

# Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

## Άσκηση Διαδικασίας Bernoulli

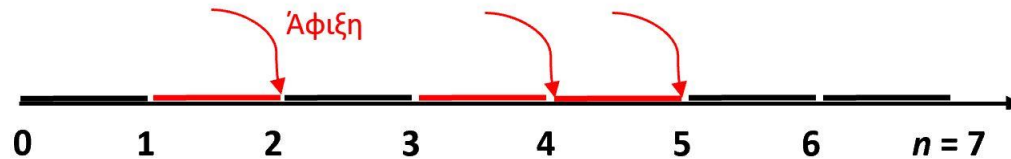
Γιάννης Γαροφαλάκης

# Άσκηση (1)

Ένα υπολογιστικό σύστημα εκτελεί εργασίες δύο χρηστών. Ο χρόνος χωρίζεται σε slots, κατά τη διάρκεια καθενός από τα οποία το σύστημα είναι *idle* με πιθανότητα  $p_I = 1/6$ , και *busy* με πιθανότητα  $p_B = 5/6$ . Κατά τη διάρκεια ενός busy slot, το σύστημα εκτελεί μία εργασία η οποία με πιθανότητα  $2/5$  προέρχεται από τον πρώτο χρήστη ενώ με πιθανότητα  $3/5$  από το δεύτερο. Θεωρούμε πως τα γεγονότα που αφορούν διαφορετικά slot είναι ανεξάρτητα.

- α) Να βρεθεί η πιθανότητα η πρώτη εργασία του χρήστη 1 να εκτελεστεί στο 4ο slot.
- β) Δεδομένου πως ακριβώς 5 από τα πρώτα 10 slot είναι idle, να βρεθεί η πιθανότητα το 6ο idle slot να είναι το slot 12.

# Απαντήσεις (1)



- “Συνολική” Bernoulli διαδικασία με πιθανότητα επιτυχίας:  $p_B = 5/6$

- “Διαχωρισμός” της διαδικασίας:

Χρήστης 1: Bernoulli με  $p_{X1} = 2/5 \cdot p_B = 2/5 \cdot 5/6 = 1/3$

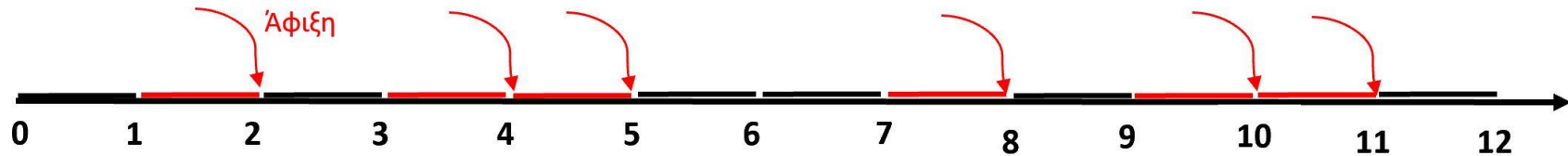
Χρήστης 2: Bernoulli με  $p_{X2} = 3/5 \cdot p_B = 3/5 \cdot 5/6 = 1/2$

(α) Γεωμετρική κατανομή:  $p_T(t) = (1 - p)^{t-1} \cdot p$

$$\Pi_{(\alpha)} = (1 - p_{X1})^3 \cdot p_{X1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81} = \mathbf{0.0987}$$

# Απαντήσεις (2)

(β)



$$\Pi_{(\beta)} = \Pr\{5 \text{ busy slots από } 10\} \cdot p_B \cdot (1 - p_B) =$$

(Binomial)

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$= \binom{10}{5} \cdot p_B^5 \cdot (1 - p_B)^5 \cdot p_B \cdot (1 - p_B) =$$

$$= \binom{10}{5} \cdot (5/6)^6 \cdot (1/6)^6 = \mathbf{0.0018}$$

Εναλλακτικά:

$$\Pi_{(\beta)} = \Pr\{\eta \text{ 6η άφιξη γίνεται στο 11ο slot}\} \cdot (1 - p_B) =$$

(Negative Binomial)

$$p_{Y_k}(t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}$$

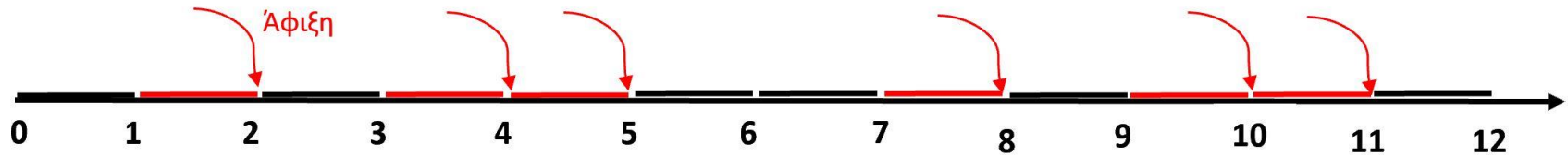
$$= \binom{10}{5} \cdot (5/6)^6 \cdot (1 - 5/6)^5 \cdot 1/6 = \mathbf{0.0018}$$

# Άσκηση (2)

- γ) Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός slot μέχρι και την 5η εργασία του χρήστη 1, καθώς και ο αναμενόμενος αριθμός από *busy slots* μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.
- δ) Να βρεθεί η κατανομή, η μέση τιμή και η διακύμανση του αριθμού των εργασιών του χρήστη 2 μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.

# Απαντήσεις (3)

(γ)



- Είναι η μέση τιμή της Negative Binomial, για  $k = 5$  και  $p = p_{X_1} = 1/3$

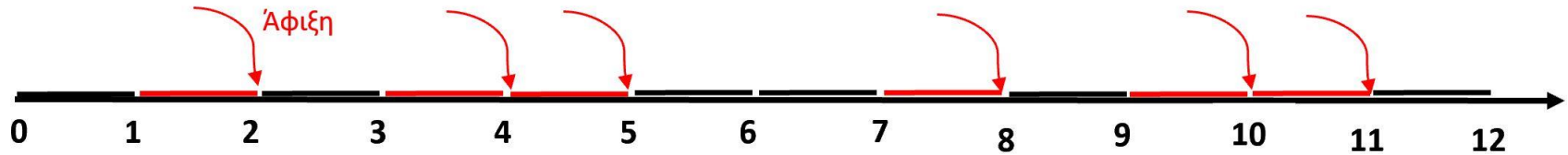
$$E[Y_k] = k/p = 5/(1/3) = \mathbf{15} \text{ slots}$$

- Ουσιαστικά ζητείται πόσα από τα 15 slots είναι busy στη “συνολική” διαδικασία. Μέση τιμή της Binomial, για  $n = 15$  και  $p = p_B = 5/6$

$$E[N] = n \cdot p = 15 \cdot (5/6) = \mathbf{12.5} \text{ busy slots}$$

# Απαντήσεις (4)

(δ)



- Binomial, για  $n = 15$  και  $p = p_{X_2} = 1/2$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p_N(\mathbf{k}) = \binom{15}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{15-k} = \binom{15}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \binom{15}{k} \frac{1}{2^{15}}, \quad k \leq 15$$

- $E[N] = n \cdot p = 15 \cdot (1/2) = 7.5$
- $Var(N) = n \cdot p \cdot (1-p) = 15 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 3.75$