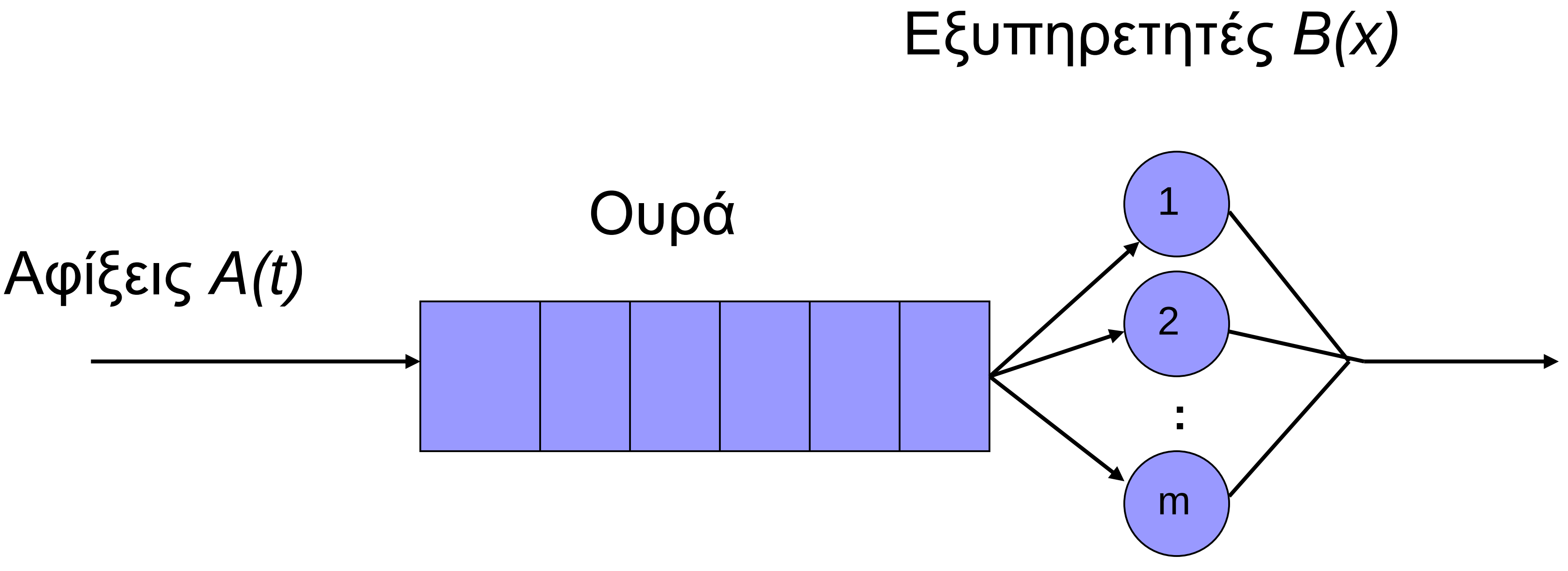
Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Απλά μοντέλα Συστημάτων Αναμονής Διαδικασίες Γεννήσεων - Θανάτων

Γιάννης Γαροφαλάκης

Ένα απλό Σύστημα Αναμονής



- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας* των *χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων* (Χ.Α.)

  A(t) = Prob[χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων $\leq t$]

- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας* του *χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη* (Χ.Ε.)

  B(x) = Prob[χρόνος εξυπηρέτησης $\leq x$]

- Συνήθως υποθέτουμε ότι οι παραπάνω Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΔ) συγκροτούνται από ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες Τυχαίες Μεταβλητές (ΤΜ)

Άλλα μεγέθη περιγραφής του συστήματος

- *Αριθμός εξυπηρετητών* (servers) στο σύστημα *m*.
- *Χωρητικότητα* του συστήματος σε πελάτες *K* (default: $K = \infty$)
- *Πληθυσμός* υποψηφίων πελατών *M* (default: $M = \infty$)
- *Πολιτική εξυπηρέτησης*, δηλαδή ο τρόπος επιλογής πελατών από την ουρά για τον (τους) εξυπηρετητές. (default: FCFS ή FIFO)
- *Κλάσεις* πελατών (default: 1)
- *Ομάδες προτεραιότητας* πελατών (default: 1)
- *Διαθεσιμότητα* εξυπηρετητή (default: 100%)

Συμβολισμός συστημάτων αναμονής

- *A/B/m*
  - A , B: Συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας Χ.Α και Χ.Ε αντίστοιχα. Εκφράζονται ως
    - *M* (για την εκθετική κατανομή).
    - *D* (για τη ντετερμινιστική [σταθερή] κατανομή).
    - *Er* (για την κατανομή Erlang r-βαθμίδων).
    - *G* (για ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)
  - m: αριθμός εξυπηρετητών
- *A/B/m/K/M*
  - *K* : η χωρητικότητα του συστήματος
  - *M* : το μέγεθος του πληθυσμού των πελατών

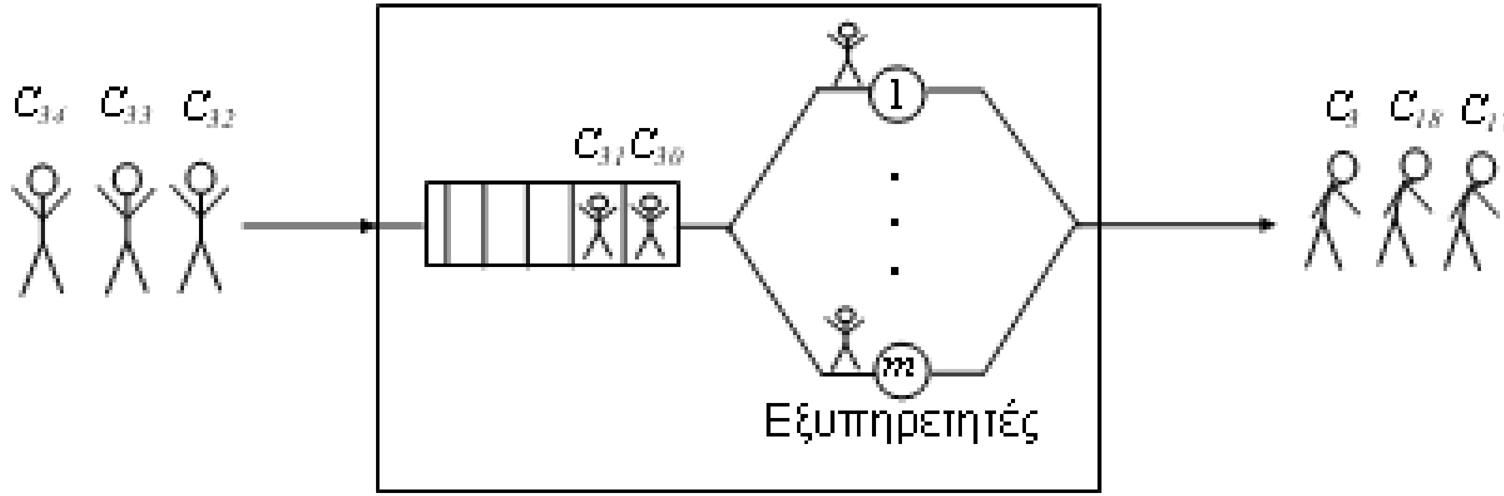
  όταν αυτά είναι διαφορετικά από ∞
- Παράδειγμα: D/M/2//200

Μετρικές απόδοσης

- *Χρόνος απόκρισης – response time* (συνολικός χρόνος στο σύστημα) για ένα πελάτη.
- *Χρόνος αναμονής* για ένα πελάτη.
- *Αριθμός πελατών* στο σύστημα.
- *Χρησιμοποίηση* (Utilization) του συστήματος.

Αναπαράσταση συστήματος αναμονής

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ



- $A(t)$, $B(x)$: αυθαίρετα
- m εξυπηρετητές
- Αριθμούμε τους πελάτες με το δείκτη n και ορίζουμε C_n τον n-οστό πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα

Συμβολισμοί βασικών μεγεθών

- **Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:**

  $\tau_n \equiv$ χρονική στιγμή άφιξης του πελάτη C_n

  $t_n \equiv$ χρόνος μεταξύ των αφίξεων των C_{n-1}, C_n

  $= \tau_n - \tau_{n-1}$ για $n \geq 2$ $\quad (t_1 = \tau_1)$

  Prob$[t_n \leq t] = A(t)$, δηλαδή το $A(t)$ είναι ανεξάρτητο του n

  $\bar{t}$ *μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων*

  Ρυθμός αφίξεων (arrival rate) των πελατών: $\lambda = \frac{1}{\bar{t}}$

- **Χρόνοι εξυπηρέτησης:**

  $x_n \equiv$ χρόνος εξυπηρέτησης του C_n

  Prob$[x_n \leq x] = B(x)$

  $\bar{x}$: *μέσος χρόνος εξυπηρέτησης*

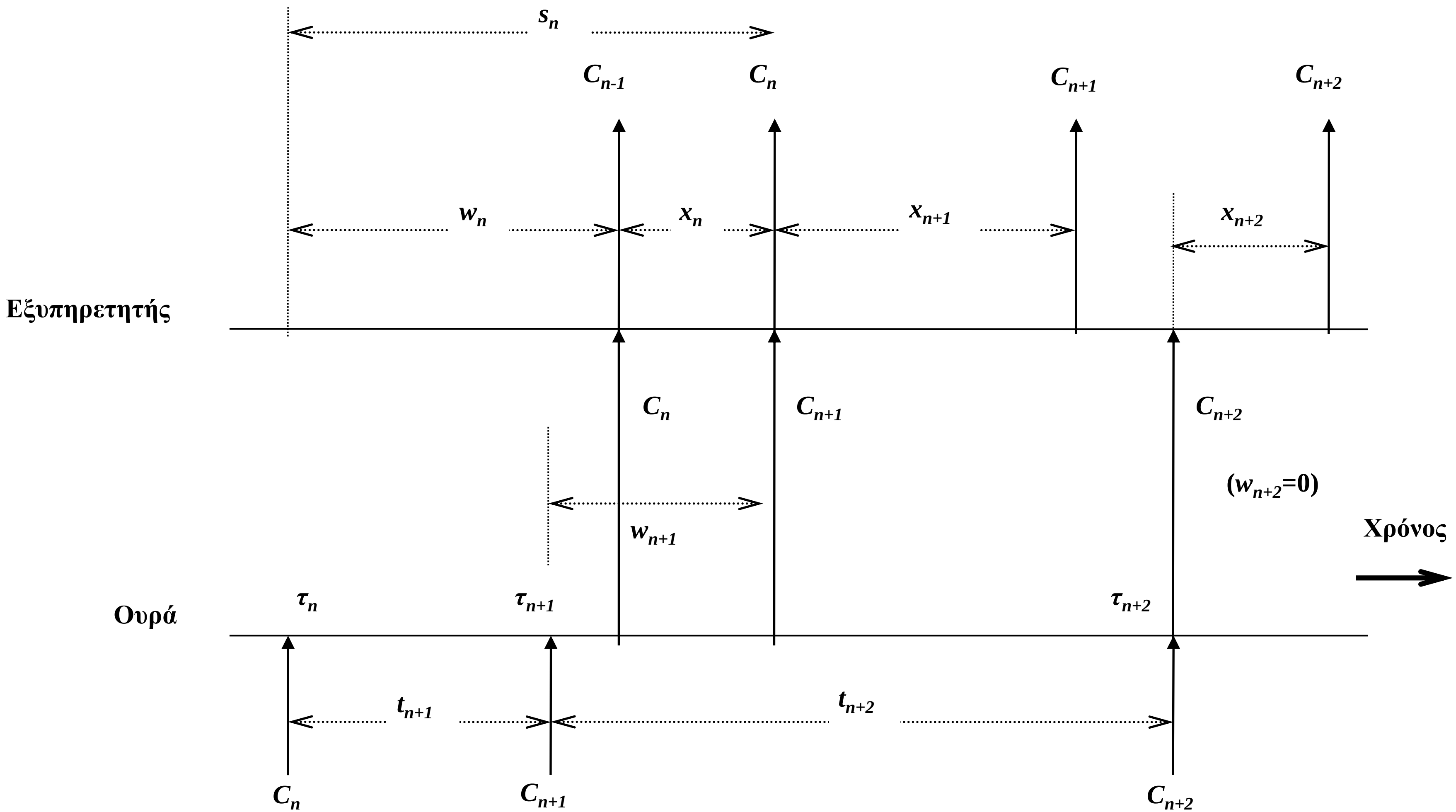
  Ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate) των πελατών : $\mu = \frac{1}{\bar{x}}$

Συμβολισμοί βασικών μεγεθών (2)

- **Χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά:**
  $w_n \equiv$ *χρόνος αναμονής* (στην ουρά) του C_n.
  $W = \overline{w}$ *μέσος χρόνος αναμονής*

- **Συνολικός χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (χρόνος απόκρισης):**
  $s_n \equiv$ χρόνος συστήματος (ουρά + εξυπηρέτηση) του C_n
  $= w_n + x_n$
  $T = W + \overline{x}$ *μέσος χρόνος συστήματος* ($T \equiv \overline{s}$)

Χρονικό Διάγραμμα Συστήματος Αναμονής
(1 εξυπηρετητής – FCFS)



Νόμος του Little

- Ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα αναμονής είναι ίσος με το μέσο ρυθμό αφίξεων πελατών στο σύστημα επί το μέσο χρόνο που ξοδεύει ένας πελάτης σ' αυτό.

$$\bar{N} = \lambda \cdot T$$

- Για όρια του συστήματος μόνο στην ουρά

$$\bar{N}_q = \lambda \cdot W$$

- Για όρια συστήματος μόνο στον(-ους) εξυπηρετητή(-ές)

$$\bar{N}_s = \lambda \cdot \bar{x}$$

Νόμος του Little (2)

- *Διαισθητική αιτιολόγηση*: ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα θα *βρει* μέσα κατά μέσο όρο τον ίδιο αριθμό πελατών $\overline{N}$ που θα *υπάρχει* όταν φύγει. Όμως κατά το διάστημα της παρουσίας του ήρθαν $\lambda \cdot T$ πελάτες κατά μέσο όρο. Η τελευταία ποσότητα είναι οι πελάτες που αφήνει πίσω φεύγοντας.

- Ο Νόμος δίνει μια χρήσιμη σχέση μεταξύ ορισμένων βασικών μεγεθών ενός συστήματος αναμονής, αλλά δεν αποτελεί «λύση» στο γενικό μας πρόβλημα: Ουσιαστικά συνδέει ένα γνωστό μέγεθος εισόδου (λ), με δύο άγνωστα μεγέθη ($\overline{N}$, $\overline{T}$) τα οποία είναι μετρικές απόδοσης που *θέλουμε να βρούμε*.

Χρησιμοποίηση (Utilization)

- Η **Χρησιμοποίηση** (Utilization) ***ρ***, ορίζεται ως ο λόγος του ρυθμού με τον οποίο εισέρχεται «δουλειά» στο σύστημα, προς το **μέγιστο** ρυθμό με τον οποίο το σύστημα μπορεί να εκτελέσει αυτή τη «δουλειά». Δηλαδή για 1 εξυπηρετητή:

ρ = (μέσος ρυθμός αφίξεων πελατών) x (μέσος χρόνος εξυπηρέτησης) / 1

$$\rightarrow \quad \rho = \lambda \cdot \bar{x}$$

- Στην περίπτωση *m* εξυπηρετητών:

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{x}}{m}$$

- *ρ* = {Μέση τιμή του ποσοστού εξυπηρετητών που είναι απασχολημένοι}. Διότι:

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{x}}{m} = \frac{\bar{N}_S}{m} \qquad \textit{(N. Little)}$$

Δηλαδή, για 1 εξυπηρετητή:

$$\rho = \bar{N}_S$$

Σταθερό σύστημα αναμονής

- **Σταθερό** σύστημα αναμονής, είναι αυτό στο οποίο δεν επιτρέπεται να δημιουργούνται ουρές ανεξέλεγκτου (άπειρου) μήκους.
- Σε ένα σταθερό σύστημα ισχύει $0 \leq \rho < 1$

G/G/1

- Έστω τ ένα αυθαίρετα μεγάλο χρονικό διάστημα. Κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος περιμένουμε ο αριθμός των αφίξεων **A** να είναι πολύ κοντά στην τιμή $\lambda \cdot \tau$ Επίσης, έστω p_0 η *πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος* σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι κατά τη διάρκεια του διαστήματος τ, ο εξυπηρετητής είναι απασχολημένος για $\tau - \tau \cdot p_0$ sec και άρα ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται **B** στο χρονικό διάστημα τ, είναι περίπου $\frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\bar{x}}$
- **A** = **B**: $\lambda \cdot \tau \cong \frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\bar{x}}$ οπότε για $\tau \to \infty$, έχουμε: $\lambda \bar{x} = 1 - p_0$
- *Οπότε* $\rho = 1 - p_0$ όπου p_0 η *πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος* σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (1)

Τα απλούστερα συστήματα: *M/M/m/K*

- *Εκθετικά κατανεμημένοι* χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (Χ.Α.)

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}\,, \quad t \geq 0$$

- *Εκθετικά κατανεμημένοι* χρόνοι εξυπηρέτησης (Χ.Ε.)

$$B(x) = 1 - e^{-\mu x}\,, \quad x \geq 0$$

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (2)

- *Ιδιότητα της αμνησίας:* «ο χρόνος ως το επόμενο γεγονός, είναι ανεξάρτητος από το χρόνο που έχει περάσει από το τελευταίο γεγονός».
- ΑΦΙΞΕΙΣ:

  Αν έχει περάσει χρόνος t_0 από την τελευταία άφιξη (του C_{n-1})

  $$Prob[\, t_n \le t + t_0 \mid t_n > t_0 \,] = Prob[\, t_n \le t \,]$$

- ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΙΣ:

  Αν έχει περάσει χρόνος x_0 εξυπηρέτησης του πελάτη C_n

  $$Prob[\, x_n \le x + x_0 \mid x_n > x_0 \,] = Prob[\, x_n \le x \,]$$

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (3)

- $P_k(t)$ = *Prob*[*k* πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή t]

  για $0 \le k \le K, \quad t \ge 0$

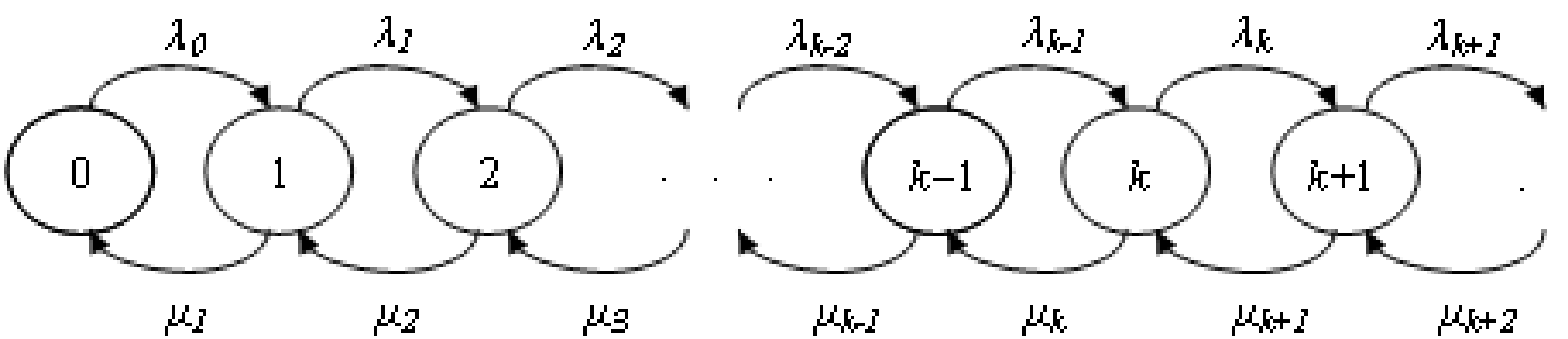
- $p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$ = *Prob*[*k* πελάτες στο σύστημα κάποια χρονική στιγμή *στο μέλλον*]
- *Κατανομή μόνιμης κατάστασης*.
- Υπάρχει, αν το σύστημα είναι σταθερό ($0 \le \rho < 1$)

Νόμος ισορροπίας της ροής πιθανότητας

Στη μόνιμη κατάσταση, ο «ρυθμός ροής πιθανότητας» μιας αλυσίδας Markov *από* κάθε κατάσταση, είναι ίσος με το «ρυθμό ροής πιθανότητας» *προς* την κατάσταση.

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (1)

- Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *j*, τότε στην επόμενη αλλαγή κατάστασης θα βρεθεί σε μια από τις καταστάσεις *j*–1 ή *j*+1.
- λ_k : ρυθμός αφίξεων όταν υπάρχουν *k* πελάτες στο σύστημα
- μ_k : ρυθμός εξυπηρέτησης όταν υπάρχουν *k* πελάτες στο σύστημα



Διάγραμμα καταστάσεων-ρυθμών μεταβάσεων

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (2)

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας ***από*** την κατάσταση *k*} =

$$p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k)$$

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας ***προς*** την κατάσταση *k*} =

$$p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$$

- Με βάση το νόμο ισορροπίας ροής
  - Για $k \geq 1$ $\quad p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k) = p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$ **(1)**
  - Για $k = 0$ $\quad p_0 \cdot \lambda_0 = p_1 \cdot \mu_1$ **(2)**

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (3)

- Ισχύει πάντα ότι $$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \qquad \textbf{(3)}$$

- Λύνοντας τις εξισώσεις (1), (2), (3), παίρνουμε:

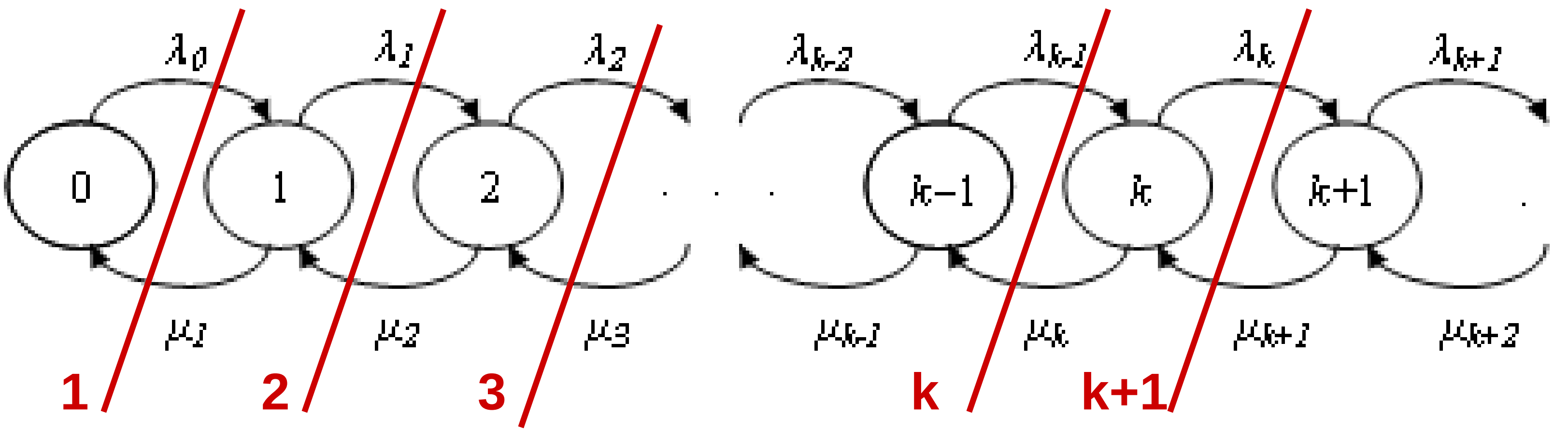
$$p_k = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \qquad p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \qquad \textbf{(4)}$$

- Η παραπάνω λύση υπάρχει (δηλαδή, υπάρχει μόνιμη κατάσταση), αν ***p_0* > 0**, δηλαδή αν ο παρονομαστής της σχέσης (4) είναι μικρότερος από ∞ . Για να ισχύει το τελευταίο, θα πρέπει η ακολουθία λ_k / μ_k να συγκλίνει, δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει κάποιο k_0 τέτοιο ώστε: $\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1$ για όλα τα $k \geq k_0$

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (4)

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ

Ο Νόμος διατήρησης της ροής εφαρμόζεται και σε κάθε «σύνορο» της αλυσίδας Markov:



1: $p_0 \cdot \lambda_0 = p_1 \cdot \mu_1$

2: $p_1 \cdot \lambda_1 = p_2 \cdot \mu_2$

:

k: $p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} = p_k \cdot \mu_k$

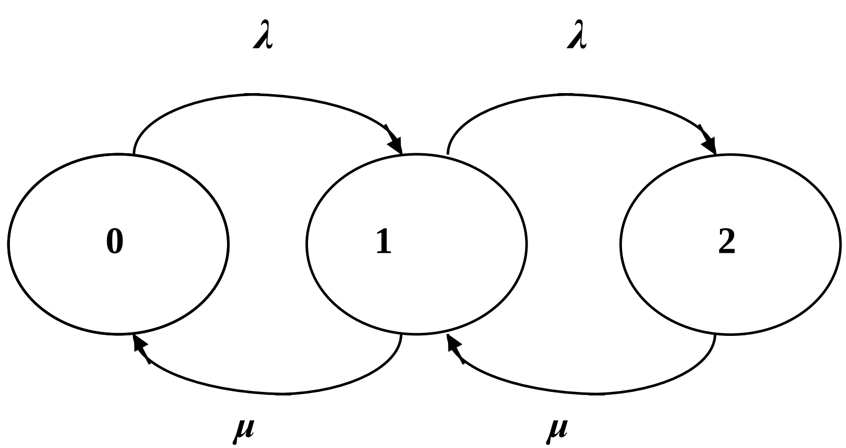
Ίδια Αποτελέσματα

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (5)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μας δίνεται μια αλυσίδα Markov γεννήσεων – θανάτων, η οποία έχει μόνο τρεις καταστάσεις {0, 1, 2}, ενώ ισχύει:

$\lambda_k = \lambda$ για $k = 0,1$ και $\mu_k = \mu$ για $k = 1,2$



Διάγραμμα Καταστάσεων – Ρυθμών Μεταβάσεων

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (6)

- Για την κατάσταση 0: $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 1: $p_1 \cdot (\lambda + \mu) = p_0 \cdot \lambda + p_2 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 2: $p_2 \cdot \mu = p_1 \cdot \lambda$

Από τις παραπάνω 3 σχέσεις, μόνο οι 2 είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιούμε την $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ με 2 από τις παραπάνω, και παίρνουμε την τελική λύση:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2} \qquad p_1 = \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2} \qquad p_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

- Η αλυσίδα αυτή αντιστοιχεί στο σύστημα ***M/M/1/2***. Γιατί;
- Στο σύστημα αυτό επιτρέπεται ***λ/μ* ≥ 1**. Γιατί;

Διαδικασίες Poisson

- Ειδική περίπτωση Γεννήσεων-Θανάτων (μόνο αφίξεις)
  - $\mu_\kappa = 0$ για όλα τα k
  - $\lambda_\kappa = \lambda$ για όλα τα k
- Δεν είναι εργοδικό σύστημα. Όλες οι καταστάσεις *μεταβατικές*.
- Έστω το σύστημα ξεκινά τη στιγμή $t = 0$, άδειο. Δηλαδή:

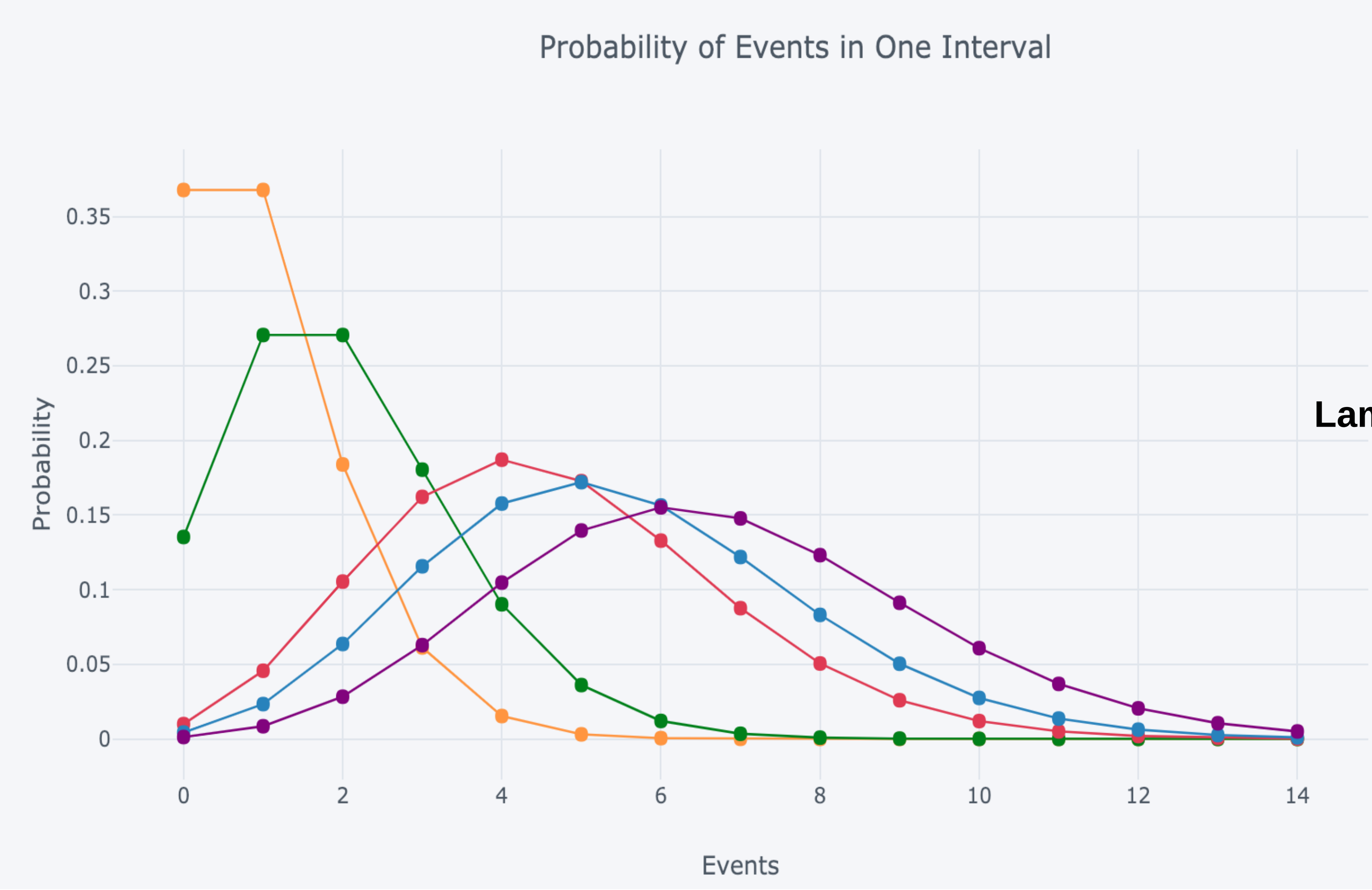
$$\mathrm{P}_\kappa(0) = \begin{cases} 1, & \kappa = 0 \\ 0, & \kappa \neq 0 \end{cases}$$

- Τη χρονική στιγμή t: $\boxed{\mathrm{P}_\kappa(t) = \frac{(\lambda t)^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda t}}$ για $k \geq 0$, $t \geq 0$

  Κατανομή Poisson

- *Μέση Τιμή* και *Διακύμανση* (αριθμού αφίξεων στο [0, t]), ίσα με $\boldsymbol{\lambda t}$. (αναμενόμενο).
- **Δηλαδή, στο M/M/1, η διαδικασία μόνο των αφίξεων, είναι Poisson**

Η κατανομή Poisson



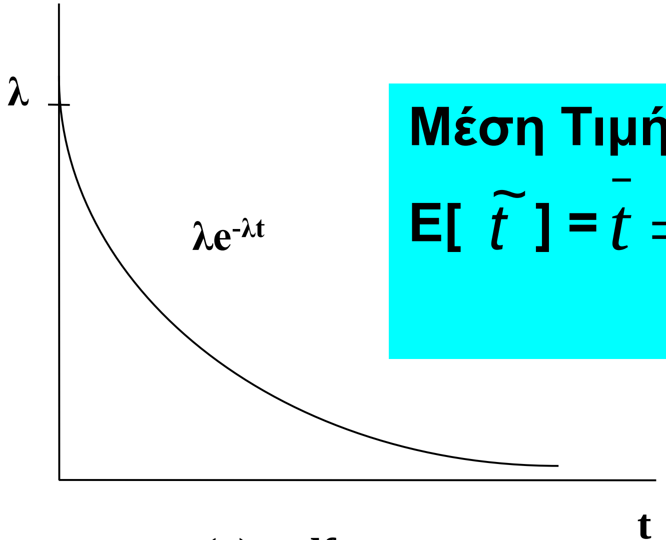
Lambda = $\lambda \cdot t$

Poisson αφίξεις → Εκθετικοί χρόνοι μεταξύ αφίξεων

- $\tilde{t}$ = ΤΜ για το χρόνο μεταξύ αφίξεων, με PDF $A(t)$ και pdf $\alpha(t)$

$$\boldsymbol{A(t)} = 1 - P[\,\tilde{t} > t\,] = 1 - \underbrace{P_0(t)}_{\text{Poisson}} = \mathbf{1 - e^{-\lambda t}} \quad , t \geq 0 \quad \text{(PDF Εκθετικής)}$$

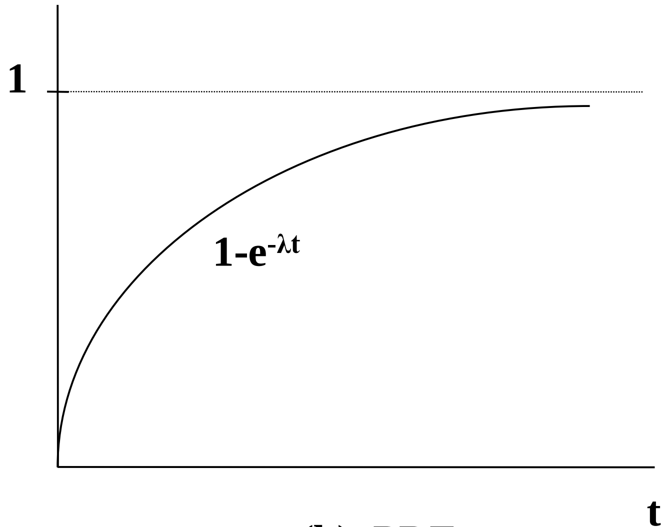
Παράγωγος ως προς t: $\boldsymbol{\alpha(t) = \lambda e^{-\lambda t}} \quad , t \geq 0$ (pdf Εκθετικής)



(a) pdf

Μέση Τιμή:

$$E[\,\tilde{t}\,] = \bar{t} = \frac{1}{\lambda}$$



(b) PDF

Η εκθετική κατανομή

Ιδιότητα Αμνησίας της Εκθετικής Κατανομής

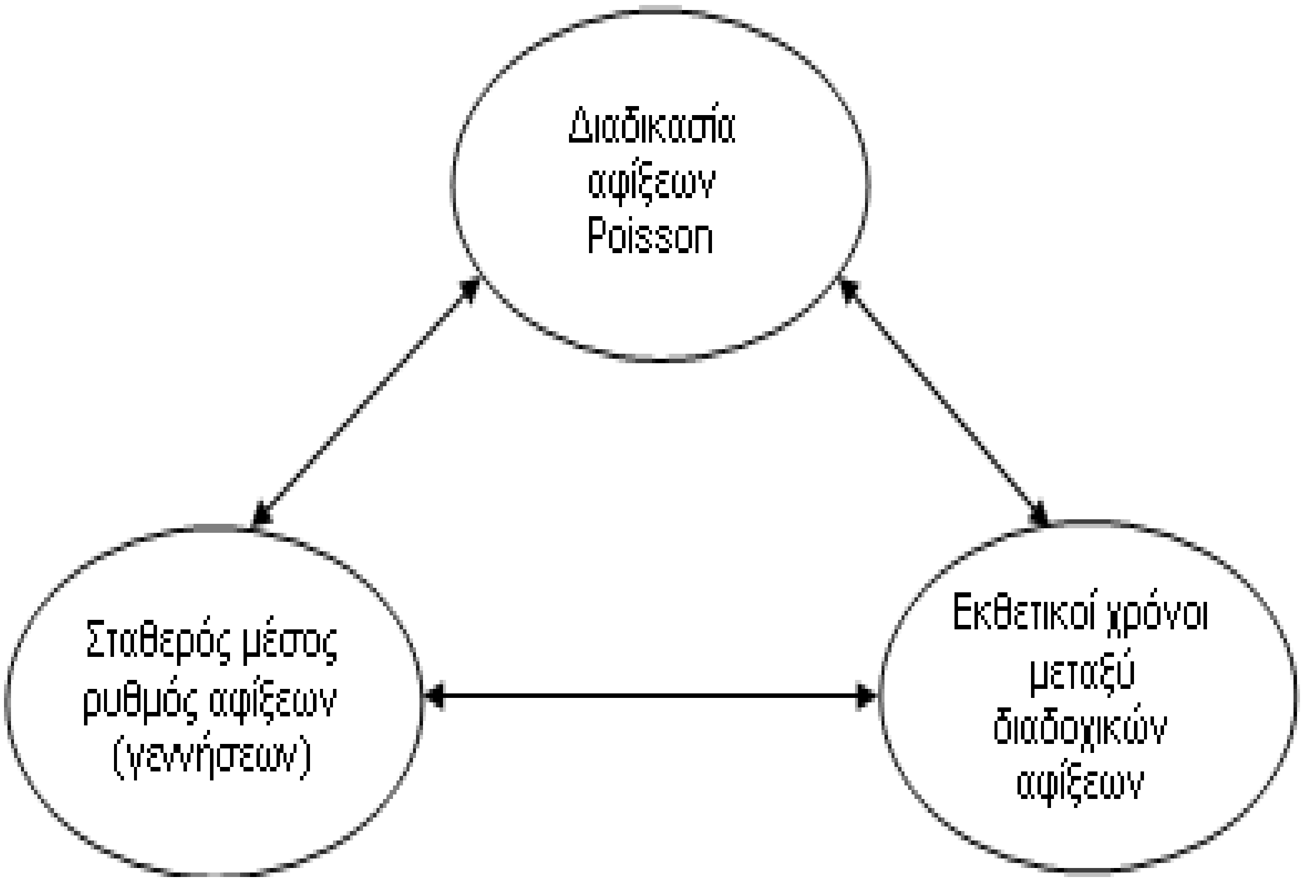
Έστω ότι γίνεται μια άφιξη τη χρονική στιγμή **0**. Τώρα, έστω ότι πέρασαν $\boldsymbol{t_0}$ δευτερόλεπτα κατά τη διάρκεια των οποίων δεν έγινε άφιξη. Αν αυτή τη στιγμή $\boldsymbol{t_0}$ ρωτήσουμε *«ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη άφιξη να γίνει μετά από **t** δευτερόλεπτα από τώρα»,* η απάντηση θα είναι:

$$\mathrm{P}\left[\tilde{t} \le t + t_0 \;\middle|\; \tilde{t} > t_0\right] = \frac{\mathrm{P}\left[t_0 < \tilde{t} \le t + t_0\right]}{\mathrm{P}\left[\tilde{t} > t_0\right]} = \frac{\mathrm{P}\left[\tilde{t} \le t + t_0\right] - \mathrm{P}\left[\tilde{t} \le t_0\right]}{\mathrm{P}\left[\tilde{t} > t_0\right]}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{P}\left[\tilde{t} \le t + t_0 \;\middle|\; \tilde{t} > t_0\right] = \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_0)} - \left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}\left[\tilde{t} \le t + t_0 \;\middle|\; \tilde{t} > t_0\right] = 1 - e^{-\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{P}\left[\tilde{t} \le t + t_0 \;\middle|\; \tilde{t} > t_0\right] = \mathrm{P}\left[\tilde{t} \le t\right]}$$

Σχέσεις



Διαδικασία αφίξεων Poisson
Σταθερός μέσος ρυθμός αφίξεων (γεννήσεων)
Εκθετικοί χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων

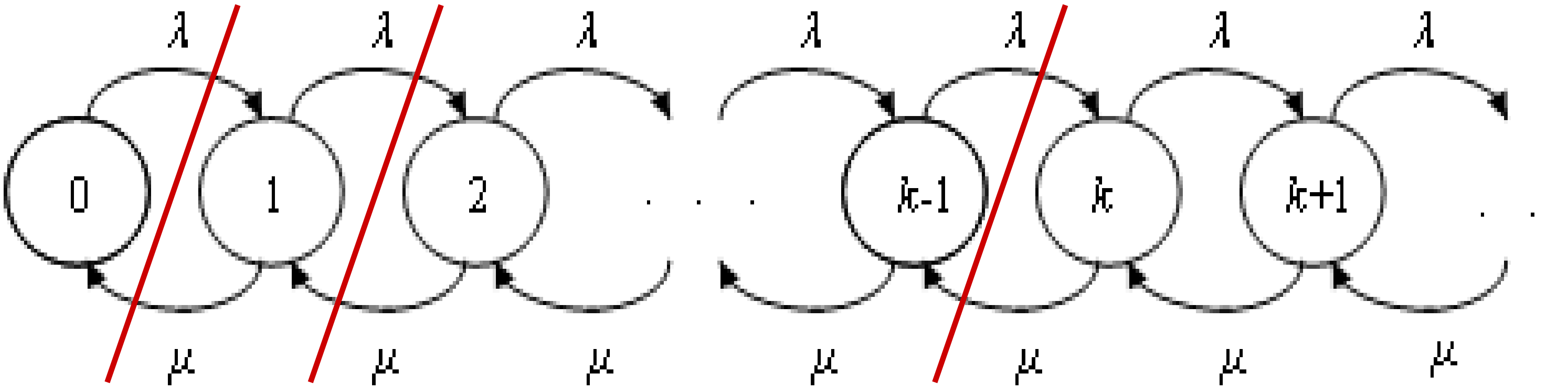
Το κλασικό Σύστημα Αναμονής *M/M/1*

- *Εκθετική* κατανομή της διαδικασίας των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων
- *Εκθετική* κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης
- Ένας εξυπηρετητής
- Άπειρο μήκος ουράς
- Αλυσίδα Markov Γεννήσεων – Θανάτων
- Με τη συνηθισμένη παραδοχή ότι οι *ρυθμοί* αφίξεων και εξυπηρέτησης δεν εξαρτώνται από την κατάσταση του συστήματος (αριθμός παρόντων πελατών), ισχύει:

$$\boxed{\lambda_k = \lambda} \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{\mu_k = \mu} \quad \text{για} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Το Σύστημα Αναμονής *M/M/1 (συνέχεια)*



Διάγραμμα καταστάσεων - ρυθμών μεταβάσεων για το σύστημα *M/M/1*.

Για τη λύση:

$p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$

$p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu$

:

$p_{k-1} \cdot \lambda = p_k \cdot \mu$

:

και $$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

Λύση συστήματος *M/M/1*

- Χρησιμοποίηση (G/G/1): $\rho = \lambda \cdot \bar{x} = \dfrac{\lambda}{\mu}$

- Συνθήκη σταθερότητας: $0 < \rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$

- Από τη γενική λύση των διαδικασιών Γ-Θ (ή την προσέγγιση της προηγούμενης διαφάνειας):

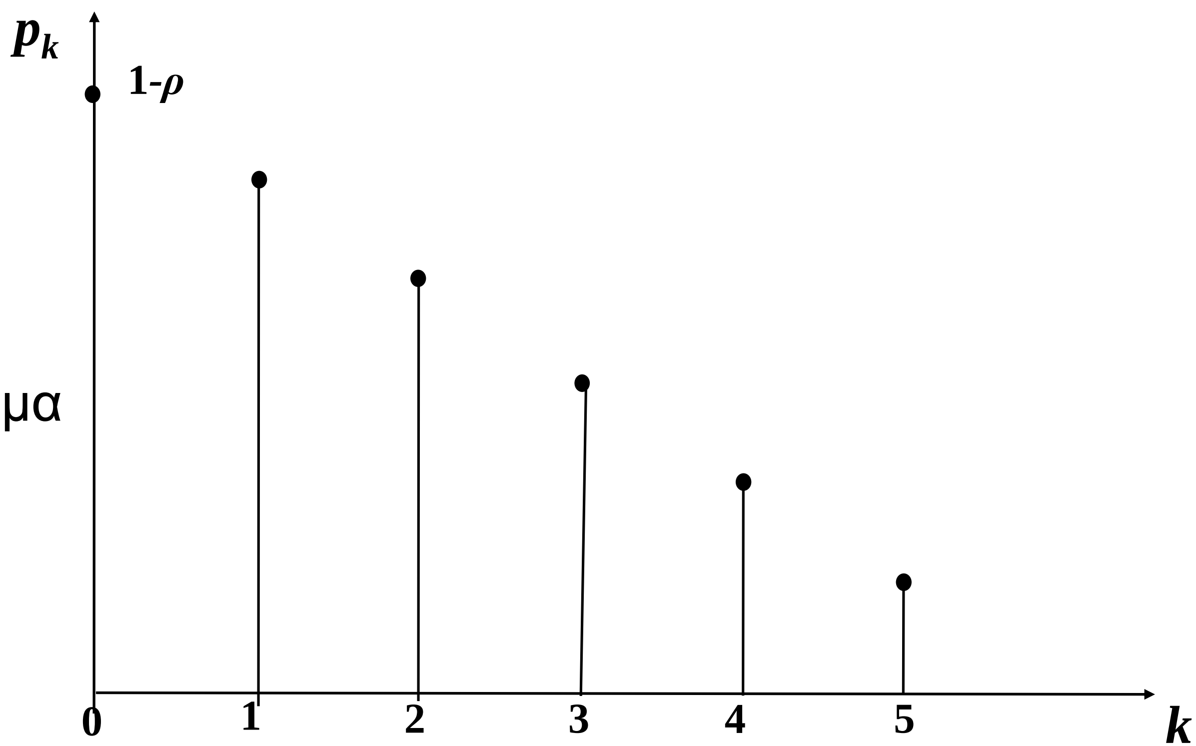
$$p_k = (1-\rho) \cdot \rho^k$$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Περιέχεται το: $p_0 = 1 - \rho$

Λύση συστήματος *M/M/1* (συν)

- Τα $\boldsymbol{p_k}$ ακολουθούν τη *Γεωμετρική Κατανομή*
- Εξαρτώνται από τα *λ* και *μ*, μόνο μέσω του λόγου τους $\boldsymbol{\rho}$

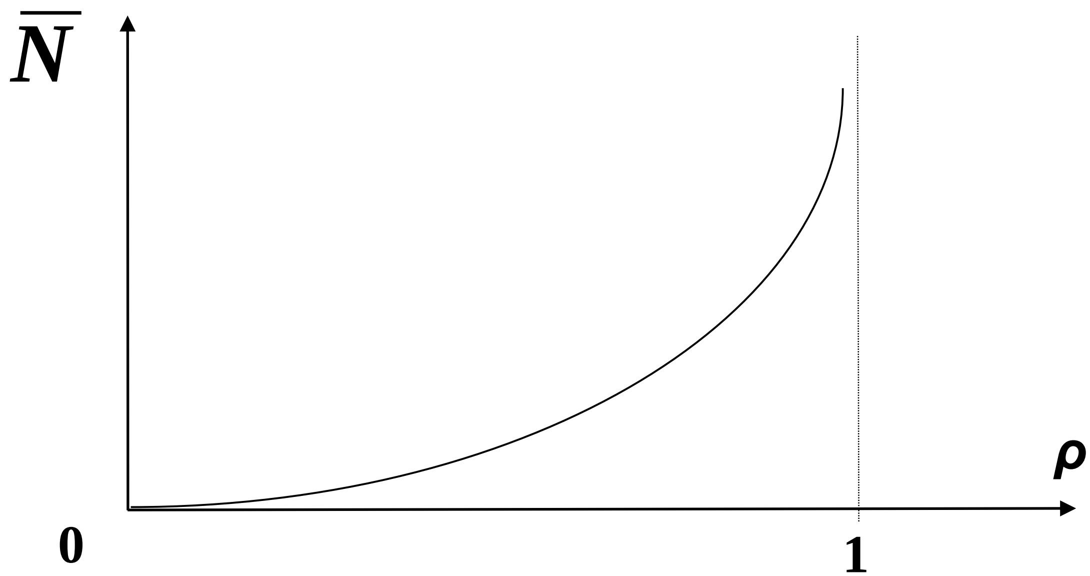
Τα p_k στο σύστημα *M/M/1*.



Μετρικές απόδοσης στο *M/M/1*

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

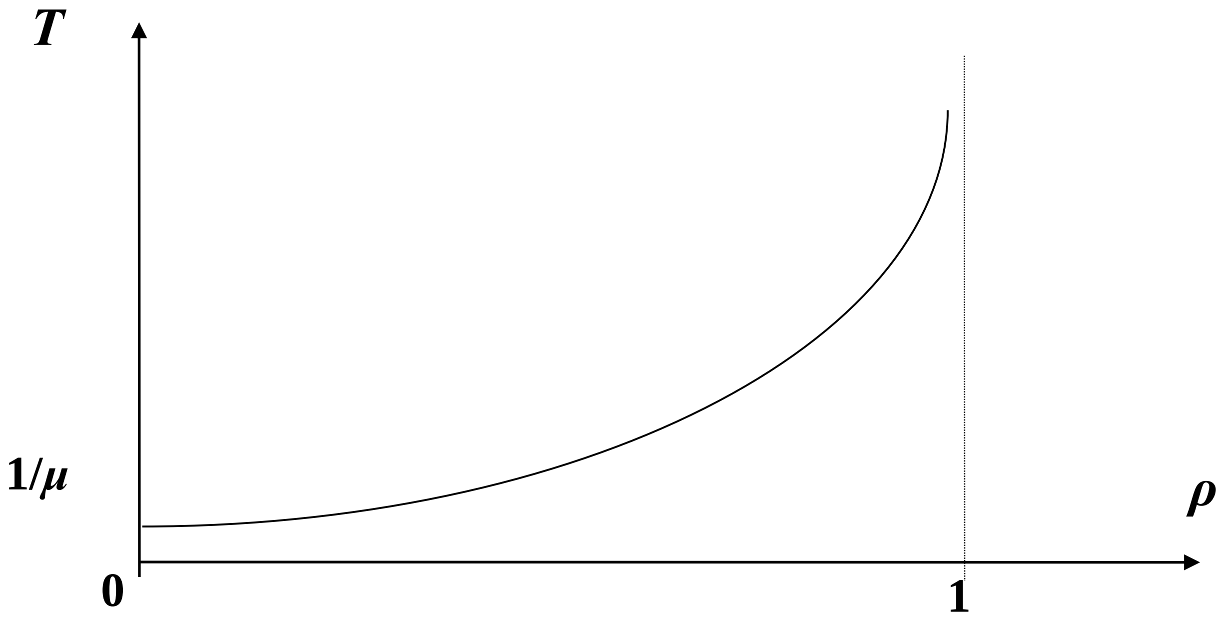


Μετρικές απόδοσης στο *M/M/1 (συν.)*

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (*Response Time*)

  Με χρήση του *Νόμου του Little*:

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$



Μετρικές απόδοσης στο *M/M/1 (συν.)*

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \bar{x} = T - 1/\mu = \frac{\rho}{\mu \cdot (1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\overline{N}_q = \overline{N} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

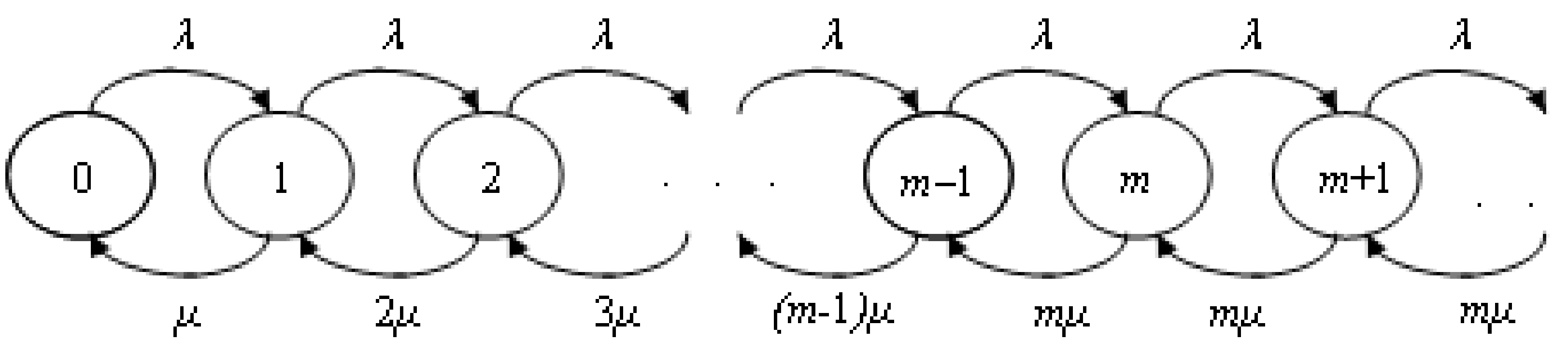
- Πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον *n* πελάτες στο σύστημα

$P_{(n)}$ = *Prob*[*n* ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα]

$$P_{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = (1-\rho)\sum_{k=n}^{\infty}\rho^k = (1-\rho)\rho^n\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k = (1-\rho)\rho^n\frac{1}{1-\rho} = \rho^n$$

Το σύστημα αναμονής *M/M/m*

- ***m*** ίδιοι εξυπηρετητές
- Ο καθένας με ρυθμό εξυπηρέτησης ***μ***
- Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, ίδια με του *M/M/1*
- $\lambda_k = \lambda$ για $k = 0, 1, 2, \dots$
- $$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{για} \quad 1 \le k \le m \\ m\mu & \text{για} \quad m \le k \end{cases}$$



Το σύστημα αναμονής *M/M/m* (συν)

- Χρησιμοποίηση

$$\rho = \frac{\lambda \bar{x}}{m} = \frac{\lambda}{m\mu}$$

Συνθήκη Σταθερότητας

$$0 < \rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

- Λύση μόνιμης κατάστασης

$$p_k = \begin{cases} p_0 \dfrac{(m\rho)^k}{k!} & \text{για} \quad 1 \le k \le m \\ p_0 \dfrac{\rho^k m^m}{m!} & \text{για} \quad k \ge m \end{cases}$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \left(\frac{(m\rho)^m}{m!} \right) \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

Μετρικές απόδοσης στο *M/M/m*

- Πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά ένας πελάτης:

  Π = *Prob*[*m* ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα]

$$\Pi = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = \sum_{k=m}^{\infty} p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!} = p_0 \frac{m^m}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \rho^k = p_0 \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1}{1-\rho} = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = m\rho + \frac{\rho \Pi}{1-\rho}$$

Μετρικές απόδοσης στο *M/M/m* (συν)

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (response time)

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\Pi}{m(1-\rho)}\right)$$

(N. Little)

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \bar{x} = T - 1/\mu = \frac{\Pi}{m\mu(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \bar{N} - m\rho = \frac{\rho\Pi}{1-\rho}$$

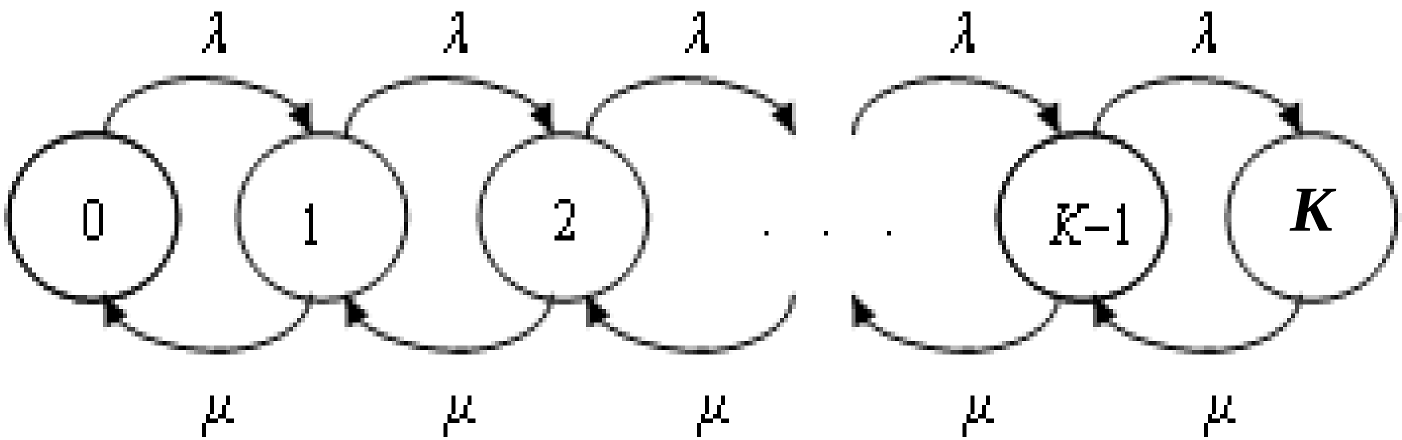
Το σύστημα αναμονής *M/M/1/K*

- Ίδια χαρακτηριστικά με το *M/M/1*, αλλά περιορισμένη χωρητικότητα σε πελάτες.
- Στο σύστημα μπορούν να βρίσκονται το πολύ ***K*** πελάτες (στην ουρά και στον εξυπηρετητή).
- Πελάτες που φθάνουν και βρίσκουν γεμάτο το σύστημα, χάνονται.
- Οι ρυθμοί αφίξεων και εξυπηρέτησης του *M/M/1/K*:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{για} \quad 0 \le k < K \\ 0 & \text{για} \quad k \ge K \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} \mu & \text{για} \quad 1 \le k \le K \\ 0 & \text{για} \quad k > K \end{cases}$$

Το σύστημα αναμονής *M/M/1/K* (συν)



- Λύση συστήματος

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k & \text{για} \quad 0 \le k \le K \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το σύστημα αναμονής *M/M/1/K* (συν)

ΜΕΤΡΙΚΕΣ

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{K} k p_k = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} - \frac{(K+1)(\lambda/\mu)^{K+1}}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\overline{N}_q = \sum_{k=2}^{K} (k-1) p_k = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} - (\lambda/\mu) \cdot \frac{1+K(\lambda/\mu)^K}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}$$

Το σύστημα αναμονής *M/M/1/K* (συν)

- **Παράδειγμα**: Το μοντέλο μιας τηλεφωνικής συσκευής χωρίς κράτηση κλήσεων (παλιό αναλογικό σύστημα):

M/M/1/1

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\lambda/\mu} & \text{για} \quad k=0 \\ \dfrac{\lambda/\mu}{1+\lambda/\mu} & \text{για} \quad k=1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

p_0 : Πιθανότητα να μιλήσει, κάποιος που καλεί

p_1 : Πιθανότητα να βρει κατειλημμένη τη συσκευή, κάποιος που καλεί

λ :   Μέσος ρυθμός με τον οποίο γίνονται κλήσεις στη συσκευή

$\bar{x} = 1/\mu$: Μέση χρονική διάρκεια μιας συνομιλίας