Ανάλυση Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Διάλεξη 11: Εισαγωγή στο Σύστημα Αναμονής $M/G/1$

Καθ. Γιάννης Γαροφαλάκης

ΜΔΕ Επιστήμης και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Το σύστημα αναμονής M/G/1 I

Θεωρούμε ένα σύστημα στο οποίο οι πελάτες φθάνουν κατά Poisson με ρυθμό λ, αλλά οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι **γενικά κατανεμημένοι**. Συγκεκριμένα, θεωρούμε πως οι πελάτες εξυπηρετούνται με την σειρά που φθάνουν και πως X_i είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης της i-οστής άφιξης. Υποθέτουμε πως οι τυχαίες μεταβλητές $(X_1, X_2, \dots)$ είναι όμοια κατανεμημένες, ανεξάρτητες μεταξύ τους, και ανεξάρτητες των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων.

Έστω ότι ο *μέσος χρόνος εξυπηρέτησης* (δηλαδή η μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών X_i) είναι:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\mu}$$

Η Pollaczek-Khintchine (P-K) φόρμουλα δίνει το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά συναρτήσει του ρυθμού αφίξεων, του ρυθμού

Το σύστημα αναμονής M/G/1 II

εξυπηρέτησης και της ποσότητας: $\mathbb{E}[X^2]$ (δεύτερη ροπή του χρόνου εξυπηρέτησης):

$$\mathbb{E}[W] = \frac{\lambda \mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)} \tag{1}$$

όπου $\mathbb{E}[W]$ είναι ο μέσος χρόνος που περνά ένας πελάτης περιμένοντας στην ουρά και $\rho = \lambda/\mu = \lambda \mathbb{E}[X]$.
Όταν γνωρίζει κανείς την (P-K), προφανώς μπορεί πολύ εύκολα να πάρει όλες τις βασικές ενδιαφέρουσες μετρικές με χρήση του νόμου του Little.

Μέσος Συνολικός Χρόνος Στο Σύστημα:

$$\mathbb{E}[T] = \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\text{μέσος χρόνος εξυπηρέτησης}} + \underbrace{\frac{\lambda \mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)}}_{\text{μέσος χρόνος στην ουρά}} \tag{2}$$

Το σύστημα αναμονής M/G/1 III

Μέσος Αριθμός Πελατών Στην Ουρά:

$$\mathbb{E}[N_Q] = \lambda \times \mathbb{E}[W] = \frac{\lambda^2 \mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)} \tag{3}$$

Μέσος Αριθμός Πελατών Στο Σύστημα:

$$\mathbb{E}[N] = \underbrace{\rho}_{\text{Μέσος αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση}} + \underbrace{\frac{\lambda^2 \mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)}}_{\mathbb{E}[N_Q]} \tag{4}$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας I

Θεωρούμε τον i-οστό πελάτη που φθάνει στο σύστημα και συμβολίζουμε με W_i τον χρόνο αναμονής του στην ουρά. Έστω N_i ο αριθμός των πελατών που βρίσκει ο i να περιμένουν στην ουρά τη στιγμή της άφιξής του. Όταν $N_i > 0$ προφανώς στο σύστημα εκτός από τους N_i πελάτες που περιμένουν στην ουρά, υπάρχει κι' άλλος ένας που βρίσκεται στον εξυπηρετητή. Έστω R_i ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη αυτού. Οπότε ο χρόνος W_i θα ισούται με:

$$W_i = R_i + \sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j \tag{5}$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας II

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η εύρεση της μέσης τιμής του χρόνου αναμονής, οπότε παίρνουμε μέσες τιμές της παραπάνω σχέσης:

$$\mathbb{E}[W_i] = \mathbb{E}[R_i] + \mathbb{E}[\sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j]$$

$$= \mathbb{E}[R_i] + \sum_{j=i-\mathbb{E}[N_i]}^{i-1} \mathbb{E}[X_j|N_i]$$

Κάνοντας χρήση της υπόθεσης ανεξαρτησίας των N_i και $X_{i-1}, \ldots, X_{i-N_i}$, καθώς και του γεγονότος ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι όμοια κατανεμημένες, έχουμε:

$$\mathbb{E}[W_i] = \mathbb{E}[R_i] + \sum_{j=i-\mathbb{E}[N_i]}^{i-1} \mathbb{E}[X_j]$$

$$= \mathbb{E}[R_i] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N_i]$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας III

οπότε θεωρώντας πως το σύστημα είναι εργοδικό και λειτουργεί σε κατάσταση ισορροπίας έχουμε:

$$W = R + \frac{1}{\mu} N_Q \qquad (6)$$

όπου ως R ορίζεται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης που βιώνει ένας τυχαίος πελάτης που φθάνει στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε ισορροπία. Από τον νόμο του Little, έχουμε πως ισχύει:

$$N_Q = \lambda W$$

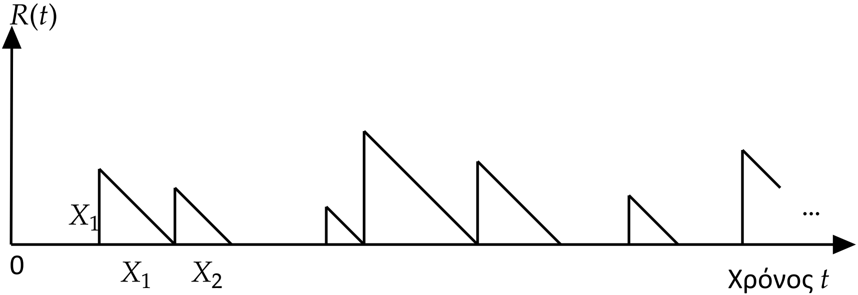
οπότε αντικαθιστώντας στην (6) παίρνουμε:

$$W = \frac{R}{1-\rho} \qquad (7)$$

Το μόνο που μένει είναι να υπολογίσουμε το R. Στο παρακάτω σχήμα σχεδιάζουμε τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης, $R(t)$,

Απόδειξη της P-K φόρμουλας IV

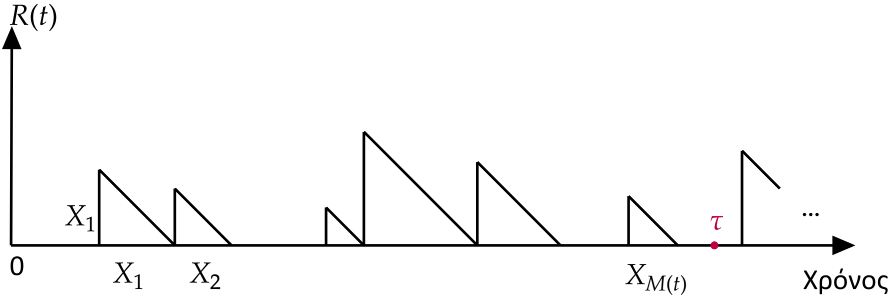
συναρτήσει του χρόνου t.



Όταν τη στιγμή t_i, ένας νέος πελάτης με χρόνο εξυπηρέτησης X_i εισέλθει στον εξυπηρετητή, η $R(t)$ ξεκινά από το σημείο (t_i, X_i) και μειώνεται γραμμικά για X_i μονάδες χρόνου (δηλαδή, μέχρι το σημείο $(t_i + X_i, 0)$).

Απόδειξη της P-K φόρμουλας V

Θεωρούμε μία χρονική στιγμή τ για την οποία $R(\tau) = 0$. (Γιατί υπάρχει?)



Απόδειξη της P-K φόρμουλας VI

Έστω ότι μέχρι τη στιγμή τ έχουν εξυπηρετηθεί $M(\tau)$ πελάτες. Ο μέσος χρόνος του $R(t)$ στο διάστημα $[0, \tau]$ είναι:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} R(t)dt = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{M(\tau)} \frac{1}{2}X_i^2$$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με το $M(\tau)$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} R(t)dt = \frac{1}{2}\frac{M(\tau)}{\tau}\frac{\sum_{i=1}^{M(\tau)} X_i^2}{M(\tau)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} R(t)dt}_{\text{Μέσος υπολειπόμενος χρόνος } R} = \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{M(\tau)}{\tau}}_{\text{ο ρυθμός αναχωρήσεων}}\cdot\underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{M(\tau)} X_i^2}{M(\tau)}}_{\mathbb{E}[X^2]} \quad (8)$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας VII

Αλλά στην ισορροπία ο ρυθμός αναχωρήσεων από το σύστημα ισούται με τον ρυθμό αφίξεων στο σύστημα, λ, συνεπώς τελικά παίρνουμε:

$$R = \frac{1}{2}\lambda\mathbb{E}[X^2] \tag{9}$$

η οποία όταν αντικατασταθεί στην 6 μας δίνει το ζητούμενο:

$$W = \frac{\lambda\mathbb{E}[X^2]}{2(1-\rho)} \tag{10}$$

Απόδειξη της P-K φόρμουλας VIII

Παρατηρήσεις

- Η απόδειξη της P-K, παραπάνω, έκανε την παραδοχή πως οι πελάτες εξυπηρετούνται με την σειρά που φθάνουν, δηλαδή το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται μεταξύ της χρονικής στιγμής άφιξης του i-οστού πελάτη και της εξυπηρέτησής του είναι ο αριθμός των πελατών στην ουρά κατά τη στιγμή άφιξης του i. Προκύπτει ωστόσο, πως η P-K ισχύει για οποιαδήποτε σειρά εξυπηρέτησης των πελατών, αρκεί η σειρά εξυπηρέτησης να μην εξαρτάται από τον χρόνο εξυπηρέτησης των πελατών στην ουρά.
- Για την αυστηρή απόδειξη της (P-K) στη βιβλιογραφία συνήθως χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες των renewal στοχαστικών διαδικασιών, ή εναλλακτικά οι embedded αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου με ανάλυση στο πεδίο του μετασχηματισμού Z.

Άσκηση 1

Θεωρήστε το $M/G/1$ σύστημα στο οποίο οι πελάτες περιμένουν για να παραλάβουν δέματα στο ταχυδρομείο. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με ρυθμό 1 πελάτης κάθε 2 λεπτά. Ο κάθε πελάτης έχει να παραλάβει μέχρι k δέματα $(1 \leq k \leq 4)$, και ισχύει

$$\Pr[k=1]=0.5, \quad \Pr[k=2]=0.25 \quad \Pr[k=3]=0.2 \quad \Pr[k=4]=0.05$$

Αν ο υπάλληλος στο ταχυδρομείο χρειάζεται ακριβώς 1 λεπτό για να βρεί το κάθε πακέτο, να βρεθεί με χρήση της P-K formula ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά του ταχυδρομείου.

Άσκηση 2

Κάποιος διατυπώνει το ακόλουθο επιχείρημα για το $M/G/1$ σύστημα: Όταν φθάνει ένας πελάτης, η πιθανότητα να εξυπηρετείται κάποιος άλλος πελάτης είναι $\lambda\mathbb{E}[X]$. Αφού ο πελάτης που εξυπηρετείται έχει μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $\mathbb{E}[X]$, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης είναι:

$$\frac{\mathbb{E}[X]}{2}\lambda\mathbb{E}[X] = \frac{\lambda(\mathbb{E}[X])^2}{2}$$

Πού είναι το λάθος στον παραπάνω συλλογισμό?

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης