

Επιστημονικός Υπολογισμός Ι
Ενότητα 3 - Βασικές Πράξεις Αριθμητικής Γραμμικής
Άλγεβρας

Ευστράτιος Γαλλόπουλος



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Άσκηση 1 — Έστω ότι μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$, η υπολογισμένη λύση είναι \hat{x} , $r := b - A\hat{x}$ και ότι εκτιμάται ότι $\omega := \frac{\|r\|}{\|A\|\|\hat{x}\|+\|b\|} = 1.5 \times 10^{-13}$ (παντού χρησιμοποιείται η ευκλείδεια νόρμα). Έστω επίσης ότι ο δείκτης κατάστασης για τη λύση ως προς την ίδια νόρμα είναι $\kappa_i(A) = 10^6$. Να υπολογίσετε από τα παραπάνω ένα άνω φράγμα για το εμπρός σχετικό σφάλμα $\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|}$.

Απάντηση — Σύμφωνα με τη θεωρία (θεώρημα απαλοιφή Rigal-Gaches), το ω είναι “εκ των υστέρων” πίσω σφάλμα που αντιστοιχεί στον αλγόριθμο επίλυσης. Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στις σημειώσεις, το εμπρός σφάλμα φράσσεται ως εξής:

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{2\omega\kappa(A)}{1 - \omega\kappa(A)} \leq 3 \times 10^{-7} / (1 - 1.5 \times 10^{-7}) \approx 3 \times 10^{-7}.$$

□

Άσκηση 2 — Να δείτε ότι αν τα στοιχεία των διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{R}^2$ που βρίσκονται στην ίδια θέση, έχουν ανά δύο το ίδιο πρόσημο (δηλαδή $\xi_i\psi_i \geq 0$) τότε το εσωτερικό γινόμενο $x^\top y$ υπολογίζεται με μικρο σχετικό σφάλμα.

Απάντηση — Έστω ότι τα στοιχεία x, y στην α.κ.υ. είναι $x_1(1+\delta_1), x_2(1+\delta_2), y_1(1+\delta_3), y_2(1+\delta_4)$ όπου $|\delta_j| \leq u$. Τότε λαμβάνοντας υπόψη και το σφάλμα σε κάθε πολλαπλασιασμό και στην πρόσθεση έχουμε $fl(x^\top y) = (\xi_1\psi_1 < 3 > + \xi_2\psi_2 < 3 >) < 1 > \text{επομένως } \xi_1\psi_1 < 4 > + \xi_2\psi_2 < 4 >$. Έπεται ότι

$$\frac{|fl(x^\top y) - x^\top y|}{|x^\top y|} \leq \gamma \frac{|x|^\top |y|}{|x^\top y|} = \gamma_4$$

αφού $|x^\top y| = |\xi_1\psi_1 + \xi_2\psi_2| = \xi_1\psi_1 + \xi_2\psi_2 = |x|^\top |y|$. □

Άσκηση 3 — Να υπολογίσετε το δείκτη κατάστασης των παρακάτω συναρτήσεων και να διερευνήσετε για ποιες τιμές ο υπολογισμός των συναρτήσεων θέλει προσοχή γιατί οι συναρτήσεις είναι πολύ ευαίσθητες σε μικρές αλλαγές.

1. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - c}$ όπου $x^2 > c$
2. $f(x) = x^{1/n}$
3. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
4. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)/(x_3 - x_4)$
5. $f(x) = \ln x, x > 0$
6. $f(x) = \cos(n \arccos x)$

Απάντηση — Σε όλες τις περιπτώσεις παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και αναζητούμε περιοχές στο πεδίο ορισμού στις οποίες η παράγωγος παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. α) $f'(x) = 1 - x(x^2 - c)^{-1/2}$. Είναι σαφές ότι όταν $x^2 \approx c$ υπολογισμοί με την παραπάνω συνάρτηση χρειάζονται προσοχή. β) $f'(x) = x^{1/n-1}/n$ γ) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2[x_1, x_2]$. δ) $\frac{\partial f}{\partial x} = [1/(x_3 - x_4), 1/(x_3 - x_4), -(x_1 + x_2)/(x_3 - x_4)^2, (x_1 + x_2)/(x_3 - x_4)^2]$. ε) $f'(x) = 1/x$. ζ) $f'(x) = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015, "Επιστημονικός Υπολογισμός Ι", Έκδοση: 1.0 Πάτρα 2013-2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1096/>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Διανομή 4.0 ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο "Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων".



Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

