Επιστημονικός Υπολογισμός Ι
Ενότητα 6 - Παραγοντοποίηση QR και Ελάχιστα Τετράγωνα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος

Άσκηση 1 — Έστω ότι έχουμε εφαρμόσει τον αλγόριθμο παραγοντοποίησης QR στο μητρώο $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,π.χ. $qr(A)$, και ότι μας επιστρέφεται η θέση του A πίνακας με στοιχεία.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.Να περιγράψετε τι είναι τα στοιχεία που περιέχονται α) στο κάτω τριγωνικό τμήμα του A, και β) στο άνω τριγωνικό τμήμα του A. Επίσης να υπολογίσετε τα στοιχεία του αρχικού μητρώου του A .

2.Να χρησιμοποιήσετε τα παραπάνω για να λύσετε το σύστημα $A_x = b$ όπου $b = [12, -5, -10]^\top$

Απάντηση — 1.Το άνω τμήμα περιέχει τα στοιχεία του R όπου $A = QR$. Το κάτω τριγωνικό τμήμα περιέχει τα στοιχεία των διανυσμάτων απαλοιφή Householder που χρησιμοποιήθηκαν για να άνω τριγωνοποιήσουν το A. Θέτουμε $u_1 = [1, 1, 1]^\top$ και $u_2 = [0, 1, 1]^\top$. Έστω $H_j = \left(I - \frac{u_j u_j^\top}{u_j^\top u_j}\right)$. Τότε $H_2 H_1 A = R$ επομένως $A = A_1 H_2 R$ αφού οι ανακλαστές είναι ορθογώνιοι. Αφού

$$\frac{u_1 u_1^\top}{u_1^\top u_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\frac{u_2 u_2^\top}{u_2^\top u_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$A = H_1 H_2 R = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -4 & -9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.Ισχύει ότι $H_2 H_1 A = b \Rightarrow R_x = H_2 H_1 b$ και χρησιμοποιούμε το ανώτερο και λύνουμε το άνω τριγωνικό σύστημα και έχουμε $x = [1, 2, 3]^\top$.

□

Άσκηση 2 — Έστω ένα μητρώο A το οποίο χρησιμοποιούμε ως μητρώο συντελεστών κάποιου γραμμικού συστήματος $A_x = b$ Πώς θα λύνατε το γραμμικό σύστημα αν γνωρίζατε ότι το μητρώο A είναι μη τετραγωνικό;

Απάντηση — Αν το μητρώο είναι μη τετραγωνικό, τότε το σύστημα $A_x = b$ θα έχει είτε μία, ή καμία λύση. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να βρούμε την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων, και να παρατηρήσουμε το σφάλμα $\|A_x - b\|_2$, αν αυτό είναι 0, τότε το σύστημα έχει λύση η οποία είναι το διάνυσμα x που βρήκαμε. Αν το σφάλμα είναι μη μηδενικό τότε θα έχουμε βρει το x εκείνο που ελαχιστοποιεί την απόσταση $\|A_x - b\|_2$. Για να λύσουμε το σύστημα θα χρησιμοποιήσουμε κανονικές εξισώσεις :

$$A^\top A_x = A^\top b$$

το μητρώο $A^\top A$ ενδέχεται να είναι ΣΘΟ, άρα κάποιος θα μπορούσε να εφαρμόσει απαλοιφή Cholesky. Ωστόσο το μητρώο $A^\top A$ έχει πολύ μεγάλο δείκτη κατάστασης (σχεδόν το τετράγωνο του δείκτη κατάστασης του A), οπότε θα δημιουργεί πρόβλημα στην επίλυση. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την QR του A και στη συνέχεια να λύσουμε το άνω τριγωνικό σύστημα $R_x = Q^\top b$ με πίσω αντικατάσταση. Αυτό γιατί δοθείσας της παραγοντοποίησης QR του A ισχύει:

$$A^\top A_x = A^\top b \Rightarrow (QR)^\top (QR)_X = (QR)^\top \Rightarrow R^\top Q^\top Q R_x = R^\top Q^\top b \Rightarrow R_x = Q^\top b$$

Για τον υπολογισμό του $Q^\top b$ δεν χρειάζεται να κατασκευάσουμε το μητρώο Q, αρκεί να έχουμε τα διανύσματα απαλοιφής Householder,u. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε αναδρομικά τους ανακλαστές στο b ως εξής:

$$H_1 H_2 ... H_n b = \left(I - \frac{2u_1 u_1^\top}{u_1^\top u_1}\right)\left(I - \frac{2u_2 u_2^\top}{u_2^\top u_2}\right)\cdots\left(I - \frac{2u_n u_n^\top}{u_n^\top u_n}\right) b$$

το οποίο θα υπολογιστεί από δεξιά προς τα αριστερά ως:

$$\left(I - \frac{2u_n u_n^\top}{u_n^\top u_n}\right) b = b - \frac{2u_n (u_n^\top b)}{u_n^\top u_n} = b - \frac{2u_n^\top b}{u_n^\top u_n} u_n$$

Το οποίο αποτελείται από δύο DOTs, ένα πολλαπλασιασμό βαθμωτών επί ένα μητρώο (ο βαθμωτός προκύπτει από ένα πολλαπλασιασμό και μια διαίρεση) και μια αφαίρεση διανυσμάτων. Η διαδικασία αυτή γίνεται n φορές, ωστόσο αποφεύγουμε το κόστος τους υπολογισμού ενός MV καθώς και το κόστος αποθήκευσης του μητρώου Q το οποίο θα είναι πυκνό. $\square$

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015, ¨Επιστημονικός Υπολογισμός Ι¨, Έκδοση: 1.0 Πάτρα 2013-2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1096/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Διανομή 4.0 ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο “Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων”.

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.