

Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Διαδικασία Bernoulli

Γιάννης Γαροφαλάκης

Διαδικασία Bernoulli

Μία διαδικασία Bernoulli είναι μία πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, X_3, \dots , τέτοια ώστε

- Για κάθε i η X_i παίρνει την τιμή 0 ή 1.
- Για κάθε i η πιθανότητα το X_i να είναι 1 είναι πάντα ίση με p .

Κατά συνέπεια, η διαδικασία Bernoulli είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ομοιόμορφα κατανεμημένων **δοκιμών Bernoulli**.

Example

- Μία σειρά ρίψεων ενός νομίσματος
- Αφίξεις πακέτων σε έναν router

Βασικές Ιδιότητες Διαδικασιών Bernoulli

- **Ανεξαρτησία**
- **Έλλειψη μνήμης / Ιδιότητα της Επανεκκίνησης**

Κατανομή Bernoulli

- pmf: $p_X(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 1 - p & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

- CDF: $F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

$$E[X] = \sum_i x_i p_X(x_i)$$

- $E[X] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = \mathbf{p}$

$$\text{Var}(X) = \sum_i (x_i - E[X])^2 p_X(x_i)$$

- $\text{Var}(X) = (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p = \mathbf{p \cdot (1 - p)}$

Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (1)

- Η τ.μ. N που μετρά το πλήθος των αφίξεων (επιτυχιών) K , κατά τη διάρκεια n slots (δοκιμών):

$$\begin{aligned} \Pr\{k \text{ αφίξεις κατά τη διάρκεια } n \text{ slots}\} &= p_N(k) = \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \quad \mathbf{Binomial B}(n, p) \end{aligned}$$

$$E[N] = n \cdot p$$

$$Var(N) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (2)

- Η τ.μ. T που μετρά το χρόνο μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:

$$\begin{aligned} \Pr\{t \text{ slots μέχρι την επόμενη άφιξη}\} &= p_T(t) = \\ &= (\mathbf{1} - \mathbf{p})^{t-1} \cdot \mathbf{p} \quad \mathbf{\text{Γεωμετρική NB}(\mathbf{1}, \mathbf{p})} \end{aligned}$$

$$E[T] = \mathbf{1}/\mathbf{p}$$

$$Var(T) = (\mathbf{1} - \mathbf{p})/\mathbf{p}^2$$

Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (3)

- Η τ.μ. Y_k που μετρά το χρόνο μέχρι την k -οστή άφιξη:

$$\begin{aligned} \Pr\{\text{Η } k\text{-οστή άφιξη γίνεται στο } t \text{ slot}\} &= p_{Y_k}(t) = \\ &= \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k} \quad \text{Negative Binomial} \end{aligned}$$

$$E[Y_k] = k/p$$

$$\text{Var}(Y_k) = k(1-p)/p^2$$

Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (4)

- Η τ.μ. B που μετρά τον αριθμό των διαδοχικών slots στα οποία είχαμε αφίξεις (busy slots):

$$\begin{aligned} \Pr\{k \text{ διαδοχικά busy slots}\} &= p_B(k) = \\ &= p^k(1 - p) \quad \text{Γεωμετρική} \end{aligned}$$

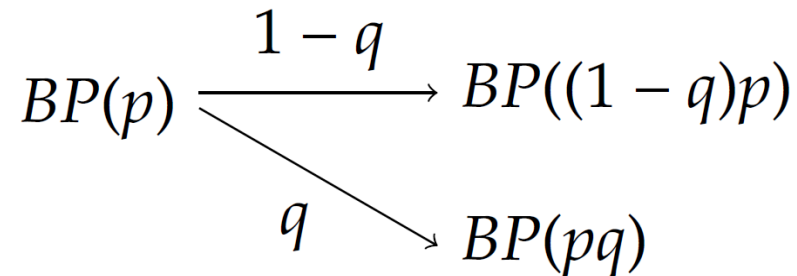
$$E[B] = 1/(1 - p)$$

$$Var(B) = p/(1 - p)^2$$

Διαχωρισμός και Συγχώνευση Διαδικασιών Bernoulli

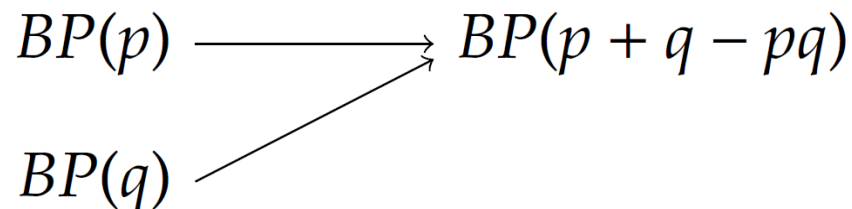
Διαχωρισμός

Οι διαδικασίες που προκύπτουν από το διαχωρισμό μίας διαδικασίας Bernoulli είναι επίσης Bernoulli.



Συνένωση

Η διαδικασία που προκύπτει από τη συνένωση δύο διαδικασιών Bernoulli είναι επίσης Bernoulli.



Παράδειγμα (1)

Ένα υπολογιστικό σύστημα εκτελεί εργασίες δύο χρηστών. Ο χρόνος χωρίζεται σε slots, κατά τη διάρκεια καθενός από τα οποία το σύστημα είναι *idle* με πιθανότητα $p_I = 1/6$, και *busy* με πιθανότητα $p_B = 5/6$. Κατά τη διάρκεια ενός busy slot, το σύστημα εκτελεί μία εργασία η οποία με πιθανότητα $2/5$ προέρχεται από τον πρώτο χρήστη ενώ με πιθανότητα $3/5$ από το δεύτερο. Θεωρούμε πως τα γεγονότα που αφορούν διαφορετικά slot είναι ανεξάρτητα.

- α) Να βρεθεί η πιθανότητα η πρώτη εργασία του χρήστη 1 να εκτελεστεί στο 4ο slot.
- β) Δεδομένου πως ακριβώς 5 από τα πρώτα 10 slot είναι idle, να βρεθεί η πιθανότητα το 6ο idle slot να είναι το slot 12.

Παράδειγμα (2)

- γ) Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός slot μέχρι και την 5η εργασία του χρήστη 1, καθώς και ο αναμενόμενος αριθμός από *busy slots* μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.
- δ) Να βρεθεί η κατανομή, η μέση τιμή και η διακύμανση του αριθμού των εργασιών του χρήστη 2 μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.