Τεχνολογίες Ευφυών Συστημάτων και Ρομποτική

Εισαγωγή στη Ρομποτική

Κωνσταντίνος Χατζηλυγερούδης - costashatz@upatras.gr

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

20 Φεβρουαρίου 2023

Template made by **Παναγιώτης Παπαγιαννόπουλος**

Υποχρεώσεις-Αξιολόγηση

- **Μία εργασία/project (για το κομμάτι της Ρομποτικής)**
  - Μία εργασία πάνω στη δημιουργία ενός ελεγκτή για ένα ρομποτικό σύστημα
  - Παραδίδονται κώδικας και αναφορά
  - Αξιολόγηση των εργασιών βάσει των παραδοτέων και **προφορικής εξέτασης**
  - Ατομικές ή ομαδικές μέχρι δύο (2) άτομα
  - Η εργασία πιάνει το 50% του συνολικού βαθμού

Περιεχόμενα - Θεωρία (1)

- **Ρομποτική (Robotics)**
  - Κίνηση Στερεών Σωμάτων σε 3Δ χώρο
  - Κινηματική Ανάλυση Ρομποτικών Συστημάτων
  - Δυναμική Ανάλυση Ρομποτικών Συστημάτων
  - Δημιουργία Ελεγκτών
  - Έλεγχος σε Καρτεσιανό Χώρο (ή Χώρο Εργασίας)
  - Behavior Trees για έλεγχο ρομποτικών συστημάτων
  - Optimal Control/Trajectory Optimization

Συγγράμματα

Προτεινόμενα:

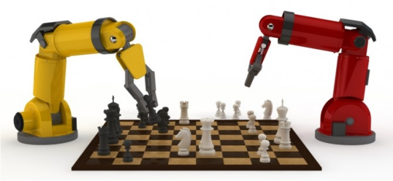
- **Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control**, *Kevin M. Lynch and Frank C. Park*, 2017, Cambridge University Press. ebook

Από Εύδοξο:

- **Εισαγωγή στη Ρομποτική**, *J. Craig*, 2020, Τζιόλα
- **Τεχνητή Νοημοσύνη: Μία Σύγχρονη Προσέγγιση (4η Έκδοση)**, *S. Russel, P. Norvig*, 2021, Κλειδάριθμος
- **Πιθανοτική Ρομποτική**, *S. Thrun, W. Burgard, D. Fox*, 2011, Κλειδάριθμος
- **Ρομποτική**, *Δ. Εμίρης, Δ. Κουλουριώτης*, 2020, Τζιόλα

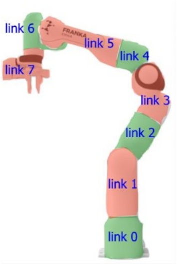
Ένας ευφυής πράκτορας είναι μια οντότητα που μπορεί να αντιλαμβάνεται το περιβάλλον μέσω των αισθητήρων (sensors) και να ενεργεί σε αυτό το περιβάλλον με την βοήθεια μηχανισμών δράσεων (actuators) για την επίτευξη κάποιων στόχων.

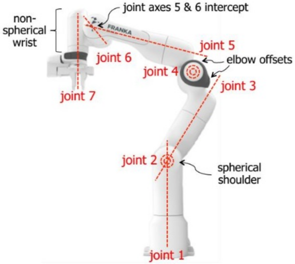
Παραδείγματα Πρακτόρων



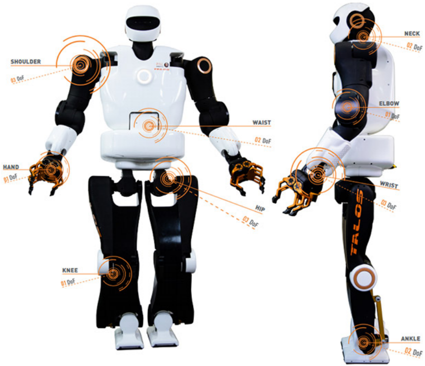
- Ρομπότ
- Game Player (σκάκι, τάβλι, Go, video games)
- Άνθρωπος
- ...

Ένα ρομπότ είναι ένα μηχανικό κατασκεύασμα που αποτελείται από **σώματα** (τα ονομάζουμε links), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με διάφορων ειδών **αρθρώσεις** (joints). **Κινητήρες** ή μηχανισμοί δράσης (actuators) δίνουν ροπή (torques) ή δυνάμεις (forces) στα σώματα και έτσι τα σώματα μπορούν να κινηθούν. Συνήθως μία άρθρωση αντιστοιχεί σε έναν κινητήρα.



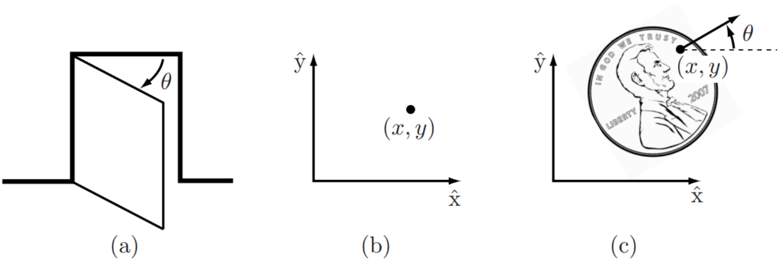


Παραδείγματα Ρομπότ (1)



Παραδείγματα Ρομπότ (2)

Configuration ενός ρομπότ ονομάζουμε μία περιγραφή που προσδιορίζει πλήρως τις θέσεις (στον 3Δ χώρο) όλων των σημείων του ρομπότ.



Πηγή: Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control, *Kevin M. Lynch and Frank C. Park*, 2017, Cambridge University Press.

Βαθμοί Ελευθερίας (degrees of freedom)

Οι βαθμοί ελευθερίας (degrees of freedom - dofs) ενός ρομπότ είναι ο ελάχιστος αριθμών παραμέτρων που χρειαζόμαστε για να αναπραστήσουμε το configuration του, δηλαδή τις θέσεις όλων των σημειών του.

Για παράδειγμα:

- Η πόρτα έχει έναν (1) βαθμό ελευθερίας
- Το 2Δ σημείο έχει δύο (2) βαθμούς ελευθερίας
- Το κέρμα που κινείται σε έναν 2Δ χώρο, έχει τρεις (3) βαθμούς ελευθερίας
- ...

Βαθμοί Ελευθερίας Στερεών Σωμάτων

Στο μάθημα θα ασχοληθούμε με **στερεά σώματα** (rigid bodies) και ρομπότ που απαρτίζονται από στερεά σώματα μόνο.

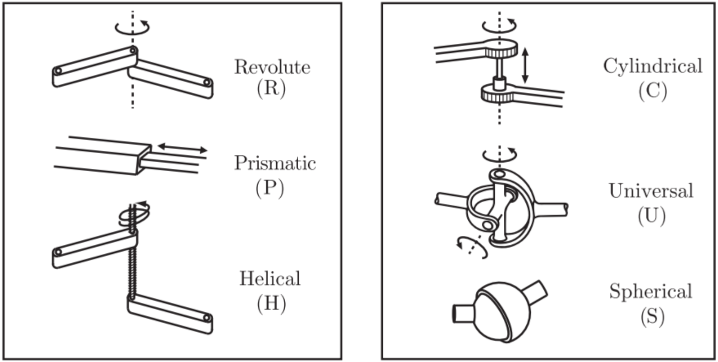
Ένα στερεό σώμα:

- Στο επίπεδο έχει τρεις (3) βαθμούς ελευθερίας: (x, y, θ)
- Στον 3Δ χώρο έχει έξι (6) βαθμούς ελευθερίας: $(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$
- Αυτό ισχύει όταν δεν υπάρχουν περιορισμοί (constraints) στην κίνηση! Αν έχουμε περιορισμούς, μπορούμε να βρούμε τους βαθμούς ελευθερίας ως εξής:
  DoFs = (άθροισμα βαθμών ελευθερίας όλων των στερεών σωμάτων) - (αριθμός ανεξάρτητων περιορισμών)

Βαθμοί Ελευθερίας (ΒΕ) ενός Ρομπότ

- Ένα ρομπότ αποτελείται από πολλά σώματα που συνδέονται μεταξύ τους με αρθρώσεις
- Η κάθε άρθρωση **επιβάλλει έναν ή περισσότερους περιορισμούς**
- Μπορούμε να πούμε ότι κάθε άρθρωση **επιτρέπει έναν ή περισσότερους βαθμούς ελευθερίας**
- **Κάθε άρθρωση συνδέει ακριβώς δύο (2) σώματα**

Τυπικά Είδη Αρθρώσεων (1)



Τυπικά είδη αρθρώσεων.

Πηγή: Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control, *Kevin M. Lynch and Frank C. Park*, 2017, Cambridge University Press.

Τυπικά Είδη Αρθρώσεων (2)

- **Αρθρώσεις ενός (1) βαθμού ελευθερίας**:
  - **Revolute ή Hinge**: επιτρέπει περιστροφική κίνηση γύρω από έναν άξονα
  - **Prismatic**: επιτρέπει εύθυγραμμη (translational) κίνηση πάνω σε έναν άξονα
  - **Helical ή Screw**: επιτρέπει ταυτόχρονα περιστροφική και εύθυγραμμη κίνηση γύρω από έναν ελικοειδή άξονα (σαν κοχλίας)
- **Αρθρώσεις πολλών βαθμών ελευθερίας**:
  - **Cylindrical**: επιτρέπει ανεξάρτητη περιστροφική και εύθυγραμμη κίνηση γύρω από έναν άξονα. Έχει δύο (2) βαθμούς ελευθερίας.
  - **Universal**: είναι επί της ουσίας δύο revolute αρθρώσεις, ώστε να έχουν κάθετους άξονες. Έχει δύο (2) βαθμούς ελευθερίας.
  - **Spherical ή Ball-and-Socket**: έχει τρεις (3) βαθμούς ελευθερίας και μοιάζει με την άρθρωση του ώμου μας.

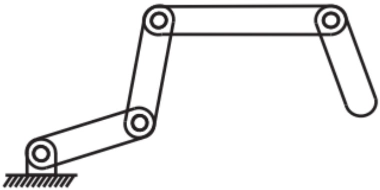
Πρόταση (Grübler's Formula)

Έστω ένα ρομπότ που αποτελείται από N *σώματα*[a], *και* J *αρθρώσεις. Έστω ότι* m *είναι οι ΒΕ ενός σώματος (3 για 2Δ χώρο ή 6 για 3Δ χώρο),* f_i *ο αριθμός των ΒΕ της* i*-th άρθρωσης,* c_i *ο αριθμός των περιορισμών της* i*-th άρθρωσης (ώστε* $f_i + c_i = m$*). Τότε οι συνολικοί ΒΕ του ρομπότ είναι:*

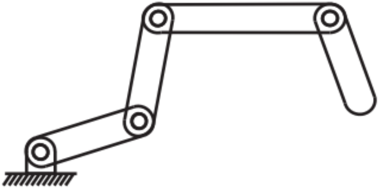
$$\begin{aligned} DoFs &= m(N-1) - \sum_{i=1}^{J} c_i \\ &= m(N-1) - \sum_{i=1}^{J}(m - f_i) = m(N-1-J) + \sum_{i=1}^{J} f_i \end{aligned}$$

[a] Εάν το ρομπότ συνδέεται με το έδαφος, θεωρείται και αυτό ένα σώμα

Grübler's Formula - Παράδειγμα

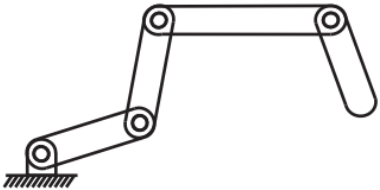


Grübler's Formula - Παράδειγμα



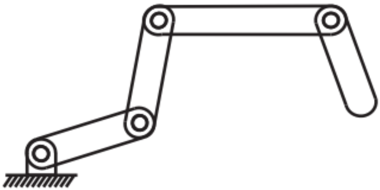
- 5 σώματα (μαζί με το έδαφος, $N = 5$)

Grübler's Formula - Παράδειγμα



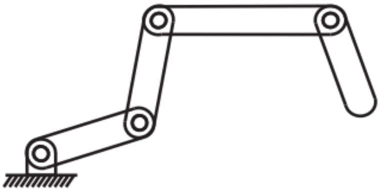
- 5 σώματα (μαζί με το έδαφος, $N = 5$)
- 4 αρθρώσεις τύπου revolute ($J = 4, f_i = 1$)

Grübler's Formula - Παράδειγμα



- 5 σώματα (μαζί με το έδαφος, $N = 5$)
- 4 αρθρώσεις τύπου revolute ($J = 4, f_i = 1$)
- $m = 3$ (2Δ χώρο)

Grübler's Formula - Παράδειγμα

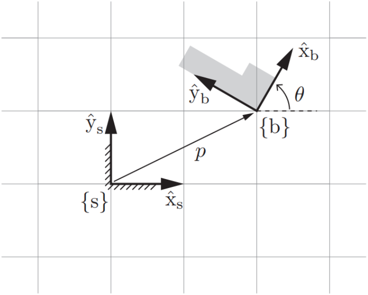


- 5 σώματα (μαζί με το έδαφος, $N = 5$)
- 4 αρθρώσεις τύπου revolute ($J = 4, f_i = 1$)
- $m = 3$ (2Δ χώρο)
- Άρα, $\text{DoFs} = 3 * (5 - 1 - 4) + \sum_{i=1}^{4} 1 = 0 + 4 = 4$

- Είδαμε ότι ένα σώμα στον 3Δ χώρο χρειάζεται τουλάχιστον έξι (6) τιμές[1] για να ξέρουμε πού βρίσκεται στο χώρο
- Όμως αυτή η θέση είναι σε σχέση με τι; Χρειαζόμαστε ένα σύστημα αναφοράς (reference frame)
- Πάντα θεωρούμε ότι υπάρχει ένα στατικό σύστημα αναφοράς το οποίο δεν αλλάζει και δεν κινείται ποτέ: συνήθως αναφερόμαστε σε αυτό ως "το σύστημα αναφοράς του κόσμου" (world frame)
- Κάθε σώμα έχει ένα δικό του τοπικό στατικό σύστημα αναφοράς (είναι στατικό ακόμα και εάν το σώμα κινείται): συνήθως αναφερόμαστε σε αυτός ως "το σύστημα αναφοράς σώματος" (body frame)

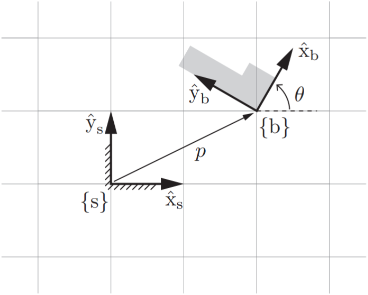
[1] Θέλουμε τουλάχιστον τρεις (3) τιμές για σώματα στον 2Δ χώρο.

Μετασχηματισμοί Θέσεων στον 2Δ χώρο (1)

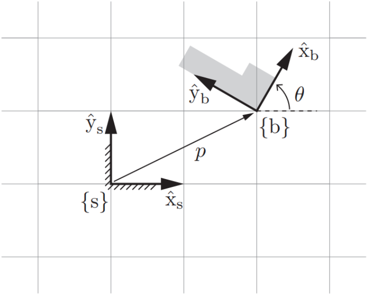


- Έστω ότι $\{s\}$ είναι το world frame, και ότι $\{b\}$ το body frame. Πώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε το σύστημα αναφοράς $\{b\}$ ως προς το $\{s\}$;

Μετασχηματισμοί Θέσεων στον 2Δ χώρο (1)

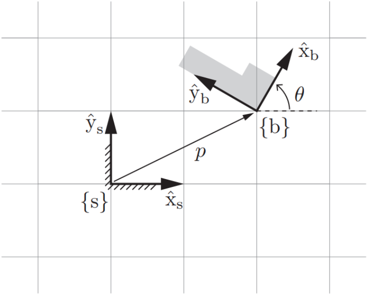


- Έστω ότι $\{s\}$ είναι το world frame, και ότι $\{b\}$ το body frame. Πώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε το σύστημα αναφοράς $\{b\}$ ως προς το $\{s\}$;
- $p = p^s_x \hat{x}_s + p^s_y \hat{y}_s$



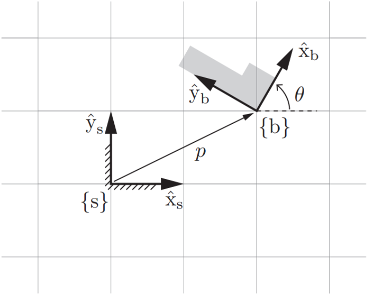
- Έστω ότι $\{s\}$ είναι το world frame, και ότι $\{b\}$ το body frame. Πώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε το σύστημα αναφοράς $\{b\}$ ως προς το $\{s\}$;
- $p = p_x^s \hat{x}_s + p_y^s \hat{y}_s$
- $\hat{x}_b = \cos\theta \hat{x}_s + \sin\theta \hat{y}_s$
- $\hat{y}_b = -\sin\theta \hat{x}_s + \cos\theta \hat{y}_s$

Πηγή: Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control, *Kevin M. Lynch and Frank C. Park*, 2017, Cambridge University Press.



Με μητρώα/διανύσματα:

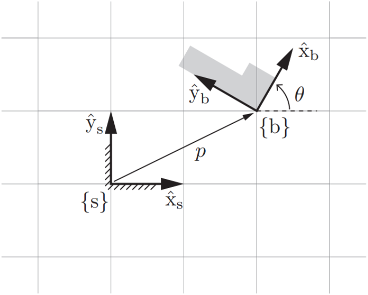
- $p = \begin{bmatrix} p_x^s \\ p_y^s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$



Με μητρώα/διανύσματα:

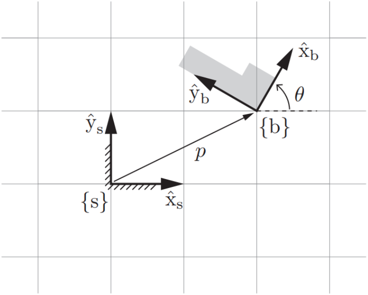
- $p = \begin{bmatrix} p_x^s \\ p_y^s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Μετασχηματισμοί Θέσεων στον 2Δ χώρο (2)



Με μητρώα/διανύσματα:

- $p = \begin{bmatrix} p_x^s \\ p_y^s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
- Το R καλείται μητρώο περιστροφής (rotation matrix)
- Το (p, R) αναπαριστούν τον μετασχηματισμό από το body frame στο world frame



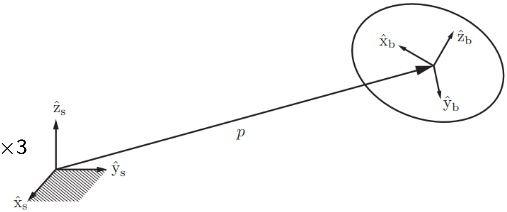
Με μητρώα/διανύσματα:

- $p = \begin{bmatrix} p_x^s \\ p_y^s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
- Το R καλείται μητρώο περιστροφής (rotation matrix)
- Το (p, R) αναπαριστούν τον μετασχηματισμό από το body frame στο world frame
- Μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες ενός σημείου $a_b = [a_x^b, a_y^b]^T$ από το body frame στο world frame, χρησιμοποιώντας τον τύπο: $a_s = p + Ra_b$

Πηγή: Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control, *Kevin M. Lynch and Frank C. Park*, 2017, Cambridge University Press.

Ανάλογα με τα προηγούμενα έχουμε στον 3Δ χώρο:

- $p = \begin{bmatrix} p_x^s \\ p_y^s \\ p_z^s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$
- $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$



- Το (p, R) αναπαριστούν τον μετασχηματισμό από το body frame στο world frame
- Μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες ενός σημείου $a_b = [a_x^b, a_y^b, a_z^b]^T$ από το body frame στο world frame, χρησιμοποιώντας τον τύπο: $a_s = p + Ra_b$

Ιδιότητες Μητρώων Περιστροφής (Rotation Matrices)

- Αν R_1, R_2 είναι rotation matrices, τότε το $R_1 R_2$ είναι πάλι rotation matrix
- $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$
- $RI = IR = R$ (υπάρχει identity matrix)
- $R^{-1} R = I$
- $R^{-1} = R^T$

Χρήση Μητρώων Περιστροφής (1)

- Αναπαράσταση προσανατολισμού (orientation)
  - Ένα rotation matrix R αναπαριστά τον προσανατολισμό ενός συστήματος αναφοράς ως προς ένα άλλο σύστημα αναφοράς. Γράφουμε R_{ab} για να εκφράσουμε ότι περιγράφουμε το σύστημα b ως προς το σύστημα a.
- Αλλαγή συστήματος αναφοράς ενός διανύσματος (vector) ή συστήματος αναφοράς (frame)
  - Έχουμε R_{ab} (το b ως προς το a) και R_{bc} (το c ως προς το b). Τότε $R_{ac} = R_{ab}R_{bc}$ αναπαριστά το c ως προς το a.
  - Μπορούμε να πούμε ότι το R_{ab} ισοδυναμεί με αλλαγή του συστήματος αναφοράς από το b στο a.
- Περιστροφή ενός σημείου, διανύσματος ή συστήματος αναφοράς
  - ...

Χρήση Μητρώων Περιστροφής (2)

- ...
- Περιστροφή ενός σημείου, διανύσματος ή συστήματος αναφοράς
  - Έστω ότι έχουμε ένα διάνυσμα (π.χ. $v = [v_x, v_y, v_z]$) και ένα μητρώο περιστροφής R, τότε το $v' = Rv$ είναι ένα διάνυσμα που έχει περιστραφεί θ radians ως προς τον άξονα ω, όπου $R = \text{Rot}(\omega, \theta)$.
  - Αντίστοιχα μπορούμε να περιστρέψουμε ένα σύστημα αναφοράς ή σημείο.
  - Κάθε περιστροφή εκφράζεται ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς.

- Θεωρούμε ότι κάθε σημείο στον 3Δ χώρο ορίζεται ως: $p = [x, y, z, 1]$
- Ενώ κάθε διάνυσμα ως: $v = [x, y, z, 0]$
- Ορίζουμε ως μητρώο ομογενούς μετασχηματισμού το $T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, όπου R ένα rotation matrix και t ένα διάνυσμα μετακίνησης (translation vector)
- Το T μετασχηματίζει το σημείο p: $p' = Tp = Rp + t$
- $v' = Tv = Rv$: τα διανύσματα μπορούν μόνο να περιστραφούν

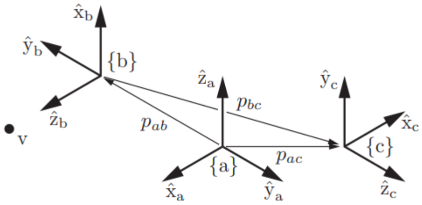
Ιδιότητες Homogeneous Transformation Matrices

- Αν T_1, T_2 είναι transformation matrices, τότε το $T_1 T_2$ είναι πάλι transformation matrix
- $(T_1 T_2)T_3 = T_1(T_2 T_3)$
- $TI = IT = T$ (υπάρχει identity matrix)
- $T^{-1}T = I$
- $T^{-1} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Χρήση Homogeneous Transformation Matrices (1)

- Αναπαράσταση θέσης και προσανατολισμού
  - Ένα transformation matrix T αναπαριστά τη θέση και τον προσανατολισμό ενός συστήματος αναφοράς ως προς ένα άλλο σύστημα αναφοράς. Γράφουμε $T_{ab} = T(R_{ab}, t_{ab})$ για να εκφράσουμε ότι περιγράφουμε το σύστημα b ως προς το σύστημα a.
- Αλλαγή συστήματος αναφοράς ενός διανύσματος (vector) ή συστήματος αναφοράς (frame)
  - Έχουμε T_{ab} (το b ως προς το a) και T_{bc} (το c ως προς το b). Τότε $T_{ac} = T_{ab}T_{bc}$ αναπαριστά το c ως προς το a.
  - Μπορούμε να πούμε ότι το T_{ab} ισοδυναμεί με αλλαγή του συστήματος αναφοράς από το b στο a.
- Μεταφορά ενός σημείου, διανύσματος ή συστήματος αναφοράς
  - ...

Χρήση Homogeneous Transformation Matrices (2)



- Μεταφορά ενός σημείου, διανύσματος ή συστήματος αναφοράς
  - Έστω ότι έχουμε ένα σημείο (π.χ. $p = [p_x, p_y, p_z, 1]$) και ένα transformation matrix T, τότε το $p' = Tp$ είναι ένα σημείο που έχει μετασχηματιστεί με βάση το $T = T(R_{ab}, t_{ab})$.
  - Αντίστοιχα μπορούμε να μετασχηματίσουμε ένα σύστημα αναφοράς ή ένα διάνυσμα.
  - Κάθε μετασχηματισμός/μεταφορά εκφράζεται ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς.

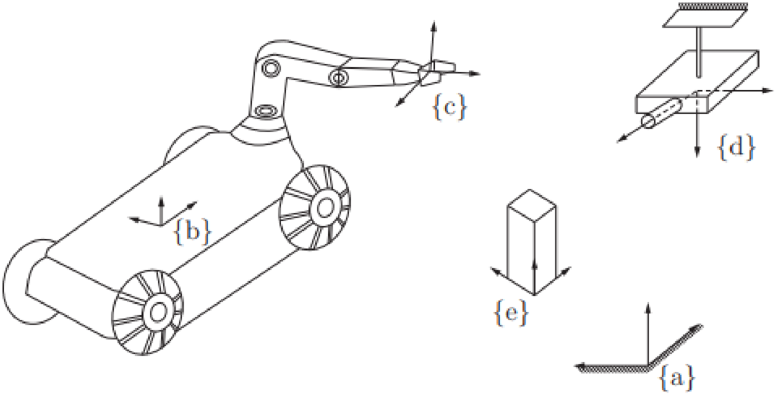
Rotation matrices σε 3Δ χώρο

$$Rot(\hat{x}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$Rot(\hat{y}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

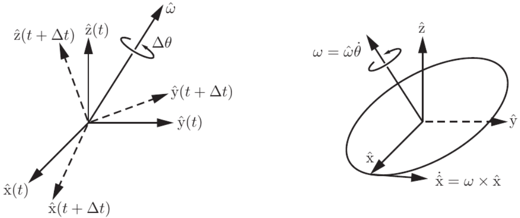
$$Rot(\hat{z}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συστήματα Αναφοράς - Παράδειγμα



Πηγή: Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control, *Kevin M. Lynch and Frank C. Park*, 2017, Cambridge University Press.

Γωνιακές Ταχύτητες (Angular Velocities) (1)



Πηγή: Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control, *Kevin M. Lynch and Frank C. Park*, 2017, Cambridge University Press.

- Ένα frame περιστρέφεται ως προς τον άξονα $\hat{w}$ κατά $\Delta\theta$
- Όσο το Δt πλησιάζει στο μηδέν, τότε $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \dot{\theta}$, και $\hat{w}$ είναι ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής
- Ορίζουμε ως **γωνιακή ταχύτητα** (angular velocity): $w = \hat{w}\dot{\theta}$, και έχουμε:

$$\dot{\hat{x}} = w \times \hat{x}$$

$$\dot{\hat{y}} = w \times \hat{y}$$

$$\dot{\hat{z}} = w \times \hat{z}$$

Γωνιακές Ταχύτητες (Angular Velocities) (2)

- Πρέπει να αναπαραστήσουμε το w ως προς κάποιο frame
- Είτε **world frame** είτε body frame
- $R(t) \equiv R_{wb}(t)$ το rotation matrix τη χρονική στιγμή t
- Η πρώτη γραμμή του $R(t)$, $r_1(t)$ περιγράφει τον άξονα $\hat{x}$, η δεύτερη $r_2(t)$ τον $\hat{y}$ και η τρίτη γραμμή $r_3(t)$ τον $\hat{z}$
- Έστω $\omega_w(t)$ η γωνιακή ταχύτητα ως προς το world frame
- Άρα:

$$\dot{r}_i = \omega_w \times r_i, \quad i = 1, 2, 3$$
$$\dot{R} = [\omega_w \times r_1 \; \omega_w \times r_2 \; \omega_w \times r_3] = \omega_w \times R$$

Έχουμε:

$$\dot{R} = [\omega_w \times r_1 \ \omega_w \times r_2 \ \omega_w \times r_3] = \omega_w \times R$$

Για να μην έχουμε το εξωτερικό γινόμενο, ορίζουμε ένα skew symmetric matrix ενός διανύσματος $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$:

$$[x] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{R} = [\omega_w]R \Rightarrow [\omega_w]R &= \dot{R} \\ [\omega_w]RR^{-1} &= \dot{R}R^{-1} \\ [\omega_w] &= \dot{R}R^T \end{aligned}$$

Αντίστοιχα μπορούμε να δούμε ότι: $[\omega_b] = R^T\dot{R}$

Γωνιακές Ταχύτητες (Angular Velocities) (3)

Συνοψίζοντας, έχουμε:

$$[\omega_w] = \dot{R}R^T$$
$$[\omega_b] = R^T\dot{R}$$

- $\omega_w \in \mathbb{R}^3$ είναι η γωνιακή ταχύτητα ως προς το world frame
- $\omega_b \in \mathbb{R}^3$ είναι η γωνιακή ταχύτητα ως προς το body frame
- Η ω_b **ΔΕΝ** είναι η γωνιακή ταχύτητα σε σχέση με το κινούμενο body frame, αλλά σε σχέση με το σταθερό world frame
- Η ω_w **ΔΕΝ** εξαρτάται από την επιλογή του body frame
- Η ω_b **ΔΕΝ** εξαρτάται από την επιλογή του world frame
- Το γινόμενο $\dot{R}R^T$ είναι ανεξάρτητο από το body frame
- Το γινόμενο $R^T\dot{R}$ είναι ανεξάρτητο από το world frame
- Έστω μία γωνιακή ταχύτητα που την εκφράζουμε ως προς το σύστημα αναφοράς $\{d\}$, ω_d, μπορούμε να την μετατρέψουμε στο σύστημα αναφοράς $\{c\}$: $\omega_c = R_{dc}\omega_d$

Spatial Velocity (1)

Ισχύει κάτι αντίστοιχο με τα μητρώα μετασχηματισμού;

Spatial Velocity (1)

Ισχύει κάτι αντίστοιχο με τα μητρώα μετασχηματισμού;

$$\begin{aligned} T^{-1}\dot{T} &= \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R^T \dot{R} & R^T \dot{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\dot{p}$ είναι η γραμμική ταχύτητα ως προς το world frame, και άρα $R^T \dot{p}$ είναι η γραμμική ταχύτητα ως προς το body frame: v_b.

Spatial Velocity (2)

Βάζουμε τα ω_b και v_b σε ένα διάνυσμα, που το καλούμε **Body Spatial Velocity** (ή αλλιώς body twist): $\mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$.

Γράφουμε επίσης:

$$T^{-1}\dot{T} = [\mathcal{V}_b] = \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα έχουμε **World Spatial Velocity** (ή αλλιώς spatial twist): $\mathcal{V}_w = \begin{bmatrix} \omega_w \\ v_w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$. Γράφουμε επίσης:

$$\dot{T}T^{-1} = [\mathcal{V}_w] = \begin{bmatrix} \dot{R}R^T & \dot{p} - \dot{R}R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega_w] & v_w \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spatial Velocity (3)

Μερικές παρατηρήσεις:

- $v_w = \dot{p} - \dot{R}R^T p$ — **ΔΕΝ** είναι η γραμμική ταχύτητα ως προς το world frame

Spatial Velocity (3)

Μερικές παρατηρήσεις:

- $v_w = \dot{p} - \dot{R}R^T p$ — **ΔΕΝ** είναι η γραμμική ταχύτητα ως προς το world frame (θα ήταν απλά $\dot{p}$)
- $v_w = \dot{p} + \omega_w \times (-p)$ — τώρα το v_w είναι η ταχύτητα του κέντρου του world frame ως προς το world frame αν το σώμα ήταν τόσο μεγάλο για να συμπεριλαμβάνει το σημείο αυτό
- ω_b είναι η γωνιακή ταχύτητα ως προς το body frame και ω_w είναι η γωνιακή ταχύτητα ως προς το world frame
- v_b είναι η γραμμική ταχύτητα του κέντρου του body frame
- v_w είναι η γραμμική ταχύτητα του κέντρου του world frame

Spatial Velocity (4)

Μπορούμε να πάμε από το $\mathcal{V}_b$ στο $\mathcal{V}_w$:

$$[\mathcal{V}_b] = T^{-1}\dot{T} = T^{-1}[\mathcal{V}_w]T$$

Και ανάποδα:

$$[\mathcal{V}_w] = \dot{T}T^{-1} = T[\mathcal{V}_b]T^{-1}$$

Αν κάνουμε τις πράξεις:

$$[\mathcal{V}_w] = \begin{bmatrix} R[\omega_b]R^T & -R[\omega_b]R^T p + Rv_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_w \\ v_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ v_b \end{bmatrix}$$

Έστω ένας μετασχηματισμός $T = (R, p)$, τότε λέμε ότι η adjoint μορφή του, $[Ad_T]$, είναι:

$$[Ad_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix}$$

Μερικές ιδιότητες:

- $[Ad_T]^{-1} = [Ad_{T^{-1}}]$
- $[Ad_{T_1}][Ad_{T_2}]\mathcal{V} = [Ad_{T_1 T_2}]\mathcal{V}$

Spatial Forces

Μπορούμε αντίστοιχα με τις ταχύτητες να μελετήσουμε δυνάμεις (forces, f) και ροπές (moments, m) που ασκούνται σε ένα σώμα:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} m \\ f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Το $\mathcal{F}$ καλείται **spatial force** (ή wrench). Αν έχουμε ένα spatial force $\mathcal{F}_b$ ως προς το σύστημα αναφοράς $\{b\}$, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε στο σύστημα αναφορά $\{w\}$:

$$\mathcal{F}_w = [Ad_{T_{bw}}]^T \mathcal{F}_b$$

και ανάποδα:

$$\mathcal{F}_b = [Ad_{T_{wb}}]^T \mathcal{F}_w$$

Βιβλιογραφία

Κεφάλαια 1, 2 και 3 από **Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control**, *Kevin M. Lynch and Frank C. Park*, 2017, Cambridge University Press. ebook