Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα 1 : Εισαγωγή στη Γραμμική Αλγεβρα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

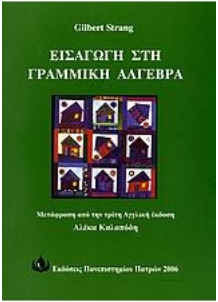
Σκοπός Ενότητας

- Διανύσματα και Γραμμικοί Συνδιασμοί
- Νόρμες Διανυσμάτων και Εσωτερικά Γινόμενα
- Κανόνες για πράξεις Μητρώων
- Ανάστροφοι και Αντίστροφοι
- Μεταθέσεις
- Τεμαχισμός
- Εφαρμογές
    - Γραφήματα και Δίκτυα

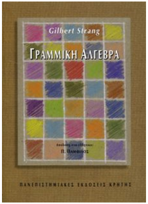
Περιεχόμενα

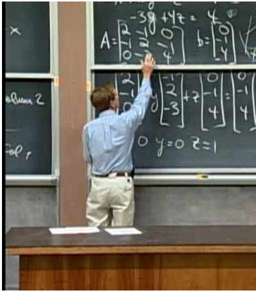
ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ

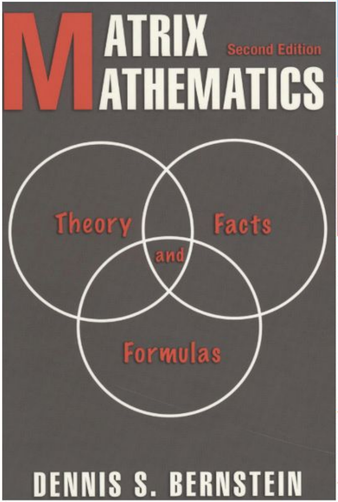
Πηγές


Gilbert Strang
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ


Γ. ΔΟΝΑΤΟΣ - Μ. ΑΔΑΜ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ


Gilbert Strang
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ





The idea for this book began with the realization that at the heart of the solution to many problems in science, mathematics, and engineering often lies a "matrix fact," that is, an identity, inequality, or property of matrices that is crucial to the solution of the problem. Although there are numerous excellent books on

Viewed as an extension of scalar mathematics, matrix mathematics provides the means to manipulate and analyze multidimensional quantities. Matrix mathematics thus provides powerful tools for a broad range of problems in science and engineering. For example, the matrix-based analysis of systems of ordinary differential equations accounts for interaction among all of the state variables. The discretization of partial differential equations by means of finite differences and finite elements yields linear algebraic or differential equations whose matrix structure reflects the nature of physical solutions [1269]. Multivariate probability theory and statistical analysis use matrix methods to represent probability distributions, to compute moments, and to perform linear regression for data analysis [517, 621, 671, 720, 972, 1212]. The study of linear differential equations [709, 710, 746] depends heavily on matrix analysis, while linear systems and control theory are matrix-intensive areas of engineering [3, 68, 146, 150, 319, 321, 356, 379, 381, 456, 515, 631, 764, 877, 890, 960, 1121, 1174, 1182, 1228, 1232, 1243, 1368, 1402, 1490, 1535]. In addition, matrices are widely used in rigid body dynamics [28, 745, 753, 811, 829, 874, 995, 1053, 1095, 1096, 1216, 1231, 1253, 1384], structural mechanics [888, 1015, 1127], computational fluid dynamics [313, 492, 1460], circuit theory [32], queuing and stochastic systems [659, 944, 1061], econometrics [413, 973, 1146], geodesy [1272], game theory [229, 924, 1264], computer graphics [65, 511], computer vision [966], optimization [259, 382, 978], signal processing [720, 1193, 1395], classical and quantum information theory [361, 720, 1069, 1113], communications systems [800, 801], statistics [594, 671, 973, 1146, 1208], statistical mechanics [18, 163, 164, 1406], demography [305, 828], combinatorics, networks, and graph theory [132, 169, 183, 227, 239, 270, 272, 275, 310, 311, 343, 282, 371, 415, 438, 494, 514, 571, 616, 654, 720, 868, 945, 956, 1172, 1421], optics [563, 677, 820], dimensional analysis [658, 1283], and number theory [865].

The Undergraduate Linear Algebra Curriculum: A View from a Client Discipline, Computer Graphics·

Rosemary E. Chang
Research and Development
Silicon Graphics Computer Systems

Linear Algebra as the Language of Graphics

As computer graphics matured, it became more complicated. It has a symbiotic relationship with display and computer hardware. For this discussion I will focus on the real-time 3D rendering of images. *Real-time* means the computations necessary to compute a scene at the rate of 60 frames per second. The 3D implies that the images we capture are of inherently 3-

Linear Algebra Use at Boeing: Implications for Undergraduate Education·

David P. Young
Boeing Computer Services

All Areas of Computational Physics Use Linear Algebra

About 200 employees at Boeing are working in computational physics. The areas represented at Boeing are aerodynamics, structures, acoustics, electromagnetics, and geometry (CAD/CAM). There are several types of positions held by people with technical degrees: engineers "in the trenches", research and development scientists, and management and sales personnel who often have technical backgrounds.

Matrix factorizations and social network graph analysis

POSTED BY BRIAN ROWE IN CUNY MS DATA ANALYTICS, MATHEMATICS, R ≈ LEAVE A COMMENT

The $25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google*

Kurt Bryan[†]
Tanya Leise[‡]

COMMUNICATIONS OF THE ACM

HOME | CURRENT ISSUE | NEWS | BLOGS | OPINION | RESE

Home / Magazine Archive / October 2012 (Vol. 55, No. 10) / A Fast Solver for a Class of Linear Systems / Full Tex

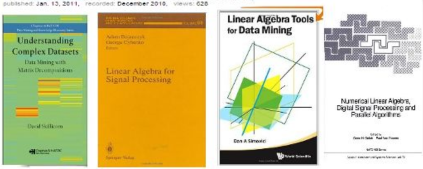
RESEARCH HIGHLIGHTS

A Fast Solver for a Class of Linear Systems

By Ioannis Koutis, Gary L. Miller, Richard Peng
Communications of the ACM, Vol. 55 No. 10, Pages 99-107
10.1145/2347736.2347759

Linear Algebra and Machine Learning of Large Informatics Graphs

author: Michael Mahoney, Department of Computer Science, Stanford University
published: Jan. 13, 2011, recorded: December 2010, views: 628



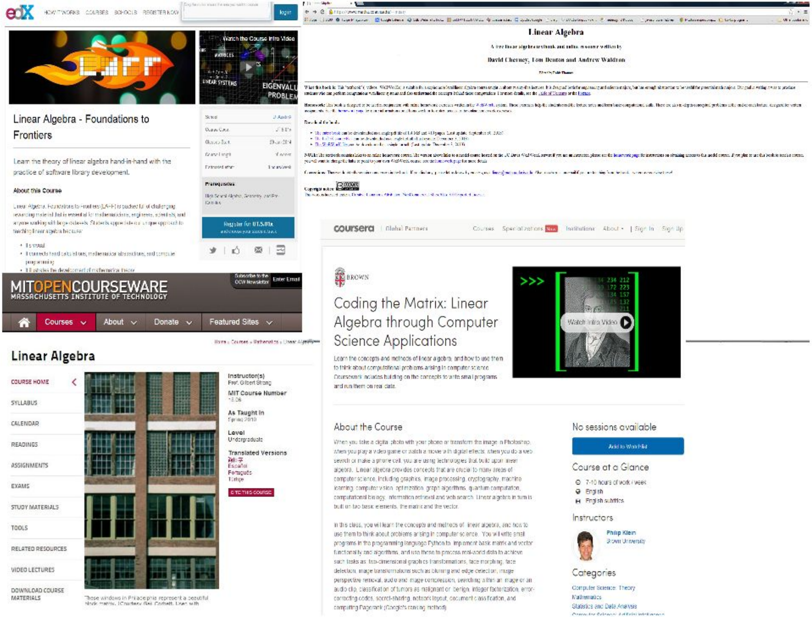
2012 SIAM Conference on Applied Linear Algebra

Welcome to 2012 SIAM Conference on Applied Linear Algebra Webpage

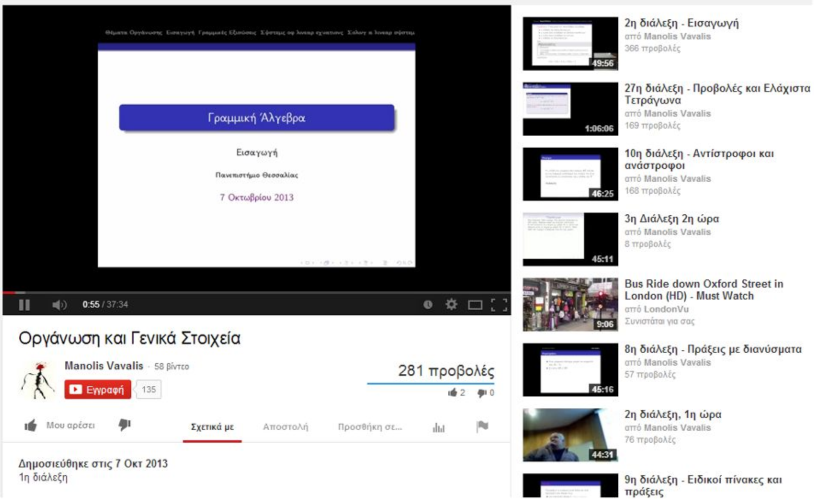
June 18th-22nd, Valencia, Spain.

Here you find all the information about the Conference.

Linear algebra is an important area of mathematics and it is at the heart of many scientific, engineering, and industrial applications. Research and development in linear algebra include theoretical studies, algorithmic designs and implementations on advanced computer architectures, and applications to various disciplines. The SIAM Conferences on Applied Linear Algebra, organized by SIAM every three years, are the premier international conferences on applied linear algebra, which bring together diverse researchers and practitioners from academia, research laboratories, and industries all over the world to present and discuss their latest work and results on applied linear algebra.



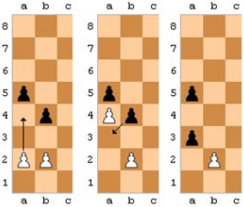
edX
Watch the Course Intro Video
MATRICES
LINEAR SYSTEMS
EIGENVALU
PROBLEM
Linear Algebra - Foundations to Frontiers
Learn the theory of linear algebra hand-in-hand with the practice of software library development.
About this Course
Prerequisites
Linear Algebra
David Cherney, Tom Denton and Andrew Waldron
coursera
Global Partners
Courses
Specializations
Institutions
About
Sign In
Sign Up
BROWN
Coding the Matrix: Linear Algebra through Computer Science Applications
Learn the concepts and methods of linear algebra, and how to use them to think about computational problems arising in computer science. Coursework includes building on the concepts to write small programs and run them on real data.
Watch Intro Video
About the Course
When you take a digital photo with your phone or transform the image in Photoshop, when you play a video game or watch a movie with digital effects, when you do a web search or make a phone call, you are using technologies that build upon linear algebra. Linear algebra provides concepts that are crucial to many areas of computer science, including graphics, image processing, cryptography, machine learning, computer vision, optimization, graph algorithms, quantum computation, computational biology, information retrieval and web search. Linear algebra in turn is built on two basic elements, the matrix and the vector.
In this class, you will learn the concepts and methods of linear algebra, and how to use them to think about problems arising in computer science. You will write small programs in the programming language Python to implement basic matrix and vector functionality and algorithms, and use these to process real-world data to achieve such tasks as: two-dimensional graphics transformations, face morphing, face detection, image transformations such as blurring and edge detection, image perspective removal, audio and image compression, searching within an image or an audio clip, classification of tumors as malignant or benign, integer factorization, error-correcting codes, secret-sharing, network layout, document classification, and computing Pagerank (Google's ranking method).
No sessions available
Add to Watchlist
Course at a Glance
7-10 hours of work / week
English
English subtitles
Instructors
Philip Klein
Brown University
Categories
Computer Science: Theory
Mathematics
Statistics and Data Analysis
MITOPENCOURSEWARE
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Courses
About
Donate
Featured Sites
Linear Algebra
COURSE HOME
SYLLABUS
CALENDAR
READINGS
ASSIGNMENTS
EXAMS
STUDY MATERIALS
TOOLS
RELATED RESOURCES
VIDEO LECTURES
DOWNLOAD COURSE MATERIALS
Instructor(s)
Prof. Gilbert Strang
MIT Course Number
As Taught In
Level
Undergraduate
Translated Versions
Español
Português
Türkçe
CITE THIS COURSE



Γραμμική Άλγεβρα
Εισαγωγή
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
7 Οκτωβρίου 2013
0:55 / 37:34
Οργάνωση και Γενικά Στοιχεία
Manolis Vavalis · 58 βίντεο
Εγγραφή 135
281 προβολές
2 0
Μου αρέσει
Σχετικά με
Αποστολή
Προσθήκη σε...
Δημοσιεύθηκε στις 7 Οκτ 2013
1η διάλεξη
2η διάλεξη - Εισαγωγή
από Manolis Vavalis
366 προβολές
49:56
27η διάλεξη - Προβολές και Ελάχιστα Τετράγωνα
από Manolis Vavalis
169 προβολές
1:06:06
10η διάλεξη - Αντίστροφοι και ανάστροφοι
από Manolis Vavalis
168 προβολές
46:25
3η Διάλεξη 2η ώρα
από Manolis Vavalis
8 προβολές
45:11
Bus Ride down Oxford Street in London (HD) - Must Watch
από LondonVu
Συνιστάται για σας
9:06
8η διάλεξη - Πράξεις με διανύσματα
από Manolis Vavalis
57 προβολές
45:16
2η διάλεξη, 1η ώρα
από Manolis Vavalis
76 προβολές
44:31
9η διάλεξη - Ειδικοί πίνακες και πράξεις

Η Γραμμική Άλγεβρα σαν σκάκι

... παίκτες, πιόνια, πίνακες, και κανόνες



Περιεχόμενα

Ενότητα 1

Ορολογία της περιοχής

Διανύσματα και διανυσματικοί χώροι

υπόχωροι, γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις, διάσταση

Μητρώα ή μητρώα (ενίοτε πίνακες)

αλγεβρικές πράξεις, «ειδικός» πολλαπλασιασμός

Γεωμετρία

αντιστοιχίσεις στο `χώρο', αναλυτική γεωμετρία

Λογισμός μητρώων

Πράξεις, συναρτήσεις, διαφορικός λογισμός

J. L. Dorier, *The Teaching of Linear Algebra in Question*, Kluwer, 2000.

1. DIAGNOSES - EPISTEMOLOGICAL ISSUES

There is a wide consensus to say that both learning and teaching linear algebra are difficult. Dorier, Robert, Robinet and Rogalski have pointed out the resistance of the obstacle of formalism, which Hillel and Sierpinska have also experienced in their studies. Bardy et al. insist on the feeling of many students of being overwhelmed with new definitions or just words to learn, as if they had to learn a new language. These difficulties are certainly common to all higher algebra domains. However, in most countries, linear algebra is the first contact of students with such a field, without any preparation for formalism. The epistemological analysis of the historical development of linear algebra, presented by Dorier, enlightens us on the reason for these difficulties, and gives us some keys to deal with this problem. It suggests that formalism is inherent to linear algebra since the theory of vector space is a unifying and generalizing theory which emerged more from organizational necessities than just new problems to be solved. On the educational side, three slightly different, yet complementary, answers are given.

- Dorier et al. show the necessity for students to get involved, along with their mathematical work, in a reflexive analysis on the objects they manipulate, in order to understand the unifying and generalyzing aspect of linear algebra concepts. This is what leads these researchers to the concept of 'meta' activities.
- Harel suggests a progressive approach according to three pedagogical principles. Concepts to be modeled in terms of linear algebra should first acquire a status of conceptual entities in the eyes of students (Concreteness Principle). Then, students should see a need for the building of linear algebra concepts (Necessity

- Dorier et al. show the necessity for students to get involved, along with their mathematical work, in a reflexive analysis on the objects they manipulate, in order to understand the unifying and generalyzing aspect of linear algebra concepts. This is what leads these researchers to the concept of 'meta' activities.

... η μάθηση και η διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας είναι δύσκολες διαδικασίες

1. DIAGNOSES - EPISTEMOLOGICAL ISSUES

There is a wide consensus to say that both learning and teaching linear algebra are difficult. Dorier, Robert, Robinet and Rogalski have pointed out the resistance of the obstacle of formalism, which Hillel and Sierpinska have also experienced in their studies. Bardy et al. insist on the feeling of many students of being overwhelmed with new definitions or just words to learn, as if they had to learn a new language. These difficulties are certainly common to all higher algebra domains. However, in most countries, linear algebra is the first contact of students with such a field, without any preparation for formalism. The epistemological analysis of the historical development of linear algebra, presented by Dorier, enlightens us on the reason for these difficulties, and gives us some keys to deal with this problem. It suggests that formalism is inherent to linear algebra since the theory of vector space is a unifying and generalizing theory which emerged more from organizational necessities than just new problems to be solved. On the educational side, three slightly different, yet complementary, answers are given.

- Dorier et al. show the necessity for students to get involved, along with their mathematical work, in a reflexive analysis on the objects they manipulate, in order to understand the unifying and generalyzing aspect of linear algebra concepts. This is what leads these researchers to the concept of 'meta' activities.
- Harel suggests a progressive approach according to three pedagogical principles. Concepts to be modeled in terms of linear algebra should first acquire a status of conceptual entities in the eyes of students (Concreteness Principle). Then, students should see a need for the building of linear algebra concepts (Necessity

- Dorier et al. show the necessity for students to get involved, along with their mathematical work, in a reflexive analysis on the objects they manipulate, in order to understand the unifying and generalyzing aspect of linear algebra concepts. This is what leads these researchers to the concept of 'meta' activities.

1. DIAGNOSES - EPISTEMOLOGICAL ISSUES

There is a wide consensus to say that both learning and teaching linear algebra are difficult. Dorier, Robert, Robinet and Rogalski have pointed out the resistance of the obstacle of formalism, which Hillel and Sierpinska have also experienced in their studies. Bardy et al. insist on the feeling of many students of being overwhelmed with new definitions or just words to learn, as if they had to learn a new language. These difficulties are certainly common to all higher algebra domains. However, in most countries, linear algebra is the first contact of students with such a field, without any preparation for formalism. The epistemological analysis of the historical

2. COGNITIVE FLEXIBILITY

Linear algebra is an 'explosive compound' of languages, settings and systems of representation. There is the geometric language of lines and planes, the algebraic language of linear equations, n-tuples and matrices, the 'abstract' language of vector spaces and linear transformations. There are the settings of geometry, of algebra, but also of graphical representations which allow a metaphoric use of geometry in higher dimensional spaces. There are the 'graphical', the 'tabular' and the 'symbolic' registers of the languages of linear algebra. There are also the 'Cartesian' and the 'parametric' representations of subspaces. Teachers and texts constantly move

1. DIAGNOSES - EPISTEMOLOGICAL ISSUES

There is a wide consensus to say that both learning and teaching linear algebra are difficult. Dorier, Robert, Robinet and Rogalski have pointed out the resistance of the obstacle of formalism, which Hillel and Sierpinska have also experienced in their studies. Bardy et al. insist on the feeling of many students of being overwhelmed with new definitions or just words to learn, as if they had to learn a new language. These difficulties are certainly common to all higher algebra domains. However, in most countries, linear algebra is the first contact of students with such a field, without any preparation for formalism. The epistemological analysis of the historical

2. COGNITIVE FLEXIBILITY

Linear algebra is an 'explosive compound' of languages, settings and systems of representation. There is the geometric language of lines and planes, the algebraic language of linear equations, n-tuples and matrices, the 'abstract' language of vector spaces and linear transformations. There are the settings of geometry, of algebra, but also of graphical representations which allow a metaphoric use of geometry in higher dimensional spaces. There are the 'graphical', the 'tabular' and the 'symbolic' registers of the languages of linear algebra. There are also the 'Cartesian' and the 'parametric' representations of subspaces. Teachers and texts constantly move

Dorier et al. show the necessity for students to get involved, along with their mathematical work, in a reflexive analysis on the objects they manipulate, in order to understand the unifying and generalyzing aspect of linear algebra concepts. This is what leads these researchers to the concept of 'meta' activities.

Leibnitz (1679)

... Δεν είμαι ακόμα ικανοποιημένος με την άλγεβρα γιατί δεν οδηγεί στις βραχύτερες μεθόδους και στις πιο όμορφες κατασκευές στη γεωμετρία. ... Πιστεύω ότι όσον αφορά στη γεωμετρία, χρειάζεται ακόμα μια ανάλυση που είναι γεωμετρική ή γραμμική και που εκφράζει άμεσα τη θέση όπως η άλγεβρα εκφράζει άμεσα το μέγεθος.

Γεωμετρική ερμηνεία μιγαδικών

Caspar Wessel (1745-1818) ``On the Analytic Representation of Direction'', 1799

> *Η παρούσα προσπάθεια αναφέρεται στο ερώτημα, πώς να αναπαραστήσουμε την κατεύθυνση (direction) αναλυτικά ...*
> *... Δύο ευθύγραμμα τμήματα προστίθενται αν τις ενώσουμε έτσι ώστε η δεύτερη γραμμή να αρχίζει εκεί που τελειώνει η πρώτη και μετά σχηματίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την αρχή της πρώτης γραμμής με το τέλος της δεύτερης.*

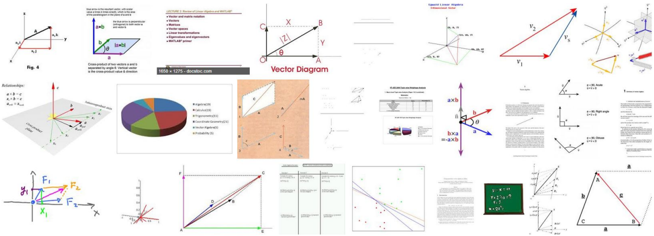
Argand (1806): Essai sur une maniere de representer les quantites imaginaires dans les constructions geometriques γεωμετρία μιγαδικών και πράξεών τους.

Αριθμοί σε 4 διαστάσεις

Τα τετραδόνια quaternions του Hamilton

In the THEORY OF SINGLE NUMBERS, the symbol $\sqrt{-1}$ is absurd, and denotes an IMPOSSIBLE EXTRACTION, or a merely IMAGINARY NUMBER; but in the THEORY OF COUPLES, the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a POSSIBLE EXTRACTION, or a REAL COUPLE, namely ... the principal square root of the couple $(-1, 0)$. In the latter theory, therefore, though not in the former, this sign may be properly employed; and we may write, if we choose, for any couple (a_1, a_2) whatever $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$ ... ``Theory of conjugate functions, or algebraic couples'' (1837)

Διανύσματα



- Διανύσματα ως γεωμετρικά αντικείμενα
- Σημεία στο «χώρο»
- Κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα
- Ενδεχομένως δείχνουν από συγκεκριμένη «αρχή» σε ένα άκρο
- Διανυσματικός λογισμός

Πολλαπλές παράλληλες υπάρξεις των πρωταγωνιστών

Οι πρωταγωνιστές του παιχνιδιού συνυπάρχουν: αριθμητική (διατεταγμένη n-άδα αριθμών, πίνακας $m \times n$ αριθμών), γεωμετρική (σημείο στο χώρο, ποσότητα με κατεύθυνση και μήκος), αφηρημένη (στοιχείο ειδικού συνόλου που ονομάζεται διανυσματικός χώρος, γραμμικός μετασχηματισμός).

Τρόποι περιγραφής στη Γραμμική Άλγεβρα (Ηιλ00)

Γεωμετρικός: με τη γλώσσα και τις έννοιες του γνωστού Ευκλείδειου χώρου (2 ή 3 διαστάσεις): κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα, σημείο, γραμμή, επίπεδο, γεωμετρικός μετασχηματισμός.

Αλγεβρικός: με τη γλώσσα και τις έννοιες της θεωρίας εξειδικευμένης στον $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$: π.χ. n-άδες, μήτρες/μητρώα, λύσεις γραμμικού συστήματος, χώρος γραμμών, χώρος στηλών.

Αφαιρετικός: με τη γλώσσα και τις έννοιες της γενικής θεωρίας: π.χ. διανυσματικος χώρος, υπόχωρος, γραμμικό διάνοιγμα, διάσταση, τελεστής, πυρήνας.

Πρωταγωνιστές: Μητρώα ή Μήτρες

Το είναι; Συστοιχία (mn-άδα) στοιχείων, $\alpha_{i,j}$, από μία αλγεβρική δομή. (Ένας αλγεβριστής θα έλεγε, για να είναι όσο γενικοί θέλουν να είναι οι Μαθηματικοί, ότι τα στοιχεία προέρχονται από έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο ή από ένα σώμα. Εδώ αρκεί να σκέφτεστε πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς, οπότε τα στοιχεία ανήκουν στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$.[1] Τα στοιχεία δεικτοδοτούνται με 2 δείκτες (συνήθως υποδείκτες) και γράφονται σε μορφή πίνακα m γραμμών, n στηλών:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

[1] Το σύνολο των πραγματικών με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ και τους κανόνες που τις διέπουν είναι μία περίπτωση αλγεβρικού σώματος. Το ίδιο και οι μιγαδικοί.

- Λέμε ότι το A είναι ένα μητρώο m γραμμών και n στηλών, ή ένα μητρώο μεγέθους $m \times n$.
- Όταν αναφερόμαστε στη θέση ενός στοιχείου στον πίνακα (π.χ. με δείκτες), πρώτα αναφέρουμε τη γραμμή και μετά τη στήλη. Έτσι γίνεται και η δεικτοδότηση.
- Τα $\alpha_{i,j}$ λέγονται τα στοιχεία ή οι συνιστώσες του μητρώου.
- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $[\alpha_{i,j}]_{m,n}$.
- Αν δύο μητρώα έχουν το ίδιο πλήθος γραμμών και το ίδιο πλήθος στηλών θα τα ονομάζουμε σύμμορφα.

- Αν το μητρώο έχει μόνο μία γραμμή ($m = 1$) ή μία μόνο στήλη ($n = 1$) καλείται διάνυσμα γραμμή ή διάνυσμα στήλη αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή παραλείπουμε τον δείκτη που είναι 1. Σκεφτείτε τα διανύσματα ως «εκφυλισμένους» πίνακες.
- Προσοχή Συνήθως στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι τα ‘διανύσματα’ χαρακτηρίζονται από 2 διάστασεις εκ των οποίων η μία είναι 1.
- ... μπορείτε επίσης να θεωρήσετε τα μητρώα ως παράθεση σύμμορφων διανυσμάτων, π.χ. n στηλών ή m γραμμών.
- Αν $m = n$ το μητρώο λέγεται τετραγωνικό.
- Τα στοιχεία των οποίων η θέση τους στη γραμμή είναι ίδια με τη θέση τους στη στήλη αποτελούν την «κύρια διαγώνιο» του μητρώου. Αναφερόμαστε επίσης και στην *υποδιαγώνιο, υπερδιαγώνιο* και *κύρια αντιδιαγώνιο*.
- Αν τα στοιχεία του A ορίζονται επί ενός αλγεβρικού χώρου (αντιμεταθετικος δακτύλιος ή σώμα) $\mathbb{K}$, γράφουμε $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

Συμβολισμοί

αριθμοί (βαθμωτοί) Πεζά ελληνικά γράμματα για βαθμωτούς, π.χ. α, β, ξ, ψ, ενδεχομένως με δείκτες.

διαστάσεις, δείκτες πεζά λατινικά, π.χ. i, j, k, m, n

διανύσματα πεζά λατινικά, π.χ. x, y, a, b

μητρώα Κεφαλαία λατινικά για μητρώα π.χ. A, B, X, Y, P

Κεφαλαίο λατινικό $\rightarrow$ πεζό λατινικό $\rightarrow$ πεζό ελληνικό

Απλές πράξεις

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό που αναφέραμε

Πρόσθεση σύμμορφων διανυσμάτων ή σύμμορφων μητρώων: Παράγεται το (σύμμορφο) διάνυσμα ή μητρώο με στοιχεία που προέρχονται από την πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων των διανυσμάτων ή μητρώων.

$$c = a + b, C = A + B$$

Πολλαπλασιασμός με αριθμό (βαθμωτό): Παράγεται το (σύμμορφο) διάνυσμα ή μητρώο με στοιχεία που προέρχονται από τον πολλαπλασιασμό με το βαθμωτό κάθε στοιχείου του διανύσματος ή μητρώου.

$$c = \psi a, C = \psi A$$

Παρατήρηση: Παρόλο που εδώ φαίνεται ότι κάνουμε τη διάκριση μεταξύ μητρώων και διανυσμάτων, θα αρκούσε να ορίσουμε τις πράξεις αυτές μεταξύ μητρώων και να θεωρήσουμε ότι ισχύουν (κατά μείζονα λόγο) και για τα διανύσματα.

Απλή Γραμμική Άλγεβρα

$(1 \leq m, n \leq 2)$
Τα όντα μας στην ΕΠΙΠΕΔΟΧΩΡΑ!! Εξετάζοντας το σχήμα και το περιεχόμενό τους!

$$\{-1, 0, 1.1, 10^{-4}, 2, \ldots\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ldots\right\}$$

Απλή Γραμμική Άλγεβρα

$(1 \leq m, n \leq 2)$

Τα όντα μας στη ΕΠΙΠΕΔΟΧΩΡΑ!! Με ΟΝΟΜΑ

$$a = (1 \quad 2) \quad b = (0 \quad 0) \quad c = (1 \quad 0) \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Θεωρούμε ότι δύο αντικείμενα είναι ίσα αν και μόνον αν έχουν α) το ίδιο σχήμα και β) τα ίδια στοιχεία στις ίδιες θέσεις. Αυτό γιατί το βασικό αλγεβρικό αντικείμενο είναι το ΜΗΤΡΩΟ, το σχήμα του οποίου είναι ίδιο με πίνακα με m γραμμές και n στήλες. Στην επιπεδοχώρα, σημαίνει 1 ή 2 γραμμές και 1 ή 2 στήλες.

Παραδείγματα

- Τα A, I, L, Z, U, B είναι μητρώα 2 γραμμών, 2 στηλών. Λέμε ότι είναι 2×2
- Τα a, b, c είναι μητρώα 1 γραμμής, 2 στηλών.
  Λέμε ότι είναι 1×2. Είναι διανύσματα-γραμμές.
- Τα p, e_1, e_2 είναι μητρώα 2 γραμμών, 1 στήλης.
  Λέμε ότι είναι 2×1. Είναι διανύσματα-στήλες.
- Ένας αριθμός (βαθμωτός) μπορεί να θεωρηθεί ως μητρώο 1×1.

Απλή Γραμμική Άλγεβρα

$(1 \leq m, n \leq 2)$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στα διανύσματα που έχετε μάθει στο «διανυσματικό λογισμό» (βλ. Φυσικομαθηματικά) δεν γινόταν διάκριση αν ένα διάνυσμα ήταν γραμμή ή στήλη. ΕΔΩ ΘΕΩΡΟΥΝΤΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ!

ΕΠΟΜΕΝΩΣ το a και το b είναι ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ (φρούτα μεν, αλλά όπως τα μήλα με τα πορτοκάλια). Δεν μπορούμε καν να τα συγκρίνουμε.

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΟΥΜΕ $\rightarrow$ Δύο αντικείμενα που έχουν το ίδιο σχήμα είναι ίσα αν και μόνον αν τα στοιχεία τους στις αντίστοιχες θέσεις είναι ίσα.

Πράξεις: ΑΘΡΟΙΣΗ

αντικειμένων ίδιου σχήματος

Προσθέτουμε τα στοιχεία που βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις. Το αποτέλεσμα έχει το ίδιο σχήμα!

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\2+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Υπολογίσαμε τα $p + e_1$ και $p - e_1$

Πράξεις: ΑΘΡΟΙΣΗ

αντικειμένων ίδιου σχήματος

Προσθέτουμε τα στοιχεία που βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις. Το αποτέλεσμα έχει το ίδιο σχήμα!

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\2+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Υπολογίσαμε τα $p + e_1$ και $p - e_1$
Να υπολογίσουμε το $A + I$:

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1 & 2+0\\0+0 & 0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Απαγορεύεται να αθροίζουμε αντικείμενα διαφορετικού σχήματος!

$$\cancel{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}}, \quad \cancel{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}}, \quad \cancel{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 3}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ με βαθμωτό

Πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο με το βαθμωτό. Το αποτέλεσμα έχει το ίδιο σχήμα.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Συμβολισμοί και αναστροφή

Το βιβλίο του Strang χρησιμοποιεί τετραγωνικές αγκύλες για να ορίσει διανύσματα και μητρώα. Γράφει επίσης

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ή } (1, 2, 3)$$

που είναι 3×1 και διαφορετικά από το 1×3 διάνυσμα γραμμή

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Εμείς χρησιμοποιούμε παρενθέσεις για να εγκλείσουμε διανύσματα στήλες, διανύσματα γραμμές ή μητρώα. Όταν θέλουμε να εξοικονομίσουμε χώρο, χρησιμοποιούμε το σύμβολο της αναστροφής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top \text{ για το } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(με ή χωρίς τα κόμματα). Ο υπερδείκτης $\top$ σημαίνει αναστροφή του αντικειμένου, δηλ. οι γραμμές γίνονται στήλες και οι στήλες γραμμές.

Κανόνες αριθμητικής με μητρώα:

Άθροιση μητρώων, πολλαπλασιασμός με βαθμωτούς

Περί ισότητας είδαμε ήδη ότι $A = B$ είναι ίσα αν και μόνον αν

- (# γραμμών A) = (# γραμμών B) και (# στηλών A) = (# στηλών B)
- Τα στοιχεία τους στις αντίστοιχες θέσεις είναι ίσα.

επίσης Αν A, B είναι μητρώα:

$A = B$ ή $A \neq B$.
$A = A$,
$A = B \Leftrightarrow B = A$,
$A = B, B = C \Rightarrow A = C$.

Αν A, B, C μητρώα ίδιου μεγέθους:)

- Το σύνολο των μητρώων ίδιου μεγέθους είναι κλειστό ως προς $+$ μητρώων
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (προσεταιριστική ιδιότητα ως προς $+$ μητρώων)
- $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς $+$ μητρώων)
- Αν 0 είναι το <u>μηδενικό</u> ίδιου μεγέθους με το A τότε $A + 0 = A$. Το μηδενικό μητρώο είναι μοναδικό.
- Για κάθε μητρώο A υπάρχει μοναδικό B τέτοιο ώστε $A + B = 0$. Ειδικότερα, $B = -A$.
- Το σύνολο των μητρώων ίδιου μεγέθους είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$ (με βαθμωτούς)

Αν α, β βαθμωτοί

- $1 \cdot A = A$
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Γραμμικός συνδυασμός

Αν P, Q είναι αντικείμενα του ίδιου χώρου και α, β κάποιοι βαθμωτοί τότε το αντικείμενο

$$R = \alpha \cdot P + \beta \cdot Q$$

αποκαλείται <u>γραμμικός συνδυασμός</u> (γ.ς .) των P, Q. Τα α, β είναι οι <u>συντελεστές</u> του συνδυασμού.
Από εδώ και πέρα παραλείπουμε το $\cdot$ για τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό.

Γραμμικός συνδυασμός και Διάνοιγμα

Ορισμός

Έστω η συλλογή των διανυσμάτων $U = \{u_1, u_2, ..., u_s\}$ και οι (μη μηδενικοί) βαθμωτοί $\alpha_1, .., \alpha_s$. Η έκφραση

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_s u_s$$

αποκαλείται γραμμικός συνδυασμός (των εν λόγω s διανυσμάτων). Το σύνολο Y όλων των διανυσμάτων u τ.ώ.

$$\mathcal{U} := \{u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_s u_s | \alpha_j \in \mathbb{R} \}$$

λέγεται διάνοιγμα (span) των διανυσμάτων του U.

<u>Παρατήρηση</u> Θεωρούμε τα διανύσματα δοθέντα και τους συντελεστές α_j παραμέτρους που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.

Ενδιαφέροντα ερωτήματα

Δίνεται σύνολο από διανύσματα, π.χ. $U = \{u_1, \ldots, u_s\}$ (θεωρούμε πάντα ότι εκκινούν από το 0).

- Ποιό είναι το διάνοιγμα του U;
- Δοθέντος ενός διανύσματος v, μπορούμε να το γράψουμε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων του U;

Παράδειγμα 1 Αν $U = \{u_1\}$ το διάνοιγμα είναι όλα τα σημεία της ευθείας που περιέχει το u_1.

Παράδειγμα 2 Αν $U = \{u_1, u_2\}$ και δεν είναι συγγραμμικά, το διάνοιγμα είναι όλο το επίπεδο που ορίζεται από τις 2 ευθείες επί των οποίων κείνται τα διανύσματα.

Πολλαπλασιασμός μητρώων

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μητρώα μεταξύ τους μόνον εφόσον ικανοποιούνται ορισμένοι απλοί κανόνες που αφορούν στις διαστάσεις τους.
Οι πράξεις που επιτελούνται μπορούν να ερμηνευτούν με διάφορους τρόπους.
Μητρώο επί διάνυσμα-στήλη: ερμηνεία με γραμμικό συνδυασμό Το αποτέλεσμα είναι το διάνυσμα στήλη που σχηματίζεται από το γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων-στηλών που σχηματιζονται από τις στήλες του μητρώου με συντελεστές τα στοιχεία του δεξιού διανύσματος (πολλαπλασιαστέου).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μητρώα μεταξύ τους μόνον εφόσον ικανοποιούνται ορισμένοι απλοί κανόνες που αφορούν στις διαστάσεις τους.

Οι πράξεις που επιτελούνται μπορούν να ερμηνευτούν με διάφορους τρόπους.

Διάνυσμα-γραμμή επί μητρώο: ερμηνεία με γραμμικό συνδυασμό Το αποτέλεσμα είναι το διάνυσμα γραμμή που σχηματίζεται από το γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων-γραμμών που σχηματιζονται από τις γραμμές του μητρώου με συντελεστές τα στοιχεία του αριστερού διανύσματος (πολλαπλασιαστή).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Βιβλιογραφία I

J. Hillel.
Modes of description and the problem of representation in linear algebra.
In J.L. Dorier, editor, *The Teaching of Linear Algebra in Question*, pages 191--207. Kluwer Academic Pub., 2000.

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Χρήση Έργου Τρίτων I

1. http://www.w8themes.com/wp-content/uploads/2013/09/Matrix-Background-Wallpaper.png

   (βλ. σελ 5)
2. http://www.biblioasi.gr/images//covers/books/9789607309709.jpg (βλ. σελ 6)
3. http://books.vres.gr/uploads/books_images/143/142447.jpg (βλ. σελ 6)
4. http://www.perizitito.gr/images/P/b128762.jpg (βλ. σελ 6)
5. http://img.youtube.com/vi/ZK3O402wf1c/0.jpg (βλ. σελ 6)
6. http://press.princeton.edu/images/k8961.gif (βλ. σελ 7)
7. http://www.maa.org/publications/maa-reviews/resources-for-teaching-linear-algebra (βλ. σελ 8)
8. http://www.cs.yale.edu/homes/mmahoney/talks/laml-graphs.pdf (βλ. σελ 8)
9. http://images.tandf.co.uk/common/jackets/amazon/978158488/9781584888321.jpg (βλ. σελ 8)
10. https://images.springer.com/sgw/books/medium/9780387944913.jpg (βλ. σελ 8)
11. http://ecx.images-amazon.com/images/I/51GEltS9miL._SY344_BO1,204,203,200_.jpg (βλ. σελ 8)

Χρήση Έργου Τρίτων II

12. http://ecx.images-amazon.com/images/I/51tTVgHdYYL._SY344_BO1,204,203,200_.jpg (βλ. σελ 8)
13. http://cartesianfaith.com/2013/12/09/matrix-factorizations-and-social-network-graph-analysis/ (βλ. σελ 8)
14. http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/050623280 (βλ. σελ 8)
15. http://cacm.acm.org/magazines/2012/10/155538-a-fast-solver-for-a-class-of-linear-systems/fulltext (βλ. σελ 8)
16. http://www.siam.org/meetings/la12/index.html (βλ. σελ 8)
17. https://www.edx.org/course/linear-algebra-foundations-frontiers-utaustinx-ut-5-02x (βλ. σελ 9)
18. http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/ (βλ. σελ 9)
19. https://www.coursera.org/course/matrix (βλ. σελ 9)
20. https://www.math.ucdavis.edu/ linear/ (βλ. σελ 9)
21. https://www.youtube.com/user/MVavalis/videos (βλ. σελ 10)
22. https://pbs.twimg.com/profile_images/1466379568/vavalis-150x106_400x400.jpg (βλ. σελ 10)

Χρήση Έργου Τρίτων III

23. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c3/Chess_board_opening_staunton.jpg (βλ. σελ 11)
24. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ae/Ajedrez_captura_al_paso_del_peon.png (βλ. σελ 11)
25. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/02/Lasker's_Chess_Magazine_cover.jpg (βλ. σελ 11)
26. http://www.springer.com/gp/book/9780792365396 (βλ. σελ 14)
27. https://www.google.gr/ (βλ. σελ 18)

Σημείωμα Αναφοράς

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης