

Επιστημονικός Υπολογισμός Ι

Ενότητα 8 - Το Διακριτό Μοντέλο

Ευστράτιος Γαλλόπουλος



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Άσκηση 1 — Σωστό ή λάθος: Αν στο διάστημα $(0, 1)$ ισχύει η διαφορική εξίσωση $-\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = x$, όπου οι σταθερές $b, c > 0$, και οι συνοριακές συνθήκες είναι $u(0) = 0, u(1) = 1$, και διακριτοποιήσουμε το διάστημα με το πλέγμα $x_0 = 0, x_1 = 1/(n+1), \dots, x_n = n/(n+1), x_{n+1} = 1$ και τις παραγωγίσουμε με κεντρισμένες πεπερασμένες διαφορές, τότε το γραμμικό σύστημα που θα προκύψει θα έχει τη μορφή $AU = F$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $A = A^T$.

Απάντηση — Λάθος, το μητρώο δεν είναι συμμετρικό, Πιο συγκεκριμένα, προσεγγίζουμε τις παραγωγούς στο σημείο x_i ως εξής :

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x_i) = \frac{u(x_i - 1) - 2u(x_i) + u(x_i + 1)}{h^2} \frac{d}{dx}u(x_i) = \frac{u(x_i + 1) - u(x_i - 1)}{2h}$$

όπου $h = 1/(n + 1)$. Χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις $U_i \approx u(x_i)$ προκύπτει το αντίστοιχο διακριτό πρόβλημα που δίνεται από την εξίσωση :

$$\left(-\frac{1}{h^2} - \frac{b}{2h}\right)U_{i-1} + \left(\frac{1}{h^2} + c\right)U_i + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{b}{2h}\right)U_{i+1} = x_i$$

Συνεπώς η λύση του αντίστοιχου διακριτού προβλήματος ανάγεται στη λύση του γραμμικού συστήματος $AU = F$, όπου

$A = \text{trid}\left[-\frac{1}{h^2} - \frac{b}{2h}, \frac{1}{h^2} + c, -\frac{1}{h^2} + \frac{b}{2h}\right]$, το οποίο δεν είναι συμμετρικό. \square

Άσκηση 2 — Έστω η συνάρτηση $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι από η πρώτη μέχρι και η τέταρτη παράγωγός της, δηλ. $u^{(j)}(x), j = 1 : 4$ είναι συνεχείς για $x \in [-1, 1]$. Γνωρίζουμε επίσης ότι η u ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$u^{(2)}(x) - u(x) = 2x, x \in (-1, 1)$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(-1) = 0, u(1) = 1.$$

Θέλουμε να προσεγγίσουμε τη λύση αριθμητικά, χρησιμοποιώντας κεντρισμένες πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης.

1. Να διακριτοποιήσετε την εξίσωση και να γράψετε το σύστημα που προκύπτει για πλέγμα αποτελούμενο από $n = 8$ ισαπέχοντες κόμβους στο διάστημα $(-1, 1)$ (οι κόμβοι είναι όλοι εσωτερικοί)
2. Να αναφέρετε την πιο φθηνή και αριθμητικά σταθερή μέθοδο επίλυσης του συστήματος που γνωρίζετε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογισθεί η λύση και αν δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.

Απάντηση — 1. Χρησιμοποιούμε κεντρισμένες πεπερασμένες διαφορές οπότε η προσέγγιση της δεύτερης παραγωγού σε κάθε σημείο του πλέγματος $x_i \in (-1, 1)$ έχει την μορφή

$$u^{(2)}(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$

όπου U_i είναι η συνάρτηση πλέγματος που θα χρησιμοποιήσουμε για να προσεγγίσουμε την άγνωστη συνάρτηση u . Η διακριτοποίηση της εξίσωσης σε κάθε σημείο οδηγεί στις διακριτές εξισώσεις.

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} - U_i = 2x_i \Rightarrow$$

$$\frac{U_i + 1 - (2 + h^2)U_i + U_{i-1}}{h^2} = 2x_i \Rightarrow$$

$$-U_i + 1 + (2 + H^2)U_i - U_{i-1} = -2h^2x_i$$

Με το πλέγμα που αναφέρεται στην εκφώνηση, οι κόμβοι είναι οι

$$x_i = -1 + \frac{2}{9}i, i = 1 : 8$$

και η απόσταση των διαδοχικών κόμβων $h = 2/9$. (Βλέπετε ότι στις τιμές του δείκτη $I = 0, 9$ αντιστοιχούν τα ακραία σημεία του διαστήματος $[-1, 1]$.) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω καθώς και τις συνοριακές τιμές η διακριτοποίηση της ΔΕ οδηγεί στις εξισώσεις $TU = Y$ όπου T είναι το τριδιαγώνιο απαλοιφή Toeplitz, συμμετρικό μητρώο μεγέθους $T \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$

$$T = \text{trid}[-1, 166/81, -1]$$

όπου υπογραμμίσαμε τον όρο της κυρίας διαγωνίου, $U = [U_1, \dots, U_8]^T$ και

$$Y = \frac{1}{759}[56, 40, 24, 8, -8, -24, -40, 673]^T.$$

2. Το σύστημα $TU = Y$ όπου T είναι το τριδιαγώνιο. Έτσι, εφόσον είναι αντιστρέψιμο, θα μπορούσε να λυθεί χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο LU για τριδιαγώνια μητρώα. Το μητρώο είναι αντιστρέψιμο γιατί από το θεώρημα απαλοιφή Gershgorin οι ιδιοτιμές του $\lambda_i, i = 1 : 8$ περιέχονται στο χωρίο που βρίσκεται στην ένωση των δίσκων.

$$\left| \lambda - \frac{166}{81} \right| \leq 2, -1 \leq \lambda - \frac{166}{81} \leq 1.$$

Οι ιδιοτιμές είναι όλες πραγματικές γιατί $T = T^T$. Οι παραπάνω ανισότητες συνεπάγονται ότι

$$-2 \leq \lambda - \frac{166}{81} \leq 2, -1 \leq -\frac{166}{81} \leq 1,$$

από τις οποίες ακολουθεί ότι $\lambda > 0$. Επομένως οι ιδιοτιμές είναι θετικές και καθώς το μητρώο είναι συμμετρικό θα είναι και ΣΘΟ. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παραγοντοποίηση απαλοιφή Cholesky για την επίλυση το κόστος της οποίας είναι μικρότερο από της LU . \square

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015, "Επιστημονικός Υπολογισμός Ι", Έκδοση: 1.0 Πάτρα 2013-2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1096/>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Διανομή 4.0 ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο "Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων".



Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ