Επιστημονικός Υπολογισμός Ι

Ενότητα **6** : Παραγοντοποίηση QR και Ελάχιστα Τετράγωνα

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Παραγοντοποίηση QR
- Στοιχειώδη μητρώα Householder (ανακλαστές)
- Ορθογώνιες προβολές
- Επίλυση προβλημάτων ελαχίστων τετραγώνων μέσω QR

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση

- Οδήγηση στην LU
- ... μερική, πλήρης, πύργου
- Σχετικά με πίσω ευστάθεια της LU
- ... συντελεστής αύξησης
- Ειδικά μητρώα που επιτρέπουν αποφυγή οδήγησης
- ... συμμετρικά θετικά ορισμένα
- ... διαγώνια κυρίαρχα
- αποφεύγεται οδήγηση
- παραγοντοποιήσεις Cholesky και $LDL^\top$

Παραγοντοποίηση QR

Δίνεται αντιστρέψιμο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

- $A^\top A$ θα είναι ΣΘΟ,
- $A^\top A = LL^\top = R^\top R$ με $\mathrm{diag}(R) > 0$
- $A = A^{-\top} R^\top R$
- $Q = A^{-\top} R^\top$ είναι ορθογώνιο.

Αποδείξαμε ότι για αντιστρέψιμα τετραγωνικά μητρώα υπάρχει παραγοντοποίηση QR. Η παραγοντοποίηση είναι σημαντική και εντέλει έχει περισσότερες εφαρμογές από την LU).

Γενικεύεται σε μη αντιστρέψιμα ή και μη τετραγωνικά μητρώα.

Επισήμανση

Πολλά στοιχεία που χρησιμοποιούμε προέρχονται από το σημαντικό σύγγραμμα των Golub και van Loan (GV12).

Παραγοντοποίηση QR

Θεώρημα

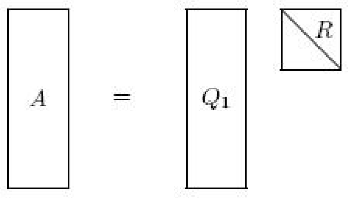
Κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, μπορεί να μετασχηματιστεί σε άνω τριγωνική μορφή μέσω ορθογώνιου μετασχηματισμού. Ειδικότερα, υπάρχει παραγοντοποίηση $A = Q\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ όπου $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ορθογώνιο και $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ άνω τριγωνικό. Αν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε το $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμο. Αν επιλέξουμε τα διαγώνια στοιχεία θετικά, οι παράγοντες Q, R είναι μοναδικοί.

- Μια από τις πιο σημαντικές παραγοντοποιήσεις με πολλές εφαρμογές.
- Υπολογιστικός πυρήνας για 1) Λύση προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων. 2) Προσέγγιση ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων (μέθοδος QR)

Λεπτή (ή οικονομική) παραγοντοποίηση QR

$$A = [Q_1, Q_2] \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Q_1 R_1$$

Η **λεπτή QR** υπολογίζει $A = Q_1 R_1$ όπου $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ έχει ορθοκανονικές στήλες και το R_1 είναι τετραγωνικό, άνω τριγωνικό.



- Οι στήλες του Q_1 είναι ΟΚ βάση του χώρου στηλών ($\mathrm{range}(A)$).
- Το R_1 περιέχει τον άνω παράγοντα Cholesky του $A^\top A$.

- Householder $\to$ ανακλάσεις
- Givens $\to$ περιστροφές
- Gram-Schmidt $\to$ βαθμιαία ορθοκανονικοποίηση

Υπενθύμιση:

- Αν $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ και $P^2 = P$, το P λέγεται τελεστής προβολής.
- Αν $P^2 = P$ και $P^\top = P$ τότε το μητρώο P λέγεται τελεστής ορθογώνιας προβολής.

Έτσι ορίζονται τα μητρώα

$$H := E(u, u; 2/u^\top u) = I - \frac{2}{u^\top u} uu^\top .$$

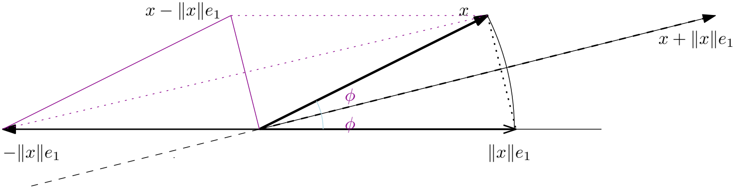
Ισχύει ότι

- $H = I - P_u - P_u$ όπου P_u ο τελεστής ορθ. προβολής στο u.
- $H^\top = H$ και $H^\top H = H^2 = I$.

- Ο πολλαπλασιασμός Hx ανακλά το x ως προς τον υπόχωρο $\langle u \rangle^\perp$.
- Στις 2 διαστάσεις:
- $Hx = \|x\| e_1$ αν το x «ανακλαστεί» ως προς τη διχοτόμο των διανυσμάτων e_1 και x
- $Hx = -\|x\| e_1$ αν ανακλαστεί ως προς τη διχοτόμο των $-e_1$ και x.
- ... οι διχοτόμοι είναι $u = x \pm \|x\| e_1$.

Οπτικοποίηση

στο επίπεδο ($n = 2$)



Παράδειγμα

(χρησιμοποιούμε αποκλειστικά νόρμα-2)

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow u = x + \|x\| e_1 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{9} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Hx = (I - 2\frac{uu^\top}{u^\top u})x \quad = \quad x - 2u\frac{u^\top x}{u^\top u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{12}{24} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\|x\| e_1$$

Παραδείγματα

Μηδενισμός θέσεων $k+1:m$ π.χ. $m=4, k=3, x=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$

Βρίσκουμε u τ.ώ. $H(u)x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_{\mathbf{3}} \\ \xi_{\mathbf{4}} \end{pmatrix} - \|x_{3:4}\| e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3-\sqrt{25} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Hx = (I - 2\frac{uu^\top}{u^\top u})x \quad = \quad x - 2u\frac{u^\top x}{u^\top u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}\frac{40}{80} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Υλοποίηση:

- Το πρόσημο επιλέγεται έτσι ώστε να αποφεύγεται πιθανό πρόβλημα *καταστροφικής απαλοιφής*:

$$u = x + \mathrm{sign}(\xi_1)\|x\|_2 e_1.$$

- το $H(u)$ είναι ανεξάρτητο της κλιμάκωσης του u:

$$H = I - \frac{2}{u^\top u}uu^\top = I - \frac{2}{(\alpha u)^\top(\alpha u)}(\alpha u)(\alpha u)^\top.$$

Το u λέγεται *διάνυσμα Householder*. Καθώς $H(u) = H(\alpha u)$, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε ώστε $u(1) = 1$.

```
function [u] = refl(x)
% upologism'oc kanonikopoihm'enou
% dian'usmatoc Householder u. Met'a
% H(u)x = -sign(x(1))*norm(x)*eye(m,1)
[m]=length(x); mu = norm(x); u=x;
if (mu ~= 0)
     beta = x(1) + sign(x(1))*mu;
    u(2:m) = u(2:m)/beta; % kanonikopo'ihsh
end
u(1) = 1; % kanonikopo'ihsh, an x=0 j'etoume u=e_1
end
```

```
function [B] = refl_row(A,u)
% taq'u B = H*A = A-2*u*(u'*A)/(u'*u)
beta = -2/(u'*u);
w_row  = beta*u'*A;
B = A + u*w_row;
```

<u>ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ:</u> (1) `v = refl(x)`: επιστρέφει το κανονικοποιημένο ($u(1) = 1$) διάνυσμα Householder. $\Omega \approx 3m$. (2) `B = refl_row(A,u)` επιστρέφει $B = A - \frac{2}{u^\top u} u u^\top A$. $\Omega \approx 4mn$.

Παρατηρήσεις

- Οι ανακλαστές είναι στοιχειώδη μητρώα
- ... σπάνια τα κατασκευάζουμε ....
- ... τα διαχειριζόμαστε χρησιμοποιώντας την ειδική τους μορφή (παρόμοια με τα μητρώα Gauss)
- π.χ. $HA = A - \frac{2}{u^\top u} u(A^\top u)^\top$,
- Το μητρώο Q συνήθως δεν κατασκευάζεται παρά μόνον αν χρειζόμαστε την ορθογώνια βάση ...
- αλλά αποθηκεύουμε τα (κανονικοποιημένα) διανύσματα Householder στο κάτω τριγωνικό μέρος του A.
- και όταν χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε με το Q το κάνουμε «έξυπνα» με τα διανύσματα h_j
- Ο σχηματισμός του AH ή HA απαιτεί 1 MV, και μια ανανέωση τάξης 1.

```
function [B] = qr_house(A);
% E'isodoc: Mhtr'wo A
% 'Exodoc: Sto 'anw trigwnik'o tm'hma tou B to R thc QR
%    sto k'atw trigwnik'o tm'hma ta dian'usmata Householder
[m,n]=size(A);
B = A;
for j=1:min(m-1,n)
    u = refl(B(j:m,j)); % upologism'oc dian'usmatoc ...
        Householder
    B(j:m,j:n)=refl_row(B(j:m,j:n),u); % efarmog'h an'aklashc
    B(j+1:m,j)=u(2:m-j+1); % apoj'hkeush dian'usmatoc ...
        Householder
end
```

- $\Omega = 2n^2(m - n/3)$ πράξεις α.κ.υ.
- Αν χρειάζεται το Q, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τους ανακλαστές. Αυτό επιφέρει περίπου $2n^2(m - n/3)$ επιπλέον πράξεις, άρα το κόστος διπλασιάζεται.

- Η πληροφορία για τα κανονικοποιημένα διανύσματα u_k αποθηκεύεται (αν θέλουμε) στο κάτω τριγωνικό τμήμα του A.
- Στο παραπάνω το $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ δεν υπολογίζεται άμεσα αλλά δίδεται μέσω των παραγόντων του ανακλαστών.

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & . & \rho_{1n} \\ \eta_2^{(1)} & \rho_{22} & . & \rho_{2n} \\ . & \eta_2^{(1)} & . & . \\ . & . & . & \rho_{n,n} \\ \vdots & \dots & \dots & \eta_{n+1}^{(n)} \\ \eta_m^{(1)} & \eta_m^{(2)} & . & \eta_m^{(n)} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (στιγμιότυπο)

Υποθέτουμε $n < m$

$$H_2 H_1 A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ \hline 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & \star & x & x \\ 0 & 0 & \star & x & x \\ 0 & 0 & \star & x & x \end{array}\right)$$

διαλέγουμε τον u_3 ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία του $A^{(2)}$ σημειωμένα ως «$\star$». Τελικά

$$H_n \dots H_1 A = R,$$

και επειδή οι ανακλαστές H_j είναι ορθογώνιοι συμμετρικοί,

$$A = H_1 H_2 \dots H_n R = QR$$

όπου $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ορθογώνιο ($Q^\top Q = I$) και το $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$άνω τριγωνικό.

Θάπρεπε να εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά σε ακυ όλων των ακόλουθων πράξεων: α) Υπολογισμός διανύσματος Householder, β) Εφαρμογή ανακλαστή σε διάνυσμα και σε μητρώο, γ) παραγοντοποίηση QR, και επίλυση συστήματος με QR. Περιοριζόμαστε στα πιο σημαντικά αποτελέσματα:

- Έστω ανακλαστές $H_1^L, \cdots, H_k^L, H_1^R, \cdots, H_k^R$ και σημειώνουμε ως $\tilde{H}$ τις αναπαραστάσεις τους σε ακυ. Επίσης έστω $H^L = H_k^L \cdots H_1^L$ και $H^R = H_1^R \cdots H_k^R$. Τότε

$$\mathrm{fl}(\tilde{H}_k^L \cdots \tilde{H}_1^L A \tilde{H}_1^R \cdots \tilde{H}_k^R) = H^L(A+E)H^R,$$

  όπου $\|E\|_2 = k\|A\|_2 O(u)$.

Συμπεράσματα Όλα τα βήματα της λύσης μέσω QR με Householder είναι πίσω ευσταθή:

1. Η εφαρμογή ανακλαστών Householder είναι πίσω ευσταθής υπολογισμός, επομένως αυτό ισχύει και για την αναγωγή του A σε άνω τριγωνικό R.
2. ... υπενθυμίζουμε ότι η επίλυση τριγωνικού συστήματος είναι πίσω ευσταθής.

Σύγκριση επίλυσης $Ax = b$ μέσω LU σε σχέση με QR:

$$\textbf{LU}: PA = LU \Rightarrow x = U^{-1}(L^{-1}b). \quad \textbf{QR}: A = QR \Rightarrow x = R^{-1}(Q^{\top}b).$$

Μητρώο	Μέθοδος	Πίσω σφάλμα	κ_2	εμπρός σφάλμα
`rand(40,40)`	MATLAB	$2.0563e-016$	$1.1636e+004$	$2.1566e-013$
	LU με μ.ο.	$2.1504e-016$	$1.1636e+004$	$3.9386e-013$
	LU με π.ο.	$1.7061e-016$	$1.1636e+004$	$4.0071e-013$
	QR	$2.4437e-016$	$1.1636e+004$	$5.6660e-013$
`gfpp(40)`	MATLAB	$1.2194e-007$	$1.7810e+001$	$1.7551e-006$
	LU με μ.ο.	$2.2572e-007$	$1.7810e+001$	$4.2668e-006$
	LU με π.ο.	$6.9208e-017$	$1.7810e+001$	$1.2790e-015$
	QR	$1.6951e-016$	$1.7810e+001$	$3.3777e-015$
`hilb(20)`	MATLAB	$1.0110e-017$	$1.8458e+018$	$2.2835e+001$
	LU με μ.ο.	$8.6654e-018$	$1.8458e+018$	$1.4933e+001$
	LU με π.ο.	$9.9313e-018$	$1.8458e+018$	$9.5113e+001$
	QR	$2.4162e-017$	$1.8458e+018$	$1.5966e+001$

Γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων

Γενικός ορισμός (Πρόβλημα ΑΓΑ.1)

Έστω μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ όπου $m \geq n$ και το διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^n$. Το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων συνίσταται στην εύρεση ενός στοιχείου του συνόλου

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \arg\min_x \|Ax - b\|_2\}.$$

... από εδώ και πέρα υπονοείται η ευκλείδεια νόρμα.

Μερικές ιδιότητες του $\mathcal{X}$:

- Το διάνυσμα $x \in \mathcal{X}$ αν και μόνον αν $A^\top(b - Ax) = 0$
- $x \in \mathcal{X}$ αν και μόνον αν $x = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)y,$ για αυθαίρετο $y \in \mathbb{R}^n$.
- Το $x = A^\dagger b$ παρέχει το στοιχείο του $\mathcal{X}$ με τη μικρότερη ευκλείδεια νόρμα.
- Αν $\mathrm{rank(A)} = \min(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ η λύση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων είναι μοναδική.

Επίλυση ΑΓΑ.2 με QR

Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ όπου $m > n$ τότε η παραγοντοποίηση QR μας επιστρέφει $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Αν το μητρώο A είναι πλήρους τάξης, τότε οι πρώτες n στήλες του Q (ας πούμε Q_1, είναι ΟΚ βάση για το διανυσματικό υποχώρο διάστασης n του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τις στήλες του A Έστω ότι $Q = [Q_1, Q_2]$ Τότε

$$Q^\top A = R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι άνω τριγωνικό.

Ο τελεστής ΟΠ επί του χώρου που παράγεται από τις στήλες του A είναι ο

$$P = Q_1 \underbrace{\left(Q_1^\top Q_1\right)^{-1}}_{I} Q_1^\top$$

Η λύση του προβλήματος είναι $x = Pb = Q_1 Q_1^\top b$.

Αν χρησιμοποιήσουμε ευκλ. νόρμα

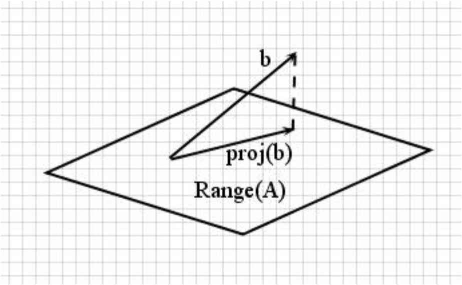
$$\begin{aligned} \|b - Ax\| &= \|Q^\top(b - Ax)\| \\ &= \|Q^\top b - Q^\top Ax\| \\ &= \|Q^\top b - Rx\| \end{aligned}$$

Έστω ότι $Q^\top b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ και εφόσον $Rx = \begin{pmatrix} R_1 x \\ 0 \end{pmatrix}$ τότε

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|Q^\top Ax - Q^\top b\|_2^2 \\ &= \| \begin{pmatrix} R_1 x - c \\ d \end{pmatrix} \|_2 \\ &= \|R_1 x - c\|_2^2 + \|d\|_2^2 \end{aligned}$$

Για να λύσουμε το ΑΓΑ.2 αρκεί να διαλέξουμε το x ώστε να μηδενίσει τον πρώτο όρο του δεξιού σκέλους. Σημειώστε πως δεν μπορούμε να ελέγξουμε τον άλλο όρο, ο οποιος δίνει το μέτρο του υπολοίπου (δηλ. σφάλμα) της προσέγγισης.

Οπτικοποίηση



Συμβολίσαμε με $proj(b)$ το

$$Pb = \underbrace{A(A^\top A)^{-1}A^\top}_{P} b$$

Προσέξτε ότι

$$P^2 = P, P^\top = P$$

Επίλυση ΑΓΑ.2 με ανακλαστές Householder

Βήμα 1. Παραγοντοποίηση $A = QR$. Τα στοιχεία του A έχουν αντικατασταθεί με τα στοιχεία των Q και R.

Βήμα 2.

for $j = 1 : n$
(* Εφαρμογή του υπ. αριθμ. j ανακλαστή. *)
$u(j) = 1; u(j+1 : m) = A(j+1 : m, j)$
$b(j : m) = \mathrm{REFL.ROW}(b(j : m), u(j : m))$
end

Βήμα 3. Επίλυση $R(1 : n, 1 : n)x = b(1 : n)$ με πίσω αντικατάσταση.

$\Omega = 2n^2(m - n/3) + O(mn + n^2)$ πράξεις α.κ.υ.

Βιβλιογραφία I

G.H. Golub and C.F. Van Loan.
Matrix Computations.
The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 3d edition, 2012.

Ε. Γαλλόπουλος.
Επιστημονικός Υπολογισμός I.
Πανεπιστήμιο Πατρών, 2008.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών - Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015

``Επιστημονικός Υπολογισμός Ι'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2013-2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1096/

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ