Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Διαδικασίες Markov Διακριτού Χρόνου

Γιάννης Γαροφαλάκης

Στοχαστικές διαδικασίες

- *Στοχαστική Διαδικασία* (Σ.Δ.): ορίζεται ως μία οικογένεια Τυχαίων Μεταβλητών (Τ.Μ.), ***X(t)*,** όπου οι Τ.Μ. έχουν δεικτοδοτηθεί με τη χρονική παράμετρο *t*.
- Παράγοντες ταξινόμησης στοχαστικών διαδικασιών
  - *ο χώρος καταστάσεων* (οι τιμές που παίρνουν οι ΤΜ)
    - πεπερασμένες ή αριθμήσιμες τιμές →Σ.Δ. *διακριτών-καταστάσεων* (*αλυσίδα). Ο χώρος καταστάσεων* ↔ {0, 1, 2, …}
    - τιμές από ένα πεπερασμένο ή άπειρο συνεχές διάστημα → Σ.Δ. *συνεχών-καταστάσεων*
  - η *χρονική παράμετρος* (επιτρεπτές χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης)
    - Σ.Δ. Διακριτού-χρόνου [X_n – Στοχαστική Ακολουθία]
    - Σ.Δ. Συνεχούς χρόνου [X(t)]
  - η *στατιστική σχέση* μεταξύ των Τ.Μ.

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (1)

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε την από κοινού PDF στις ΤΜ

  $\vec{X} = [\, X(t_1), X(t_2), \ldots]$, δηλαδή την:

$$F_{\vec{X}}\left(\vec{x}\,;\vec{t}\,\right) \equiv P\left[X\left(t_1\right) \le x_1,\ \ldots\ ,\ X\left(t_n\right) \le x_n\right]$$

για όλα τα $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{t} = (t_1, t_2, \ldots ,t_n)$ και n.

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (2)

1. Στάσιμες ΣΔ

   Αμετάβλητες στις ολισθήσεις στο χρόνο. Δηλαδή για οποιοδήποτε σταθερό *τ*, πρέπει: $F_{\vec{X}}\left(\vec{x};\vec{t}+\tau\right)=F_{\vec{X}}\left(\vec{x};\vec{t}\right)$

   όπου $\vec{t}+\tau=(t_1+\tau,\ t_2+\tau,\ \ldots,\ t_n+\tau)$.

2. Ανεξάρτητες ΣΔ

   Οι πιο απλές. Δεν υπάρχει καμία δομή ή εξάρτηση των Τ.Μ. τους:

$$f_{\vec{X}}\left(\vec{x};\vec{t}\right)\equiv f_{X_1\ldots X_n}\left(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n\right)=f_{X1}\left(x_1;t_1\right)\ldots f_{Xn}\left(x_n;t_n\right)$$

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (3)

3. Διαδικασίες Markov

Για μια Αλυσίδα Markov $\{X(t)\}$, η πιθανότητα ότι η επόμενη τιμή $X(t_{n+1})$ θα είναι ίση με $\boldsymbol{x_{n+1}}$, εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή $X(t_n) = \boldsymbol{x_n}$ και όχι από οποιαδήποτε προηγούμενη (ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΜΝΗΣΙΑΣ).

Ιδιότητα Markov (για αλυσίδα Markov):

$$P\left[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_1) = x_1\right] =$$

$$= P\left[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n\right]$$

όπου $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$, ενώ τα x_i περιέχονται σε κάποιο διακριτό χώρο καταστάσεων.

- Θα αποδείξουμε αργότερα ότι ο **χρόνος παραμονής** σε μια κατάσταση ακολουθεί την:

  Εκθετική Κατανομή (διαδικασία συνεχούς χρόνου), ή την - ισοδύναμη -

  Γεωμετρική Κατανομή (διαδικασία διακριτού χρόνου).

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (4)

4. Διαδικασίες Γεννήσεων - Θανάτων

   Κλάση των Διαδικασιών Markov: Οι αλλαγές κατάστασης γίνονται μόνο μεταξύ *γειτονικών* καταστάσεων.

   Δηλαδή αν $X(t_n) = i$, τότε $X(t_{n+1}) = i - 1$ ή $X(t_{n+1}) = i + 1$ μόνο.

5. Διαδικασίες Semi Markov

- Επιτρέπουμε αυθαίρετη κατανομή του χρόνου που η διαδικασία μπορεί να παραμείνει σε μια κατάσταση.
- Η διαδικασία συμπεριφέρεται σαν Markov κατά τις χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης, και στην πραγματικότητα *σε αυτές τις στιγμές* λέμε ότι έχουμε μια *συμπυκνωμένη (embedded) αλυσίδα Markov*.
- Υπερσύνολο των διαδικασιών Markov.

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (5)

6. Τυχαίοι περίπατοι

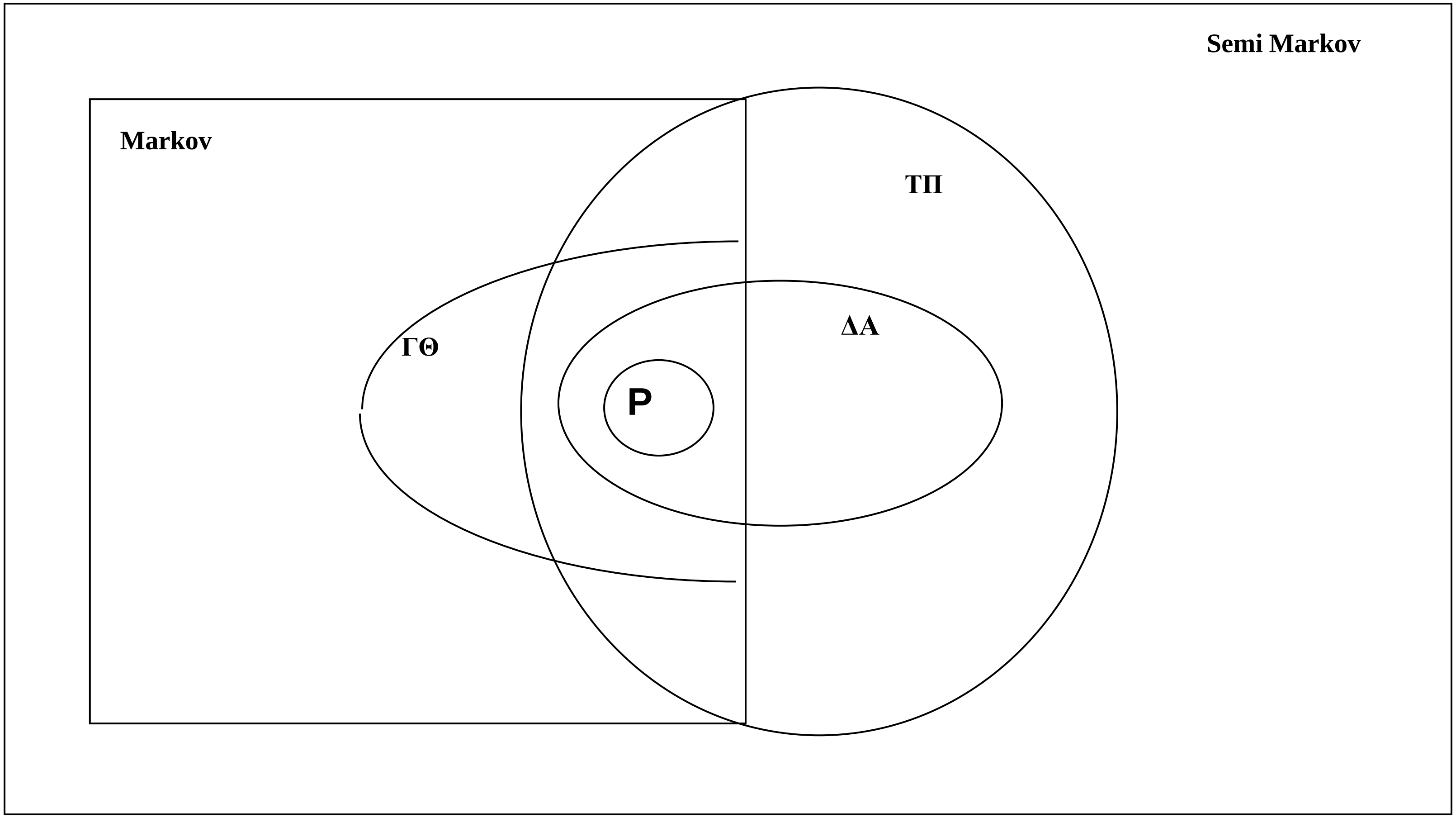
Η επόμενη θέση είναι ίση με την προηγούμενη θέση, συν μια τυχαία μεταβλητή

Δηλαδή, μια ακολουθία ΤΜ *{Sn}* είναι τυχαίος περίπατος αν:
$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ όπου $n = 1, 2, \ldots,$ $S_0 = 0$ και $X_1, X_2, \ldots$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων ΤΜ με κοινή κατανομή.

7. Διαδικασίες ανανέωσης

- Ειδική περίπτωση των τυχαίων περιπάτων.
- S_n είναι τώρα η ΤΜ που καθορίζει τη *χρονική στιγμή* στην οποία γίνεται η n-οστή μεταβολή κατάστασης και $\{X_n\}$ είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων, όμοια κατανεμημένων ΤΜ, όπου η X_n αντιπροσωπεύει το χρόνο μεταξύ της $(n-1)$-οστής και n-οστής μεταβολής κατάστασης . Οι μεταβολές γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων .

Σχέσεις των κλάσεων Στοχαστικών Διαδικασιών



P: Poisson

Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

- Η ΣΔ καταλαμβάνει διακριτές θέσεις και οι αλλαγές μεταξύ αυτών των θέσεων γίνονται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές
- Η υπό συνθήκη πιθανότητα να γίνει η μετάβαση της διαδικασίας από την *κατάσταση* E_i όπου είναι στο βήμα *(n-1),* στην *κατάσταση* E_j κατά το βήμα *n*

$$P\left[X_n = j \;\middle|\; X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\right] = P\left[X_n = j \;\middle|\; X_{n-1} = i_{n-1}\right]$$

Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος

Ομογενείς αλυσίδες Markov

- Αν οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι *ανεξάρτητες του n*, τότε έχουμε μια *ομογενή αλυσίδα Markov. Ορίζουμε:*

$$p_{ij} \equiv P\left[X_n = j \;\middle|\; X_{n-1} = i\right]$$

- Πιθανότητες μετάβασης *m*-βημάτων:

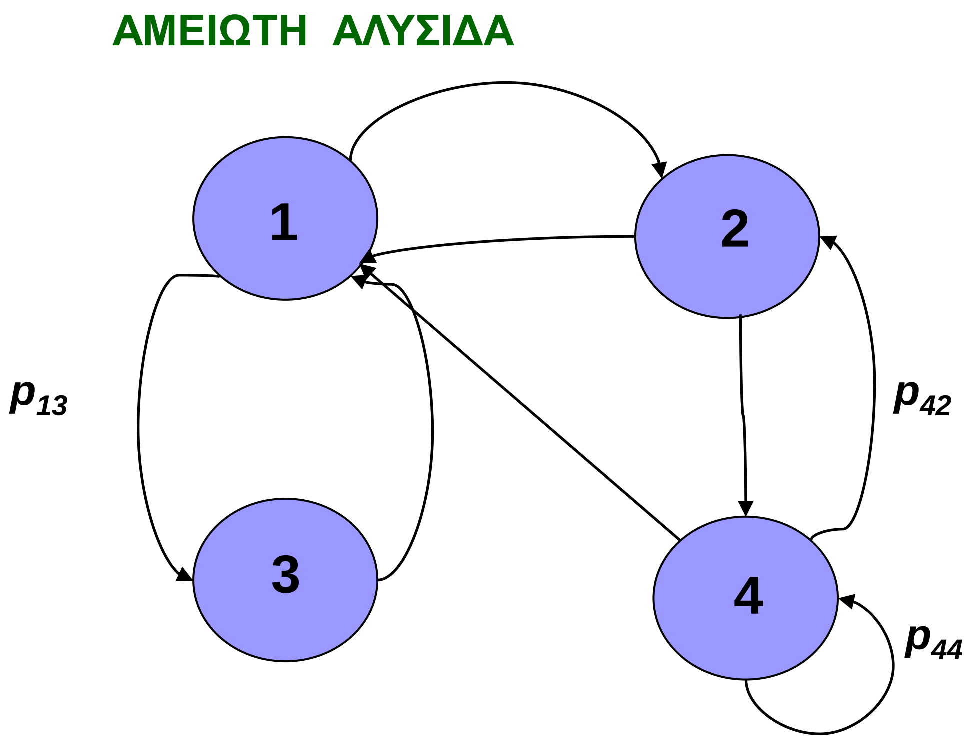
$$p_{ij}^{(m)} \equiv P\left[X_{n+m} = j \;\middle|\; X_n = i\right]$$

- Εύκολα βγαίνει: $p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$
- Δηλαδή, αν πρόκειται να «ταξιδέψουμε» από την E_i στην E_j μέσα σε m βήματα, πρέπει να το κάνουμε «ταξιδεύοντας» πρώτα από την E_i σε κάποια E_k μέσα σε *(m-1)* βήματα και μετά από την E_k στην E_j στο επόμενο βήμα

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (1)

- **Αμείωτη**: κάθε κατάσταση της μπορεί να προσπελασθεί από όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις. Δηλαδή, υπάρχει ένας ακέραιος m_0 για κάθε ζευγάρι καταστάσεων E_i , E_j :

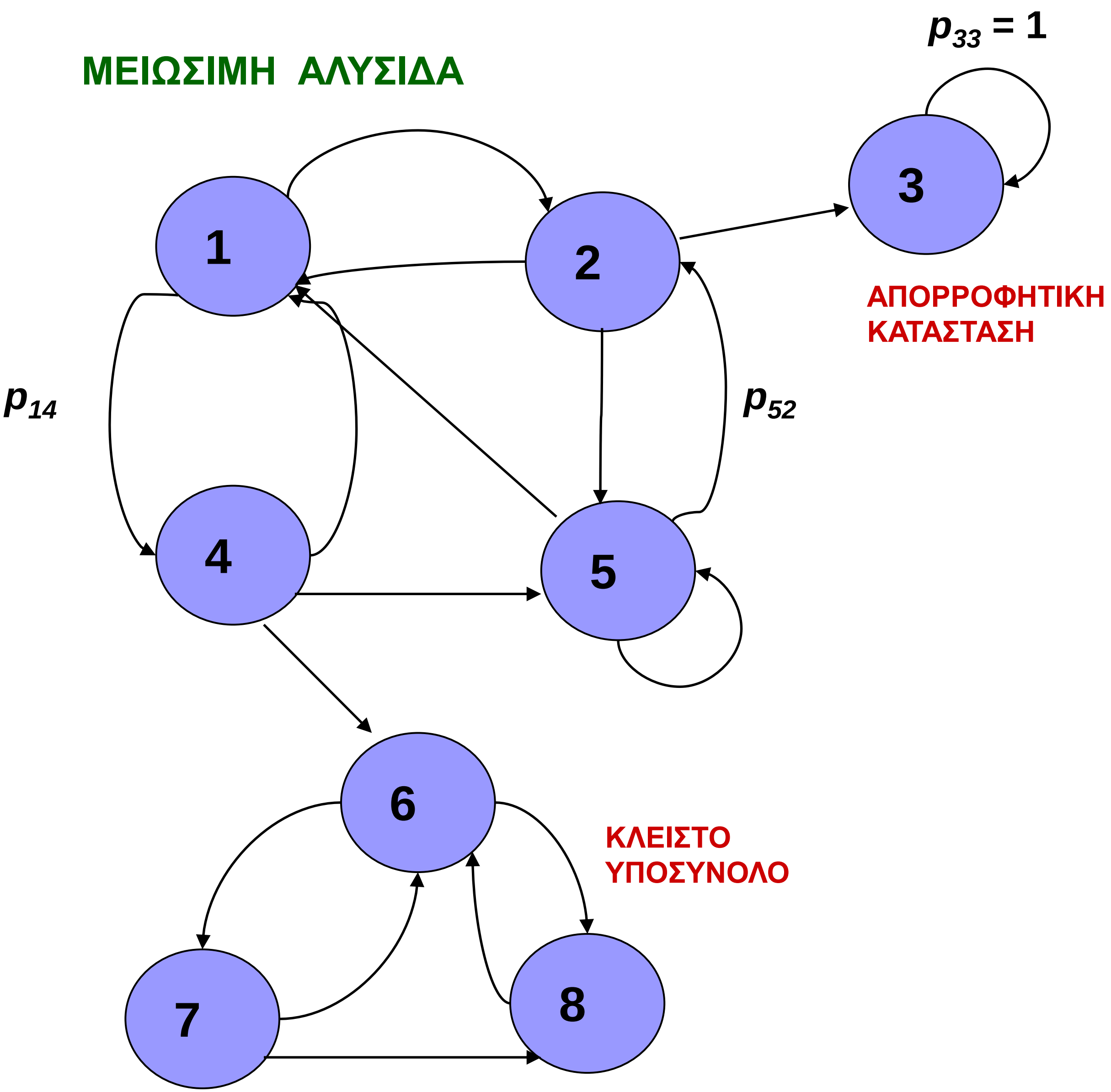
$$p_{ij}^{(m_0)} > 0$$



Ορισμοί για αλυσίδες Markov (2)

- Ένα υποσύνολο καταστάσεων *Α1* λέγεται *κλειστό* αν δεν είναι δυνατή καμία μετάβαση ενός βήματος από οποιαδήποτε κατάσταση του *Α1* σε οποιαδήποτε κατάσταση εκτός του *Α1*.
- Αν το *Α1* αποτελείται από μια μόνο κατάσταση, έστω E_i , τότε αυτή καλείται *απορροφητική* κατάσταση. Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να είναι η E_i απορροφητική, είναι $p_{ii} = 1$.
- Αν μία αλυσίδα περιέχει κλειστά υποσύνολα, η αλυσίδα λέγεται *μειώσιμη.*

Παράδειγμα



ΜΕΙΩΣΙΜΗ ΑΛΥΣΙΔΑ
$p_{33} = 1$
1
2
3
4
5
6
7
8
p_{14}
p_{52}
ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΗ
ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ
ΚΛΕΙΣΤΟ
ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (3)

- $f_j^{(n)} \equiv$ *Prob [Η πρώτη επιστροφή στην* E_j *γίνεται μετά από n βήματα από την αναχώρηση από την* E_j *]*

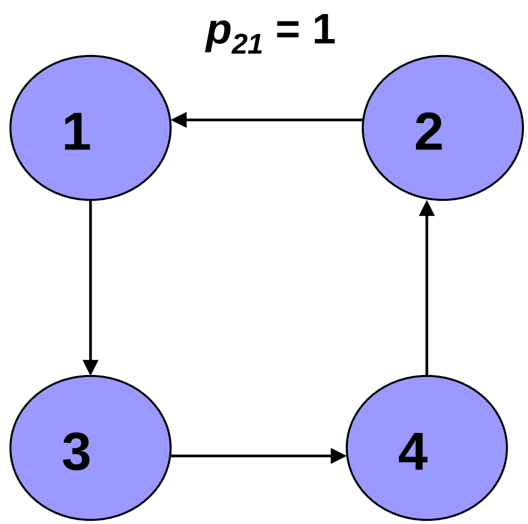
- $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} =$ *Prob[Κάποτε να επιστρέψουμε στην* E_j *]*

- Αν η πιθανότητα να επιστρέψουμε κάποτε στην κατάσταση E_j, f_j, *είναι* $f_j = 1$, η κατάσταση E_j λέγεται *επαναληπτική*.
- Αν $f_j < 1$, λέγεται *μεταβατική*.

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (4)

- Αν τα μόνα δυνατά βήματα κατά τα οποία μπορούμε να επιστρέψουμε στην E_j είναι *γ, 2γ, 3γ, . . ., (γ* ο μεγαλύτερος τέτοιος ακέραιος*)* τότε η E_j λέγεται *περιοδική* με περίοδο *γ*. Αν *γ = 1* τότε η E_j είναι *μη-περιοδική*.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΑΛΥΣΙΔΑ



Ορισμοί για αλυσίδες Markov (5)

- Για τις καταστάσεις με $f_j = 1$, ορίζουμε το Μέσο Χρόνο Επανάληψης της (επιστροφής στην) E_j :

$$M_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}$$

- Αν ο μέσος χρόνος επιστροφής στην E_j , M_j, *είναι* $M_j = \infty$, η E_j λέγεται *μηδενικά επαναληπτική*, ενώ αν *είναι* $M_j < \infty$, η E_j λέγεται *βέβαια επαναληπτική*.

Θεώρημα 1

- *Οι καταστάσεις μιας αμείωτης αλυσίδας Markov είναι είτε* ***όλες*** *μεταβατικές, είτε όλες βέβαια επαναληπτικές ή όλες μηδενικά επαναληπτικές. Αν είναι περιοδικές, τότε όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο γ.*

Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης

- $\pi_j^{(n)} \equiv P\left[X_n = j\right]$: Πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα (η αλυσίδα Markov) στην κατάσταση E_j κατά το n-στο βήμα.
- $\{\pi_j\}$: στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων που περιγράφει την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση E_j κάποια χρονική στιγμή στο απώτερο μέλλον.

  Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης: $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$
- Στην στάσιμη κατανομή, η επίδραση της κατανομής αρχικής κατάστασης $\{\pi_j^{(0)}\}$ έχει εξαφανιστεί
- Το να βρούμε τα $\{\pi_j\}$ είναι το πιο σημαντικό τμήμα της ανάλυσης των αλυσίδων Markov

Θεώρημα 2

Σε μια αμείωτη και μη-περιοδική ομογενή αλυσίδα Markov, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$ υπάρχουν πάντα , και είναι ανεξάρτητες από την κατανομή της αρχικής κατάστασης.

Επίσης ισχύει:

1. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές ή όλες είναι μηδενικά επαναληπτικές, οπότε $\pi_j = 0$ και δεν υπάρχει κατανομή μόνιμης κατάστασης.
2. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι βέβαια επαναληπτικές και τότε $\pi_j > 0$ για όλα τα j, στην οποία περίπτωση το σύνολο $\{\pi_j\}$ είναι μια κατανομή μόνιμης κατάστασης και

$$\pi_j = \frac{1}{M_j}$$

Στην τελευταία περίπτωση οι ποσότητες π_j καθορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τις εξής εξισώσεις:

$$1 = \sum_i \pi_i \qquad \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

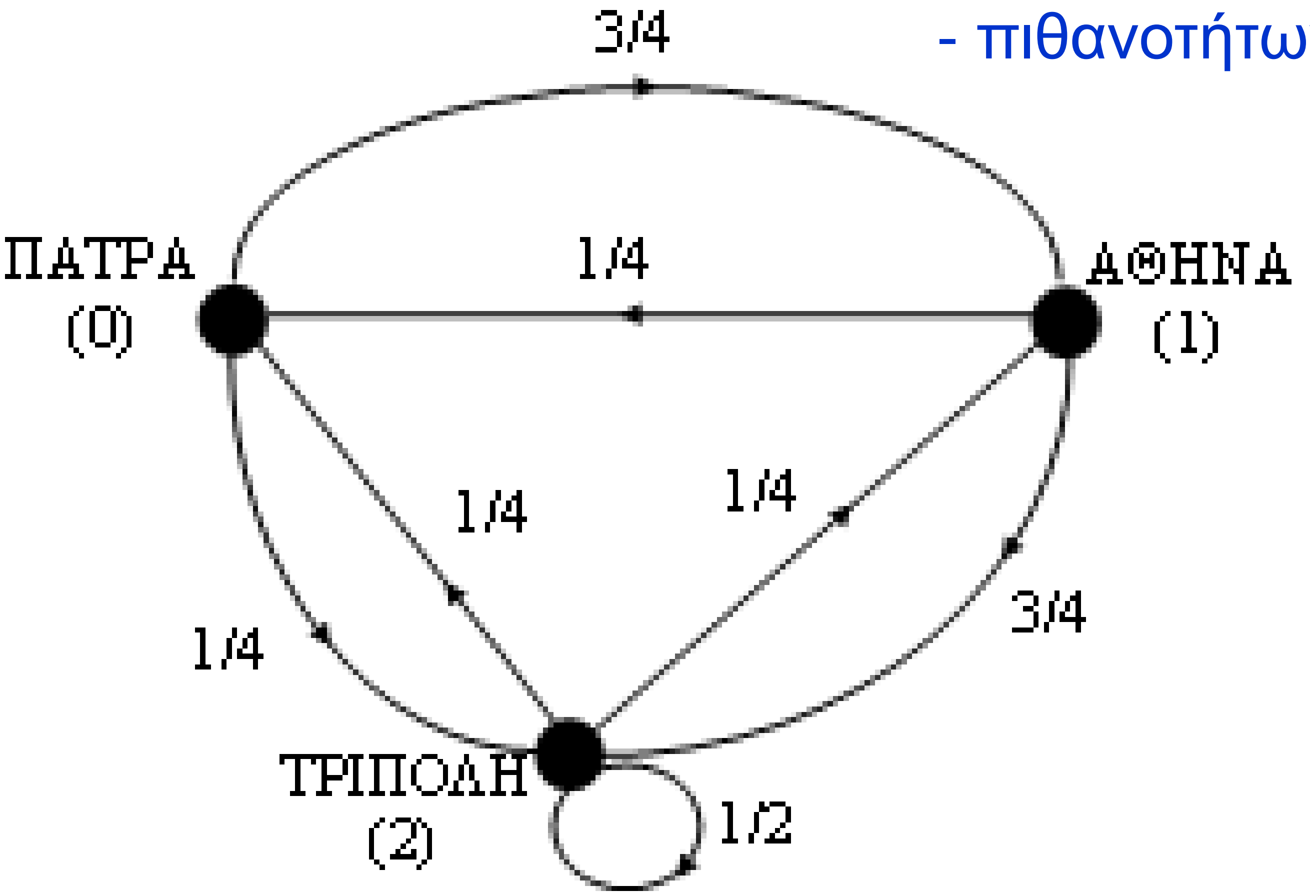
Ορισμοί Markov αλυσίδων (συνέχεια)

- Μια κατάσταση E_j λέγεται **εργοδική**, αν είναι μη-περιοδική και βέβαια επαναληπτική.

  Δηλαδή αν $f_j = 1$, $M_j < \infty$ και $\gamma = 1$.
- Αν όλες οι καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov είναι εργοδικές, τότε η αλυσίδα Markov λέγεται και η ίδια *εργοδική*.

Παράδειγμα

Διάγραμμα καταστάσεων -
- πιθανοτήτων μεταβάσεων



Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

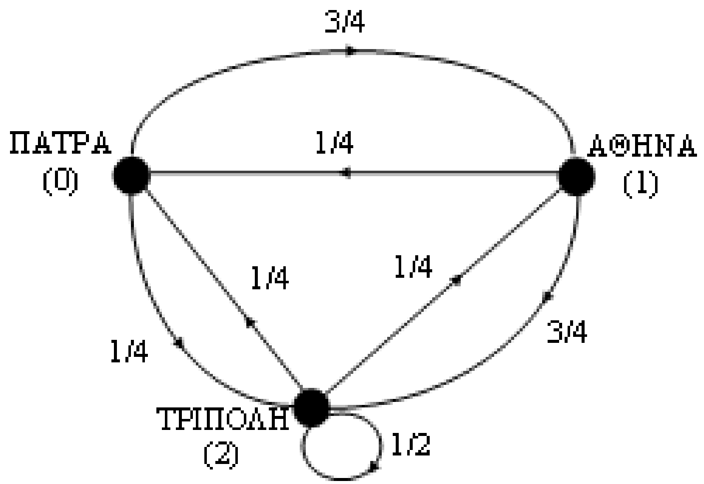
- $\vec{\mathbf{P}} = \left[p_{ij} \right]$ πίνακας μεταβάσεων
- $\vec{\boldsymbol{\pi}} = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots,]$ διάνυσμα πιθανοτήτων
- Από το θεώρημα 2: $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \vec{\boldsymbol{\pi}} \cdot \vec{\mathbf{P}}$
- Στο παράδειγμα

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (2)

- Λύνουμε τις εξισώσεις

$$\pi_0 = 0\cdot\pi_0 + \frac{1}{4}\cdot\pi_1 + \frac{1}{4}\cdot\pi_2$$
$$\pi_1 = \frac{3}{4}\cdot\pi_0 + 0\cdot\pi_1 + \frac{1}{4}\cdot\pi_2$$
$$\pi_2 = \frac{1}{4}\cdot\pi_0 + \frac{3}{4}\cdot\pi_1 + \frac{1}{2}\cdot\pi_2$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

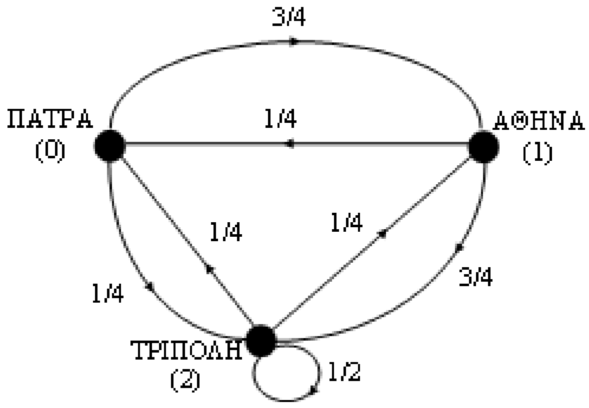


Οι παραπάνω εξισώσεις προέρχονται από τις:

$$\pi_0^{(n+1)} = 0\cdot\pi_0^{(n)} + \frac{1}{4}\cdot\pi_1^{(n)} + \frac{1}{4}\cdot\pi_2^{(n)}$$
$$\pi_1^{(n+1)} = \frac{3}{4}\cdot\pi_0^{(n)} + 0\cdot\pi_1^{(n)} + \frac{1}{4}\cdot\pi_2^{(n)}$$
$$\pi_2^{(n+1)} = \frac{1}{4}\cdot\pi_0^{(n)} + \frac{3}{4}\cdot\pi_1^{(n)} + \frac{1}{2}\cdot\pi_2^{(n)}$$
$$\pi_0^{(n)} + \pi_1^{(n)} + \pi_2^{(n)} = 1$$

για $\boldsymbol{n} \to \infty$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (3)



- Αποτέλεσμα:

  $\pi_0 = 1/5 = 0.20$

  $\pi_1 = 7/25 = 0.28$

  $\pi_2 = 13/25 = 0.52$

Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης

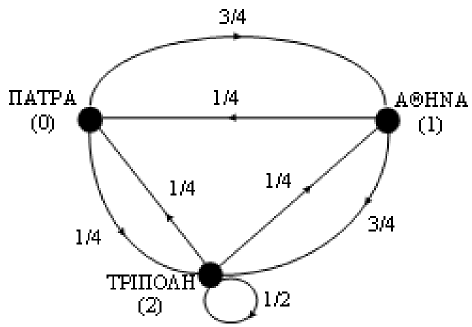
Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (1)

- Υπολογισμός πιθανοτήτων $\pi_j^{(n)}$: η πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση E_j τη χρονική στιγμή n.

- $\vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n)} \equiv \left[\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(\mathrm{n})}, \pi_2^{(\mathrm{n})}, \quad \ldots\right]$ διάνυσμα πιθανοτήτων στο βήμα n
- Ισχύει ότι $\vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n-1)} \cdot \vec{\mathbf{P}}$

$$\vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{\pi}}^{(0)} \cdot (\vec{\mathbf{P}})^n$$

Ανάλυση μεταβατικής συμ-περιφοράς συστήματος (2)



- Στο παράδειγμα των πόλεων, έστω ότι η αρχική κατανομή είναι η $\vec{\pi}^{(0)} = [1,0,0]$, δηλαδή αρχική πόλη είναι η Πάτρα.
- Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η ακολουθία τιμών των πιθανοτήτων σε κάθε βήμα.

n	0	1	2	3	4	. . . .	∞
$\pi_0^{(n)}$	1	0	0.250	0.187	0.203	. . . .	0.20
$\pi_1^{(n)}$	0	0.75	0.062	0.359	0.254	. . . .	0.28
$\pi_2^{(n)}$	0	0.25	0.688	0.454	0.543	. . . .	0.52

- Οι ποσότητες συγκλίνουν πολύ γρήγορα προς τις οριακές τιμές της μόνιμης κατάστασης.

Χρόνος παραμονής σε μια κατάσταση

Prob [Το σύστημα να παραμείνει στην E_i για ακριβώς m επιπλέον βήματα, δεδομένου ότι έχει μόλις εισέλθει στην E_i] = $(1 - p_{ii})\, p_{ii}^{m}$

Γεωμετρική κατανομή

(Ιδιότητα αμνησίας)