copyright** Πανεπιστήμιο Πατρών - Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

# Τέλος Ενότητας