Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών Συστημάτων
1ο Σετ Ασκήσεων - Λύσεις

Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2015

Ερώτημα (α). Η νοσοκόμα ακολουθεί μια Ομογενή Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου με χώρο καταστάσεων το σύνολο $S = \{1, 2, ..., 6\}$ που είναι οι ασθενείς. Το ποιά θα είναι η επόμενη κίνησή της εξαρτάται μόνο από το σε ποιόν ασθενή βρίσκεται τώρα, ισχύει δηλαδή η μαρκοβιανή ιδιότητα. Επίσης, η πιθανότητες μετάβασης είναι αναλλοίωτες ως προς το χρόνο οπότε έχουμε ομογένεια. Το S διαμερίζεται σε 3 σύνολα: Το σύνολο $C_1 = \{2, 3\}$ που αποτελείται από βέβαια επαναληπτικές καταστάσεις, το $C_2 = \{5\}$ που έχει μια απορροφητική κατάσταση και το σύνολο $T = \{1, 4, 6\}$ με μεταβατικές καταστάσεις. Σημειώνεται επίσης πως καμία κατάσταση δεν είναι περιοδική.
Αφού λοιπόν η αλυσίδα περιέχει δύο κλειστά σύνολα καταστάσεων είναι μειώσιμη. Επομένως δεν υπάρχει μοναδική οριακή κατανομή.

Ερώτημα (β). Ζητάμε τις πιθανότητες απορρόφησης στην κλάση C_1, δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση 1. Έστω $a_i = \Pr(X_n \in C_1, n \to \infty | X_1 = i)$ οι πιθανότητες απορρόφησης στην κλάση 1, δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση i. Αυτές οι πιθανότητες δεν είναι οι γνωστές πιθανότητες μετάβασης και δε μπορούν να υπολογιστούν απλά μέσω ενός συστήματος με τον πίνακα **P**. Εφαρμόζουμε διαδοχικά τον τύπο

$$a_i = \sum_{k \in T} p_{ik} a_k + \sum_{k \in C_1} p_{ik}$$

ο οποίος "περιγράφει" πως μπορεί να γίνει η απορρόφηση στην κλάση C_1 δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση i. Παίρνουμε έτσι το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.5a_1 + 0.1a_4 + 0.1a_6 + 0.2 \\ a_4 &= 0.25a_1 + 0.25a_4 + 0.25 \\ a_6 &= \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι $a_1 = 5/9$. Ομοίως εδώ βρίσκουμε πως $a_4 = 0.5185$ και $a_6 = 0.2593$ (χρειάζονται παρακάτω).

Για έναν δεύτερο τρόπο: Μέσω των πιθανοτήτων μετάβασης. Ουσιαστικά ισχύει πως

$$a_1 = \lim_{n \to \infty} (p_{1,2}^{(n)} + p_{1,3}^{(n)})$$

και οι τελευταίοι δύο όροι μπορούν να βρεθούν υπολογίζοντας διαδοχικά τους πίνακες

$$\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \ldots, \mathbf{P}^{10}, \ldots$$

μέχρι να υπάρξει σύγκλιση και παίρνοντας τα αντίστοιχα στοιχεία. Για την αλυσίδα της εκφώνησης το μητρώο πράγματι συγκλίνει και βρίσκουμε αλγοριθμικά το ζητούμενο...

Ερώτημα (γ) Θέλουμε να βρούμε τον αναμενόμενο αριθμό βημάτων μέχρι να γίνει απορρόφηση, δεδομένου ότι η απορρόφηση γίνεται στην κατάσταση 5, γεγονός το οποίο ονομάζουμε A.
Προσοχή! Το πρόβλημα εδώ είναι πως δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο **P** διότι η πληροφορία που μας δίνεται για το μέλλον (δηλαδή το οτι η αλυσίδα ΘΑ ΑΠΟΡΡΟΦΗΘΕΙ στην κατάσταση 5) στην πραγματικότητα ΑΛΛΑΖΕΙ το δειγματοχώρο του πειράματος!! Σκεφτείτε για παράδειγμα πως πλέον δεν είναι δυνατόν η αλυσίδα να μεταβεί στις καταστάσεις 2-3, καθώς αν συνέβαινε κάτι τέτοιο δεν θα έφτανε ΠΟΤΕ στην 5! Θα πρέπει λοιπόν, οι νέες πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας να υπολογισθούν ΥΠΟ ΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ της πληροφορίας που μας δίνεται! Πρέπει λοιπόν να βρούμε τις νέες, δεσμευμένες ως προς A, πιθανότητες μετάβασης. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Bayes:

$$
\begin{aligned}
p_{ij|A} &= \Pr(X_{n+1}=j|X_n=i,A) \\
&= \frac{\Pr(A,X_{n+1}=j,X_n=i)}{\Pr(A,X_n=i)} \\
&= \frac{\Pr(A|X_{n+1}=j,X_n=i)\cdot\Pr(X_{n+1}=j,X_n=i)}{\Pr(A|X_n=i)\cdot\Pr(X_n=i)} \\
&= \frac{\Pr(A|X_{n+1}=j)\cdot\Pr(X_{n+1}=j|X_n=i)\cdot\cancel{\Pr(X_n=i)}}{\Pr(A|X_n=i)\cdot\cancel{\Pr(X_n=i)}} \\
&= \frac{\beta_j}{\beta_i}p_{ij}
\end{aligned}
$$

Θέσαμε $\Pr(A|X_n=i)=\beta_i$ και ισχύει ότι $\Pr(A|X_n=j)=\Pr(A|X_{n+1}=j)$, λόγω της μαρκοβιανής ιδιότητας. Εξ ορισμού έχουμε:

$$\beta_i = \Pr(X_n\in C_2, n\to\infty|X_1=i) = 1-\Pr(X_n\in C_1, n\to\infty|X_1=i) = 1-a_i$$

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το (β), βρίσκουμε ότι:

$$\beta_1 = 0.4444,\;\; \beta_4 = 0.4815,\;\; \beta_6 = 0.7407$$

Έστω τώρα μ_i ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων μέχρι την απορρόφηση (στην κατάσταση 5), δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση i. Πλέον οι καταστάσεις $2,3$ δε μας ενδιαφέρουν. Έχουμε το εξής σύστημα:

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= p_{11}(1+\mu_1)+\frac{\beta_4}{\beta_1}p_{14}(1+\mu_4)+\frac{\beta_6}{\beta_1}p_{16}(1+\mu_6) \\
\mu_4 &= p_{44}(1+\mu_4)+\frac{\beta_1}{\beta_4}p_{41}(1+\mu_1)+\frac{\beta_6}{\beta_4}p_{46}(1+\mu_6) \\
\mu_6 &= p_{66}(1+\mu_6)+\frac{\beta_1}{\beta_6}p_{61}(1+\mu_1)+\frac{\beta_4}{\beta_6}p_{64}(1+\mu_4)
\end{aligned}
$$

Οπότε, αντικαθιστώντας τις τιμές και λύνοντας το σύστημα παίρνουμε το ζητούμενο.

Δεύτερος τρόπος: Μπορούμε να υπολογίσουμε το 3×3 μητρώο $\hat{\mathbf{Q}}$ που περιέχει τις "νέες" πιθανότητες μετάβασης για τις καταστάσεις $1, 4, 6$, χωρίς να λάβουμε υπόψιν τις καταστάσεις $2, 3$. Ο ζητούμενος αριθμός, οι επισκέψεις στις μεταβατικές καταστάσεις μέχρι να γίνει απορρόφηση, προκύπτει έπειτα να προκύψει κατευθείαν από το μητρώο $(\mathbf{I}_{3\times 3} - \hat{\mathbf{Q}})^{-1}$ (το οποίο στη βιβλιογραφία των αλυσίδων Markov ορισμένες φορές καλείται *Fundamental Matrix.*) και πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_4 \\ \mu_6 \end{pmatrix} = (\mathbf{I}_{3\times 3} - \hat{\mathbf{Q}})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Όπου με $\mathbf{I}_{3\times 3}$ συμβολίσαμε το ταυτοτικό 3×3 μητρώο.

Ερώτημα (δ) Το μητρώο μεταβάσεων τώρα γίνεται

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Πλέον η αλυσίδα είναι **αμείωτη**, **βέβαια επαναληπτική** και **μη-περιοδική**, οπότε έχουμε **εργοδικότητα**. Το ζητούμενο είναι το ποσοστό του χρόνου που ξοδεύει η νοσοκόμα μακροπρόθεσμα στον ασθενή 6. Αυτό προκύπτει από τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας, η οποία είναι μοναδική, και ταυτίζεται με την ανεξάρτητη της αρχικής κατάστασης οριακή κατανομή. (Στις εργοδικές αλυσίδες η στάσιμη, και η οριακή κατανομή εκφράζουν το ίδιο ακριβώς μέγεθος, το οποίο ονομάζουμε συχνά "*μόνιμη κατάσταση*" ή "*πιθανότητες μόνιμης κατάστασης*")

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων (μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης)

$$\boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^T \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1 \qquad (2)$$

βρίσκουμε ότι

$$\boldsymbol{\pi} = [0.3024 \;\; 0.2010 \;\; 0.1668 \;\; 0.1440 \;\; 0.1296 \;\; 0.0562]$$

Επομένως, η νοσοκόμα αφιερώνει 5.62% του χρόνου της στον ασθενή 6.

Προσοχή! Το σύστημα που πρέπει να λυθεί είναι το παραπάνω. Αν κάποιος προσπαθήσει να λύσει το $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\pi}$, (το οποίο θα ίσχυε ΜΟΝΟ αν το $\mathbf{P}$ ήταν στοχαστικό κατά στήλες και όχι κατά γραμμές όπως στην περίπτωσή μας...), θα βρει πως όλες οι πιθανότητες πρέπει να είναι ίσες με $1/6$ το οποίο φυσικά είναι λάθος.

Ερώτημα (ε) Σε αυτό το ερώτημα απαντάμε για τη γενική περίπτωση και στο τέλος εφαρμόζουμε για το πρόβλημά μας. Έστω λοιπόν $\{X_n\}$ μια μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το $\{1, 2, ..., n\}$ και $\mathbf{P}$ το $n \times n$ μητρώο με τις πιθανότητες μετάβασης. Υποθέτουμε πως από την κατάσταση i εισπράττουμε $r(i)$.

(ε.i) Η ζητούμενη αναδρομική σχέση, όπου $s \in \{1, 2, ..., n\}$, είναι

$$m_{k+1}(s) = r(s) + \sum_{j=1}^{6} p_{sj} \cdot m_k(j)$$

Το σκεπτικό πίσω από την απόδειξη είναι το εξής: βρίσκομαι στον s και πρέπει συνολικά να κάνω $k+1$ "εισπράξεις". Φεύγω από αυτόν παίρνοντας μια είσπραξη και πάω σε μία από n επιλογές, με αντίστοιχες πιθανότητες, όπου θα πρέπει να κάνω k εισπράξεις. Πιο αναλυτικά η απόδειξη δίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
m_{k+1}(s) &= E[R_{k+1}|X_1 = s] \\
&= E[r(X_1) + r(X_2) + ... + r(X_{k+1})|X_1 = s] && (3) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_{si} \cdot E[r(X_1) + r(X_2) + ... + r(X_{k+1})|X_1 = s, X_2 = i] && (4) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_{si} \cdot E[r(s) + r(X_2) + ... + r(X_{k+1})|X_2 = i] && (5) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_{si} \cdot \left(\underbrace{E[r(s)|X_2 = i]}_{r(s)} + E[r(X_2) + ... + r(X_{k+1})|X_2 = i] \right) && (6) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_{si} r(s)}_{r(s)} + \sum_{i=1}^{n} p_{si} \cdot E[r(X_2) + ... + r(X_{k+1})|X_2 = i] && (7) \\
&= r(s) + \sum_{i=1}^{n} p_{si} \cdot E[r(X_1) + ... + r(X_k)|X_1 = i] && (8) \\
&= r(s) + \sum_{i=1}^{n} p_{si} \cdot m_k(i)
\end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για μέσες τιμές για τη μετάβαση από την (3) στην (4), και τη μαρκοβιανή ιδιότητα για την μετάβαση από την (7) στην (8) .

Έστω αρχικά πως για $k = 1, 2, ...$

$$\mathbf{m}^{(k)} = [m_k(1), m_k(2), ..., m_k(n)]^T \;\;,\;\; \mathbf{r} = [r(1), r(2), ..., r(n)]^T$$

Στην αναδρομική σχέση προηγουμένως παρατηρούμε πως κάθε ένα στοιχείο του $\mathbf{m}^{(k)}$ προκύπτει ως μια συνιστώσα του **r** συν μια γραμμή του μητρώου **P** επί το διάνυσμα $\mathbf{m}^{(k)}$. Αυτά συνοψίζονται στην εξίσωση

$$\mathbf{m}^{(k+1)} = \mathbf{r} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}^{(k)} \tag{9}$$

Προσοχή! Μια βεβιασμένη προσέγγιση σε αυτό το πρόβλημα μας κάνει να σκεφτούμε τη σχέση

$$m_{k+1}(s) = m_k(s) + \sum_{j=1}^{6} p_{sj} \cdot r(j)$$

(ή την περίπου αντίστοιχη μητρική μορφή $\mathbf{m}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}$) η οποία όμως είναι λάθος! Αυτό διότι για να "σπάσουμε" τον υπολογισμό του $\mathbf{m}^{(k+1)}$ χρειαζόμαστε απαραιτήτως όλα τα $m_k(1), m_k(2), ..., m_k(n)$, αφού, μετά από k βήματα, δε γνωρίζουμε σε ποιά κατάσταση έχουμε φτάσει.

(ε.ii) Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι ο υπολογισμός του $\mathbf{m}^{(k)}$ για $k = 50$ και $\mathbf{r} = [2, 1, 2, 3, 1, 5]^T$. Υλοποιώντας την εξίσωση (9) με αυτά τα δεδομένα σε κάποιο περιβάλλον υπολογισμού, εύκολα βρίσκουμε πως θα μαζεύει κατά μέσο όρο 99.5259 ανά 50 επαναλήψεις. Αυτό που παρατηρείται είναι πως όσο το k μεγαλώνει, η σχετική διαφορά στις επιμέρους (αθροιστικές) ανταμοιβές ελαχιστοποιείται.