ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Ανάλυση Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Διάλεξη 5: Μοντέλα Γεννήσεων-Θανάτων (Baby Queueing)

Δρ. Αθανάσιος Ν. Νικολακόπουλος

ΜΔΕ Επιστήμης και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

24 Νοεμβρίου 2016

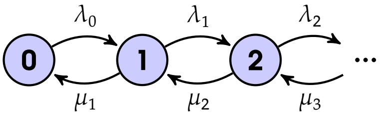
Διαδικασίες Γεννήσεων-Θανάτων

Definition (**Birth-Death-Process (BDP)**)

Μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου, $N(t)$, καλείται διαδικασία γεννήσεων-θανάτων αν οι πιθανότητες μετάβασής της, είναι ανεξάρτητες του t και ικανοποιούν:

$$\Pr\{N(t+h) = n+m \mid N(t) = n\} = \begin{cases} \lambda_n h + o(h) & \text{αν } m = 1, \\ \mu_n h + o(h) & \text{αν } m = -1, \\ 1 - (\lambda_n + \mu_n) h + o(h) & \text{αν } m = 0, \\ o(h) & \text{αν } |m| > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Διάγραμμα Καταστάσεων Γενικής BDP:



Γενική λύση της BDP I

Επιθυμούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$p_n(t) = \Pr\{N(t) = n\},$$

Θεωρούμε την πιθανότητα $p_n(t+h)$. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα αυτή παρατηρούμε πως τη στιγμή $t+h$ ο πληθυσμός στο σύστημά μας είναι n μόνο αν συμβεί ένα από τα παρακάτω γεγονότα:

1. $N(t) = n$, και στο διάστημα $(t, t+h]$ δεν συμβαίνει ούτε *γέννηση* ούτε *θάνατος*.
2. $N(t) = n-1$, και στο διάστημα $(t, t+h]$ συμβαίνει μία *γέννηση*.
3. $N(t) = n+1$, και στο διάστημα $(t, t+h]$ συμβαίνει ένας *θάνατος*.
4. Το $N(t)$ είναι διάφορο του $n-1, n, n+1$ αλλά δύο ή περισσότερες γεννήσεις/θάνατοι συνέβησαν στο $(t, t+h]$, με αποτέλεσμα να έχουμε $N(t+h) = n$.

Γενική λύση της BDP II

Από τον ορισμό 1 το τέταρτο γεγονός έχει πιθανότητα $o(h)$. Επίσης τα τρία πρώτα γεγονότα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και κατά συνέπεια οι πιθανότητές τους αθροίζουν. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= p_n(t)(1-\lambda_n h-\mu_n h+o(h))+p_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}h+o(h)) \\ &\quad +p_{n+1}(t)(\mu_{n+1}h+o(h))+o(h) \end{aligned} \tag{2}$$

Αφαιρούμε $p_n(t)$ και από τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης και διαιρούμε με h. Έπειτα παίρνοντας όρια καθώς το $h \longrightarrow 0$, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων-εξισώσεων διαφορών:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(p_n(t)) = -(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t), & n=1,2,\ldots \\ \frac{d}{dt}(p_0(t)) = -\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \end{cases} \tag{3}$$

Το οποίο κομψότερα σε μητρική μορφή γράφεται:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}, \quad \text{με γεννήτορα } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{4}$$

Γενική λύση της BDP III

Λύση Κατάστασης Ισορροπίας

Θέλουμε να βρούμε τη λύση του συστήματος σε *κατάσταση ισορροπίας*. Δηλαδή, θέλουμε να βρούμε τις πιθανότητες

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = \pi_n$$

Προφανώς, όταν το σύστημα θα βρίσκεται σε ισορροπία θα ισχύει $\lim_{t\to\infty} dp_n(t)/dt = 0$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας στην 3, προκύπτουν οι παρακάτω γραμμικές εξισώσεις διαφορών:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{n+1}\pi_{n+1} - \lambda_n\pi_n = \mu_n\pi_n - \lambda_{n-1}\pi_{n-1} \\ \mu_1\pi_1 - \lambda_0\pi_0 = 0 \end{array} \right\} \iff \quad \mu_n\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1}, \tag{5}$$

Αντίστοιχα σε μητρική μορφή η λύση ικανοποιεί την εξίσωση

$$\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{6}$$

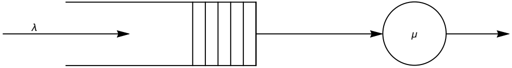
Λύνοντας την παραπάνω παίρνει κανείς

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\pi_0, \quad \text{με } \pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right)^{-1}$$

Σημειώνεται τέλος πως η λύση υπάρχει αν και μόνο αν το τελευταίο άθροισμα συγκλίνει.

Συστήματα Αναμονής

ΓΕΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ



Περιγραφή:

Σημειογραφία Kendall: $\boxed{A/B/C/D/E}$

- A Κατανομή χρόνου μεταξύ διαδοχικών Αφίξεων:
  M = Εκθετική, D = Ντετερμινιστική,
  E_k = Erlangian, G = Γενική κλπ
- B Κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης:
  M = Εκθετική, D = Ντετερμινιστική,
  E_k = Erlangian, G = Γενική κλπ
- C Αριθμός Εξυπηρετητών
- D Μέγιστος αριθμός πελατών στο σύστημα (ουρά και εξυπηρέτηση) Default: ∞
- E Πολιτική Εξυπηρέτησης: FCFS, LCFS, SIRO κλπ
  Default: FCFS

Χρήσιμα Μεγέθη:

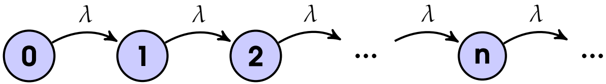
1. **Χρησιμοποίηση:** $\rho = \lambda \bar{X}$
2. **Χρόνος Εξυπηρέτησης:** X με $\mathbb{E}[X] = 1/\mu$
3. **Αριθμός Πελατών:** N με PMF $p_N(n) = \pi_n$
4. **Αριθμός Πελατών στην Ουρά:** N_Q με
5. **Χρόνος Απόκρισης:** T με CDF $F_T(t)$
6. **Χρόνος Αναμονής στην ουρά:** W με CDF $F_W(t)$
7. Βασικό Εργαλείο Mean Value Ανάλυσης:

   Νόμος του Little

   - $\mathbb{E}[N_Q] = \lambda \mathbb{E}[W]$
   - $\mathbb{E}[N] = \lambda \mathbb{E}[T]$
   - $\rho = \lambda \mathbb{E}[X]$
   - κ.ο.κ

Διαδικασία Αφίξεων Poisson I

Μαθηματική Περιγραφή: BDP με $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = 0 \end{array} \right\}$



- **Κατανομή αριθμού αφίξεων, $N(t)$, σε διάστημα t:** Poisson με παράμετρο λt, δηλαδή:

$$\Pr\{N(t) = j\} = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

- **Κατανομή χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:** Εκθετική με παράμετρο λ.

$$\Pr\{X_i \le \tau\} = 1 - e^{-\lambda \tau}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Διαδικασία Αφίξεων Poisson II

Η Διαδικασία Poisson κληρονομεί **ΟΛΕΣ τις κομψές ιδιότητες** της Bernoulli! Συγκεκριμένα:

- **Ιδιότητα Αμνησίας**
- **Διαχωρισμός**

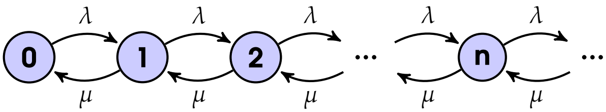
$$\begin{tikzcd} PP(\lambda) \arrow[r, "1-q"] \arrow[dr, "q"'] & PP((1-q)\lambda) \\ & PP(\lambda q) \end{tikzcd}$$

- **Συνένωση**

$$\begin{tikzcd} PP(\lambda) \arrow[r] & PP(\lambda + \mu) \\ PP(\mu) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Το M/M/1 Σύστημα Αναμονής

Μαθηματική Περιγραφή: BDP με $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu \end{array} \right\}$

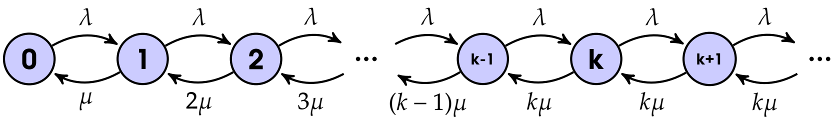


- **Χρησιμοποίηση:** $\rho = \lambda/\mu$
- **Κατανομή Αριθμού Πελατών:** $p_N(n) = \pi_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0.$

  Από $p_N(n)$ και Νόμο του Little:
  - $\mathbb{E}[N] = \frac{\rho}{1-\rho}$
  - $\mathbb{E}[N_Q] = \mathbb{E}[N] - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
  - $\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}[N]}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
  - $\mathbb{E}[W] = \frac{\mathbb{E}[N_Q]}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$
- **Κατανομή Χρόνου Απόκρισης:** $F_T(t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}$
- **Κατανομή Χρόνου Αναμονής:** $F_W(t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$

Το M/M/k Σύστημα

Μαθηματική Περιγραφή: BDP με $\left\{\begin{array}{l}\lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \min\{n, k\}\mu\end{array}\right\}$



- **Χρησιμοποίηση:** $\rho = \frac{\lambda}{k\mu}$
- **Κατανομή Αριθμού Πελατών:** $p_N(n) =$

$$\pi_n = \begin{cases} \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^i}{i!} + \frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)}\right]^{-1}, & n = 0 \\ \pi_0 \frac{(k\rho)^n}{n!}, & n \leq k \\ \pi_0 \frac{k^k \rho^n}{k!}, & n > k \end{cases}$$

- **Πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει να χρειαστεί να περιμένει:**

$$P_Q = \frac{\pi_0 (k\rho)^k}{k!\,(1-\rho)}$$ (Erlang C Formula)

- **Χρήσιμοι Μέσοι Όροι:**
  - $\mathbb{E}[W] = \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$
  - $\mathbb{E}[N_Q] = \frac{\rho P_Q}{1-\rho}$
  - $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu} + \mathbb{E}[W]$
  - $\mathbb{E}[N] = k\rho + \mathbb{E}[N_Q]$
- **Κατανομή Χρόνου Αναμονής:**

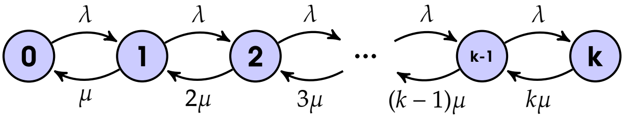
$$F_W(t) = 1 - P_Q e^{-k\mu(1-\rho)t}$$

- **Κατανομή Χρόνου Απόκρισης:**

$$F_T(t) = \frac{P_Q}{1-k(1-\rho)} e^{-k\mu(1-\rho)t} + \left(1 - \frac{P_Q}{1-k(1-\rho)}\right) e^{-\mu t}$$

Το M/M/k/k Σύστημα Αναμονής

Μαθηματική Περιγραφή: BDP με $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = n\mu \end{array} \right\}, n = 0, 1, \ldots, k$



- **Κατανομή Αριθμού Πελατών:** $p_N(n) =$

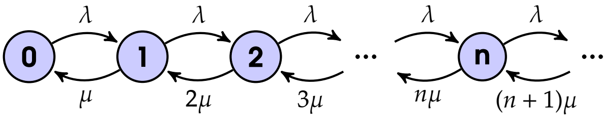
$$\pi_n = \begin{cases} \left[\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}\right]^{-1}, & n = 0 \\ \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}, & n = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

- **Πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει να χαθεί:**

$$\pi_k = \frac{(\lambda/\mu)^k/k!}{\sum_{i=0}^{k} (\lambda/\mu)^i/i!} \quad \text{(Erlang B Formula)}$$

Το M/M/∞ σύστημα

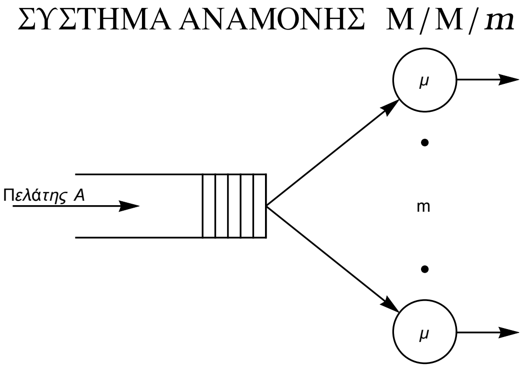
Μαθηματική Περιγραφή: BDP με $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = n\mu \end{array} \right\}$



- **Κατανομή Αριθμού Πελατών:** Poisson με παράμετρο λ/μ

$$\pi_n = \frac{(\lambda/\mu)^n e^{-\lambda/\mu}}{n!}$$

Άσκηση - Εκφώνηση



Τη στιγμή $t = 0$ ο πελάτης A καταθέτει μία αίτηση εξυπηρέτησης και βρίσκει όλους τους m εξυπηρετητές απασχολημένους και άλλους n πελάτες να περιμένουν σε ένα $M/M/m$ σύστημα αναμονής. Όλοι οι πελάτες περιμένουν όσο χρόνο χρειάζεται για να εξυπηρετηθούν και η πολιτική εξυπηρέτησης είναι FCFS, ενώ το σύστημα παύει να δέχεται άλλες αιτήσεις. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στους servers θεωρούμε πως είναι εκθετικά κατανεμημένοι με ρυθμό μ.

Άσκηση - Ζητούμενα

1. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής του πελάτη A, $\mathbb{E}[W_A]$.
2. Να βρεθεί το μέσο χρονικό διάστημα που πρέπει να περάσει από τη στιγμή άφιξης του A ($t = 0$) μέχρι να αδειάσει τελείως το σύστημα.
3. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που μετρά τη σειρά ολοκλήρωσης της εξυπηρέτησης του A (αν για παράδειγμα $X = k$ αν ο k είναι ο k-οστός πελάτης που φεύγει από το σύστημα). Να βρεθεί η κατανομή της X.
4. Να βρεθεί η πιθανότητα ο A να ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του πριν τον πελάτη που βρίσκεται ακριβώς μπροστά του.
5. Να βρεθεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής W_A.