

Επιστημονικός Υπολογισμός Ι  
Ενότητα 5 - Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Ευστράτιος Γαλλόπουλος



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά ΠΠ  
μαθήματα

**Άσκηση 1** — Έστω ένα μητρώο  $A$  το οποίο χρησιμοποιούμε και μητρώο συντελεστών κάποιου γραμμικού συστήματος  $Ax = b$

1. Πώς θα λύνατε το γραμμικό σύστημα αν γνωρίζατε ότι το μητρώο είναι τετραγωνικό· Αν εκτός από τετραγωνικό ήταν και συμμετρικό και θετικά ορισμένο (ΣΘΟ)

**Απάντηση** — 1. Αν το μητρώο ήταν τετραγωνικό και δε γνωρίζαμε τίποτα άλλο για αυτό, αναγκαστικά, ο μόνος τρόπος επίλυσης θα ήταν η παραγοντοποίηση απαλοιφή LU. Τότε η λύση θα ήταν: (υποθέτοντας ότι έχουμε την απαλοιφή LU  $A = LU$ )  $y = L \setminus b$   $x = U \setminus y$  και αυτό γιατί  $Ax = b \Rightarrow LU = b$ , θέτω  $Ux = y$  και λύνω με “εμπρός αντικατάσταση”, το κάτω τριγωνικό σύστημα  $Uy = b$ . Στη συνέχεια λύνω με “πίσω αντικατάσταση” το άνω τριγωνικό σύστημα  $Ux = y$ , βρίσκοντας τη λύση.

2. Αν το μητρώο είναι (ΣΘΟ) τότε αντί να πληρώσουμε το κόστος  $O(\frac{2}{3}n^3)$  κάνοντας απαλοιφή Cholesky. Τότε, υποθέτοντας ότι έχουμε υπολογίσει την απαλοιφή Cholesky του  $A$  η λύση θα είναι  $y = L \setminus b$ ,  $x = U \setminus y$  και αυτό γιατί  $Ax = b \Rightarrow LL^T x = b$ , θέτω  $L^T x = y$  και λύνω με “εμπρός αντικατάσταση” το κάτω τριγωνικό σύστημα  $L^T y = b$ . Στη συνέχεια λύνω με “πίσω αντικατάσταση” το άνω τριγωνικό σύστημα  $L^T x = y$  βρίσκοντας την λύση.

□

**Άσκηση 2** — Έστω ότι διαθέτουμε την απαλοιφή UL παραγοντοποίηση του  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και ότι  $u, v \in \mathbb{R}^n$ .

1. Να δείξετε έναν αλγόριθμο υπολογισμού του  $B = A^{-1}(I - uv^T)$ .
2. Να υπολογίσετε τον κυρίαρχο συντελεστή (τύπου  $cn^k$ ) για τον αριθμό πράξεων που χρειάζονται για τον υπολογισμό του  $B$ . (Σημείωση. Στόχος είναι να χρησιμοποιήσετε το μικρότερο πλήθος πράξεων α.κ.υ. που μπορείτε!)
3. Να περιγράψετε πώς θα υπολογίζατε το  $Bz$  για  $z \in \mathbb{R}^n$ .

**Απάντηση** — Από την υπόθεση γνωρίζουμε την παραγοντοποίηση  $A = LU$ . Ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του:

$$B = A^{-1}(I - uv^T) = A^{-1} - A^{-1}uv^T$$

Παρακάτω δίνεται ο ζητούμενος αλγόριθμος:

1. Επίλυση του συστήματος  $Ax = u$ ,
2. Υπολογισμός του  $A^{-1}$ ,
3. Υπολογισμός του  $C = xu^T$
4. Υπολογισμός του  $B = A^{-1} - C$

Παρακάτω δίνεται το κόστος του αλγορίθμου για κάθε ένα από τα παραπάνω βήματα:

1.  $2n^2$  πράξεις (μπρος και πίσω αντικατάσταση μέσω της παραγοντοποίησης απαλοιφή LU).
2.  $2n^3$  πράξεις για την αντιστροφή μέσω της λύσης των απαλοιφή η τριγωνικών συστημάτων συστημάτων  $LX = I$  και στη συνέχεια των  $UB = X$  οπότε  $B = A^{-1}$ . Αν όμως γίνει χρήση της δομής του προβλήματος, ότι δηλαδή, στο  $LX = I$ , το απαλοιφή  $I$  είναι ταυτοτικό και στο απαλοιφή  $L$  κάτω τριγωνικό, το κόστος είναι  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^3 = \frac{4}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} + O(n)$  εφόσον τα  $L, U$  λαμβάνονται ως γνωστά.
3.  $n^2$  πράξεις.
4.  $n^2$  πράξεις.

Συνεπώς απαιτούνται συνολικά  $\Omega = 2n^3 + 4n^2 + O(n)$  πράξεις. Αυτό μπορεί να μειωθεί και σε  $\Omega = \frac{4}{3}n^3 + \frac{7}{2}n^2 + O(n)$ .

Ο υπολογισμός του  $B_z$ , μπορεί να γίνει με τον εξής τρόπο :

$$B_z = A^{-1}(I - uw^\top)z = A^{-1}z - A^{-1}uw^\top z$$

Συνεπώς:

1. Επίλυση του συστήματος  $Ax = z$
2. Επίλυση του συστήματος  $Ax = u$
3. Υπολογισμός του  $\tau = u^\top z$
4. Υπολογισμός του  $x - \tau y$

Το κυρίαρχο κόστος του παραπάνω αλγορίθμου προέρχεται από τη λύση των δύο συστημάτων στα βήματα 1 και 2, που απαιτούν συνολικά  $4n^2$  πράξεις .

□

**Άσκηση 3** — Ο παρακάτω κώδικας απαλοιφή MATLAB μπορεί να υλοποιηθεί ώστε να παράγει τα επιθυμητά αποτελέσματα πολύ γρήγορα. Να εξηγήσετε τι τροποποιήσεις πρέπει να γίνουν και να γράψετε τον ταχύτερο κώδικα, χρησιμοποιώντας, αν χρειάζεται, και άλλες εντολές ή συναρτήσεις της απαλοιφή MATLAB. Υποτίθεται ότι ο βαθμωτός  $p$  και οι θετικοί ακέραιοι  $m, n$  έχουν ήδη αρχικοποιηθεί.

```
A=rand(m,n);B=rand(m,n);C=rand(m,n);X=rand(m+n,s);D=eye(m+n,m+n);
for i=1:m, for j=1:n, D(i,j)=A(i,j)*B(i,j)+C(i,j); end;end;
for i=1:m, for j=1:n, if (i==j), D(i,j)=p+D(i,j); end;end;end;
for k=1:s, Y(:,k)=D(1:m+n,1:m+n)\X(:,k); end;
```

**Απάντηση** — Το βήμα :

```
for i=1:m,for j=1:n, D(i,j)=A(i,j)*B(i,j)+C(i,j); end;end;
```

μπορεί να γραφεί χωρίς το βρόχο ως εξής :

```
D(1:m,1:n)=A.*B+C;
```

ενώ το

```
for i=1:m,for j=1:n, if (i==j), D(i,j)=p+D(i,j); end;end;end;
```

μπορεί να γραφεί ως:

```
k=min(m,n); D(1:k,1:k)=peye(k)+D(1:k,1:k);
```

Τέλος τα  $s$  γραμμικά συστήματα για τις στήλες  $X(:,k), k = 1 : s$  στην τελευταία γραμμή του κώδικα μπορούν να λυθούν πολύ πιο αποδοτικά αν πρώτα υπολογιστεί η διάσπαση απαλοιφή LU για το μητρώο απαλοιφή  $D$  και στη συνέχεια λύσουμε ως εξής:

```
[L,U]=lu(D); Y=U\ (L\X);
```



## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015, "Επιστημονικός Υπολογισμός Ι", Έκδοση: 1.0 Πάτρα 2013-2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1096/>

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Διανομή 4.0 ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο "Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων".



Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ