Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Εισαγωγή στην ουρά M/G/1

Γιάννης Γαροφαλάκης

Το σύστημα αναμονής M/G/1 I

Θεωρούμε ένα σύστημα στο οποίο οι πελάτες φθάνουν κατά Poisson με ρυθμό λ, αλλά οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι **γενικά κατανεμημένοι**. Συγκεκριμένα, θεωρούμε πως οι πελάτες εξυπηρετούνται με την σειρά που φθάνουν και πως X_i είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης της i-οστής άφιξης. Υποθέτουμε πως οι τυχαίες μεταβλητές $(X_1, X_2, \ldots)$ είναι όμοια κατανεμημένες, ανεξάρτητες μεταξύ τους, και ανεξάρτητες των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων.
Έστω ότι ο *μέσος χρόνος εξυπηρέτησης* (δηλαδή η μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών X_i) είναι:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\mu}$$

Η Pollaczek-Khintchine (P-K) φόρμουλα δίνει το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά συναρτήσει του ρυθμού αφίξεων, του ρυθμού εξυπηρέτησης και της ποσότητας: $\mathbb{E}[X^2]$ (δεύτερη ροπή του χρόνου εξυπηρέτησης):

$$\mathbb{E}[W] = \frac{\lambda \mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)} \tag{1}$$

όπου $\mathbb{E}[W]$ είναι ο μέσος χρόνος που περνά ένας πελάτης περιμένοντας στην ουρά και $\rho = \lambda/\mu = \lambda\mathbb{E}[X]$.
Όταν γνωρίζει κανείς την (P-K), προφανώς μπορεί πολύ εύκολα να πάρει όλες τις βασικές ενδιαφέρουσες μετρικές με χρήση του νόμου του Little.

Το σύστημα αναμονής M/G/1 II

Μέσος Συνολικός Χρόνος Στο Σύστημα:

$$\mathbb{E}[T] = \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\text{μέσος χρόνος εξυπηρέτησης}} + \underbrace{\frac{\lambda \mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)}}_{\text{μέσος χρόνος στην ουρά}} \tag{2}$$

Μέσος Αριθμός Πελατών Στην Ουρά:

$$\mathbb{E}[N_Q] = \lambda \times \mathbb{E}[W] = \frac{\lambda^2 \mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)} \tag{3}$$

Μέσος Αριθμός Πελατών Στο Σύστημα:

$$\mathbb{E}[N] = \underbrace{\rho}_{\text{Μέσος αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση}} + \underbrace{\frac{\lambda^2 \mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)}}_{\mathbb{E}[N_Q]} \tag{4}$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας I

Θεωρούμε τον i-οστό πελάτη που φθάνει στο σύστημα και συμβολίζουμε με W_i τον χρόνο αναμονής του στην ουρά. Έστω N_i ο αριθμός των πελατών που βρίσκει ο i να περιμένουν στην ουρά τη στιγμή της άφιξής του. Όταν $N_i > 0$ προφανώς στο σύστημα εκτός από τους N_i πελάτες που περιμένουν στην ουρά, υπάρχει κι' άλλος ένας που βρίσκεται στον εξυπηρετητή. Έστω R_i ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη αυτού. Οπότε ο χρόνος W_i θα ισούται με:

$$W_i = R_i + \sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j \tag{5}$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η εύρεση της μέσης τιμής του χρόνου αναμονής, οπότε παίρνουμε μέσες τιμές της παραπάνω σχέσης:

$$\mathbb{E}[W_i] = \mathbb{E}[R_i] + \mathbb{E}[\sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j]$$

$$= \mathbb{E}[R_i] + \sum_{j=i-\mathbb{E}[N_i]}^{i-1} \mathbb{E}[X_j|N_i]$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας II

Κάνοντας χρήση της υπόθεσης ανεξαρτησίας των N_i και $X_{i-1}, \ldots, X_{i-N_i}$, καθώς και του γεγονότος ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι όμοια κατανεμημένες, έχουμε:

$$\mathbb{E}[W_i] = \mathbb{E}[R_i] + \sum_{j=i-\mathbb{E}[N_i]}^{i-1} \mathbb{E}[X_j]$$

$$= \mathbb{E}[R_i] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N_i]$$

οπότε θεωρώντας πως το σύστημα είναι εργοδικό και λειτουργεί σε κατάσταση ισορροπίας έχουμε:

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[R] + \frac{1}{\mu}\mathbb{E}[N_Q] \tag{6}$$

όπου ως $\mathbb{E}[R]$ ορίζεται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης που βιώνει ένας τυχαίος πελάτης που φθάνει στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε ισορροπία. Από τον νόμο του Little, έχουμε πως ισχύει:

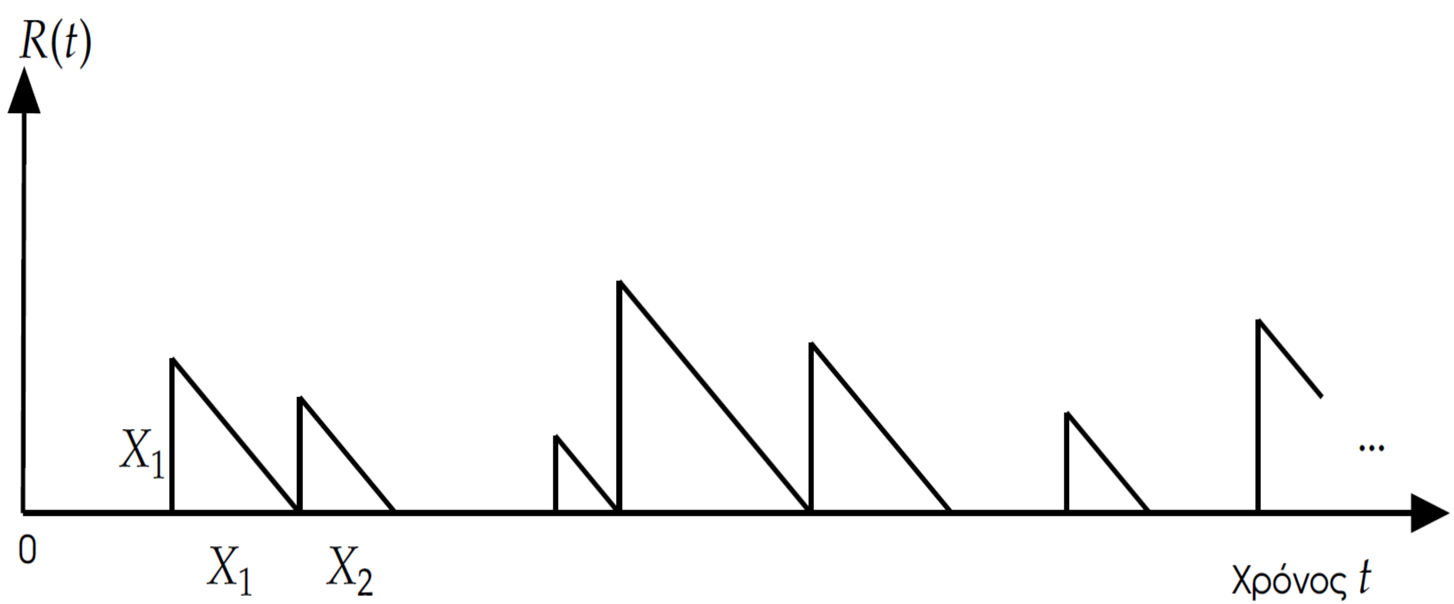
$$\mathbb{E}[N_Q] = \lambda\mathbb{E}[W]$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας III

οπότε αντικαθιστώντας στην (6) παίρνουμε:

$$\mathbb{E}[W] = \frac{\mathbb{E}[R]}{1-\rho} \tag{7}$$

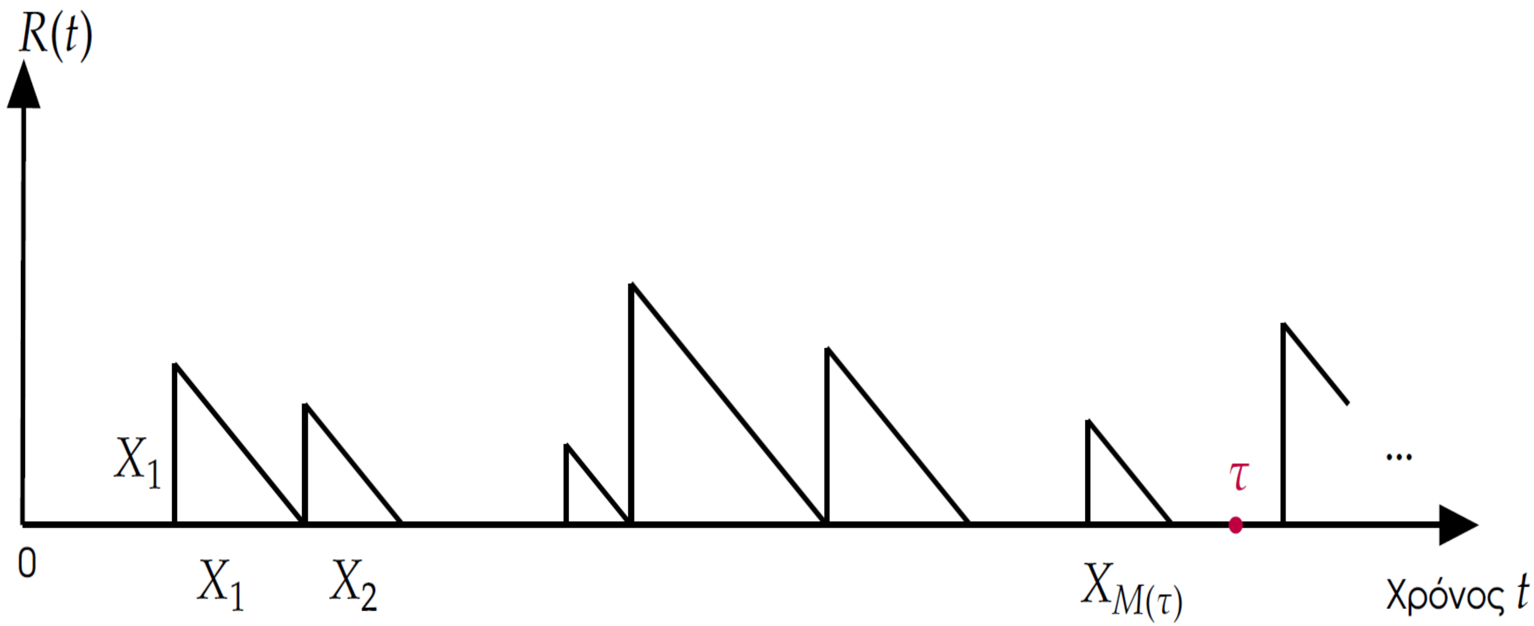
Μένει λοιπόν, να υπολογίσουμε το $\mathbb{E}[R]$. Σχεδιάζουμε τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης, συναρτήσει του t:



Απόδειξη της P-K φόρμουλας IV

Όταν τη στιγμή t_i, ένας νέος πελάτης με χρόνο εξυπηρέτησης X_i εισέλθει στον εξυπηρετητή, η $R(t)$ ξεκινά από το σημείο (t_i, X_i) και μειώνεται γραμμικά για X_i μονάδες χρόνου (δηλαδή, μέχρι το σημείο $(t_i + X_i, 0)$).

Θεωρούμε μία χρονική στιγμή τ για την οποία $R(\tau) = 0$. (Γιατί υπάρχει?)



Απόδειξη της P-K φόρμουλας V

Έστω ότι μέχρι τη στιγμή τ έχουν εξυπηρετηθεί $M(\tau)$ πελάτες. Ο μέσος χρόνος του $R(t)$ στο διάστημα $[0,\tau]$ είναι:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} R(t)dt = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{M(\tau)}\frac{1}{2}X_i^2$$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με το $M(\tau)$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} R(t)dt = \frac{1}{2}\frac{M(\tau)}{\tau}\frac{\sum_{i=1}^{M(\tau)}X_i^2}{M(\tau)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} R(t)dt}_{\text{Μέσος υπολειπόμενος χρόνος } R} = \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{M(\tau)}{\tau}}_{\text{ο ρυθμός αναχωρήσεων}}\cdot\underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{M(\tau)}X_i^2}{M(\tau)}}_{\mathbb{E}[X^2]} \qquad (8)$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας VI

Αλλά στην ισορροπία ο ρυθμός αναχωρήσεων από το σύστημα ισούται με τον ρυθμό αφίξεων στο σύστημα, λ, συνεπώς τελικά παίρνουμε:

$$\mathbb{E}[R] = \frac{1}{2}\lambda\mathbb{E}[X^2]$$

η οποία όταν αντικατασταθεί στην (7) μας δίνει το ζητούμενο:

$$\mathbb{E}[W] = \frac{\lambda\mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)}$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας VII

Παρατηρήσεις

- Η απόδειξη της P-K, παραπάνω, έκανε την παραδοχή πως οι πελάτες εξυπηρετούνται με την σειρά που φθάνουν, δηλαδή το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται μεταξύ της χρονικής στιγμής άφιξης του i-οστού πελάτη και της εξυπηρέτησής του είναι ο αριθμός των πελατών στην ουρά κατά τη στιγμή άφιξης του i. Προκύπτει ωστόσο, πως η P-K ισχύει για οποιαδήποτε σειρά εξυπηρέτησης των πελατών, αρκεί η σειρά εξυπηρέτησης να μην εξαρτάται από τον χρόνο εξυπηρέτησης των πελατών στην ουρά.
- Για την αυστηρή απόδειξη της (P-K) στη βιβλιογραφία συνήθως χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες των renewal στοχαστικών διαδικασιών, ή εναλλακτικά οι embedded αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου με ανάλυση στο πεδίο του μετασχηματισμού Z.

Άσκηση 1

Θεωρήστε το $M/G/1$ σύστημα στο οποίο οι πελάτες περιμένουν για να παραλάβουν δέματα στο ταχυδρομείο. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με ρυθμό 1 πελάτης κάθε 2 λεπτά. Ο κάθε πελάτης έχει να παραλάβει μέχρι k δέματα ($1 \le k \le 4$), και ισχύει

$$\Pr[k=1]=0.5, \quad \Pr[k=2]=0.25 \quad \Pr[k=3]=0.2 \quad \Pr[k=4]=0.05$$

Αν ο υπάλληλος στο ταχυδρομείο χρειάζεται ακριβώς 1 λεπτό για να βρεί το κάθε πακέτο, να βρεθεί με χρήση της P-K formula ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά του ταχυδρομείου.

Άσκηση 2

Κάποιος διατυπώνει το ακόλουθο επιχείρημα για το $M/G/1$ σύστημα: Όταν φθάνει ένας πελάτης, η πιθανότητα να εξυπηρετείται κάποιος άλλος πελάτης είναι $\lambda \mathbb{E}[X]$. Αφού ο πελάτης που εξυπηρετείται έχει μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $\mathbb{E}[X]$, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης είναι:

$$\frac{\mathbb{E}[X]}{2}\lambda \mathbb{E}[X] = \frac{\lambda(\mathbb{E}[X])^2}{2}$$

Πού είναι το λάθος στον παραπάνω συλλογισμό?