# ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

## ΔΙΑΛΕΞΗ 10: ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ-ΘΑΝΑΤΩΝ

Καθ. Γιάννης Γαροφαλάκης

ΜΔΕ Επιστήμης και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

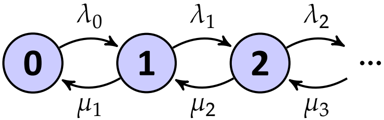
# Διαδικασίες Γεννήσεων-Θανάτων

## Definition (**Birth-Death-Process (BDP)**)

Μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου, $N(t)$, καλείται διαδικασία γεννήσεων-θανάτων αν οι πιθανότητες μετάβασής της, είναι ανεξάρτητες του $t$ και ικανοποιούν:

$$\Pr\{N(t+h) = n+m | N(t) = n\} = \begin{cases} \lambda_n h + o(h) & \text{αν } m = 1, \\ \mu_n h + o(h) & \text{αν } m = -1, \\ 1 - (\lambda_n + \mu_n)h + o(h) & \text{αν } m = 0, \\ o(h) & \text{αν } |m| > 1. \end{cases} \tag{1}$$

**Διάγραμμα Καταστάσεων Γενικής BDP:**



# Γενική λύση της BDP I

Επιθυμούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$p_n(t) = \Pr\{N(t) = n\},$$

Θεωρούμε την πιθανότητα $p_n(t+h)$. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα αυτή παρατηρούμε πως τη στιγμή $t+h$ ο πληθυσμός στο σύστημά μας είναι $n$ μόνο αν συμβεί ένα από τα παρακάτω γεγονότα:

1. $N(t) = n$, και στο διάστημα $(t, t+h]$ δεν συμβαίνει ούτε *γέννηση* ούτε *θάνατος*.
2. $N(t) = n-1$, και στο διάστημα $(t, t+h]$ συμβαίνει μία *γέννηση*.
3. $N(t) = n+1$, και στο διάστημα $(t, t+h]$ συμβαίνει ένας *θάνατος*.
4. Το $N(t)$ είναι διάφορο του $n-1, n, n+1$ αλλά δύο ή περισσότερες γεννήσεις/θάνατοι συνέβησαν στο $(t, t+h]$, με αποτέλεσμα να έχουμε $N(t+h) = n$.

## Γενική λύση της BDP II

Από τον ορισμό 1 το τέταρτο γεγονός έχει πιθανότητα $o(h)$. Επίσης τα τρία πρώτα γεγονότα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και κατά συνέπεια οι πιθανότητές τους αθροίζουν. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= p_n(t)(1-\lambda_n h-\mu_n h+o(h))+p_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}h+o(h)) \\ &\quad +p_{n+1}(t)(\mu_{n+1}h+o(h))+o(h) \end{aligned} \tag{2}$$

Αφαιρούμε $p_n(t)$ και από τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης και διαιρούμε με $h$. Έπειτα παίρνοντας όρια καθώς το $h \to 0$, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων-εξισώσεων διαφορών:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(p_n(t)) = -(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t), & n=1,2,\ldots \\ \frac{d}{dt}(p_0(t)) = -\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \end{cases} \tag{3}$$

Το οποίο κομψότερα σε μητρική μορφή γράφεται:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}, \quad \text{με γεννήτορα } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{4}$$

# Γενική λύση της BDP III

**Λύση Κατάστασης Ισορροπίας**

Θέλουμε να βρούμε τη λύση του συστήματος σε *κατάσταση ισορροπίας*. Δηλαδή, θέλουμε να βρούμε τις πιθανότητες

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = \pi_n$$

Προφανώς, όταν το σύστημα θα βρίσκεται σε ισορροπία θα ισχύει $\lim_{t\to\infty} dp_n(t)/dt = 0$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας στην 3, προκύπτουν οι παρακάτω γραμμικές εξισώσεις διαφορών:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{n+1}\pi_{n+1} - \lambda_n\pi_n = \mu_n\pi_n - \lambda_{n-1}\pi_{n-1} \\ \mu_1\pi_1 - \lambda_0\pi_0 = 0 \end{array} \right\} \iff \mu_n\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1}, \qquad (5)$$

# Γενική λύση της BDP IV

Αντίστοιχα σε μητρική μορφή η λύση ικανοποιεί την εξίσωση

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{6}$$

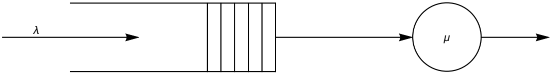
Λύνοντας την παραπάνω παίρνει κανείς

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\pi_0, \qquad \text{με } \pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right)^{-1}$$

Σημειώνεται τέλος πως η λύση υπάρχει αν και μόνο αν το τελευταίο άθροισμα συγκλίνει.

# Συστήματα Αναμονής

ΓΕΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ




## Περιγραφή:

Σημειογραφία Kendall: $\boxed{A/B/C/D/E}$

- A Κατανομή χρόνου μεταξύ διαδοχικών Αφίξεων:
  M = Εκθετική, $D$ = Ντετερμινιστική,
  $E_k$ = Erlangian, $G$ = Γενική κλπ
- B Κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης:
  M = Εκθετική, $D$ = Ντετερμινιστική,
  $E_k$ = Erlangian, $G$ = Γενική κλπ
- C Αριθμός Εξυπηρετητών
- D Μέγιστος αριθμός πελατών στο σύστημα (ουρά και εξυπηρέτηση)
  Default: $\infty$
- E Πολιτική Εξυπηρέτησης: FCFS, LCFS, SIRO κλπ
  Default: FCFS

## Χρήσιμα Μεγέθη:

1. **Χρησιμοποίηση:** $\rho = \lambda \bar{X}$
2. **Χρόνος Εξυπηρέτησης:** X με $\mathbb{E}[X] = 1/\mu$
3. **Αριθμός Πελατών:** $N$ με PMF $p_N(n) = \pi_n$
4. **Αριθμός Πελατών στην Ουρά:** $N_Q$ με
5. **Χρόνος Απόκρισης:** T με CDF $F_T(t)$
6. **Χρόνος Αναμονής στην ουρά:** $W$ με CDF $F_W(t)$
7. Βασικό Εργαλείο Mean Value Ανάλυσης:

   **Νόμος του Little**

   - $\mathbb{E}[N_Q] = \lambda \mathbb{E}[W]$
   - $\mathbb{E}[N] = \lambda \mathbb{E}[T]$
   - $\rho = \lambda \mathbb{E}[X]$
   - κ.ο.κ

# Διαδικασία Αφίξεων Poisson I

**Μαθηματική Περιγραφή:** BDP με $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = 0 \end{array} \right\}$

$$0 \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 2 \xrightarrow{\lambda} \cdots \xrightarrow{\lambda} n \xrightarrow{\lambda} \cdots$$

- **Κατανομή αριθμού αφίξεων, $N(t)$, σε διάστημα $t$:** Poisson με παράμετρο $\lambda t$, δηλαδή:

$$\Pr\{N(t) = j\} = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad j = 0, 1, 2, \dots .$$

- **Κατανομή χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:** Εκθετική με παράμετρο $\lambda$.

$$\Pr\{X_i \le \tau\} = 1 - e^{-\lambda\tau}, \quad i = 1, 2, \dots .$$

# Διαδικασία Αφίξεων Poisson II

Η Διαδικασία Poisson κληρονομεί **ΟΛΕΣ τις κομψές ιδιότητες** της Bernoulli! Συγκεκριμένα:

- **Ιδιότητα Αμνησίας**
- **Διαχωρισμός**

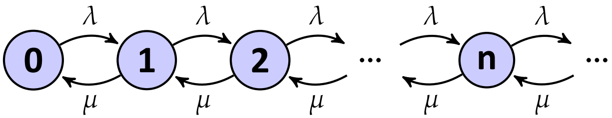
$$
\begin{tikzcd}
PP(\lambda) \arrow[r, "1-q"] \arrow[dr, "q"'] & PP((1-q)\lambda) \\
& PP(\lambda q)
\end{tikzcd}
$$

- **Συνένωση**

$$
\begin{tikzcd}
PP(\lambda) \arrow[r] & PP(\lambda + \mu) \\
PP(\mu) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

# Το M/M/1 Σύστημα Αναμονής

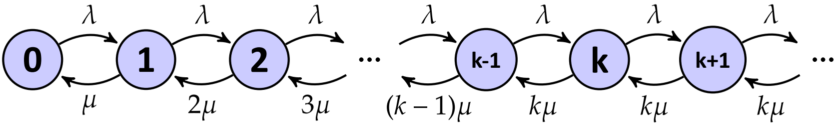
**Μαθηματική Περιγραφή:** BDP με $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu \end{array} \right\}$




- **Χρησιμοποίηση:** $\rho = \lambda/\mu$
- **Κατανομή Αριθμού Πελατών:** $p_N(n) = \pi_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0.$
  Από $p_N(n)$ και Νόμο του Little:
  - $\mathbb{E}[N] = \frac{\rho}{1-\rho}$
  - $\mathbb{E}[N_Q] = \mathbb{E}[N] + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
  - $\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}[N]}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
  - $\mathbb{E}[W] = \frac{\mathbb{E}[N_Q]}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$
- **Κατανομή Χρόνου Απόκρισης:** $F_T(t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}$
- **Κατανομή Χρόνου Αναμονής:** $F_W(t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$

# Το M/M/k Σύστημα

**Μαθηματική Περιγραφή:** BDP με $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \min\{n, k\}\mu \end{array} \right\}$




- **Χρησιμοποίηση:** $\rho = \frac{\lambda}{k\mu}$
- **Κατανομή Αριθμού Πελατών:** $p_N(n) =$

$$\pi_n = \begin{cases} \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^i}{i!} + \frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} \right]^{-1}, & n = 0 \\ \pi_0 \frac{(k\rho)^n}{n!}, & n \leq k \\ \pi_0 \frac{k^k \rho^n}{k!}, & n > k \end{cases}$$

- **Πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει να χρειαστεί να περιμένει:**

$$P_Q = \frac{\pi_0 (k\rho)^k}{k!\,(1-\rho)} \quad \text{(Erlang C Formula)}$$

- **Χρήσιμοι Μέσοι Όροι:**
  - $\mathbb{E}[W] = \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$
  - $\mathbb{E}[N_Q] = \frac{\rho P_Q}{1-\rho}$
  - $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu} + \mathbb{E}[W]$
  - $\mathbb{E}[N] = k\rho + \mathbb{E}[N_Q]$
- **Κατανομή Χρόνου Αναμονής:**

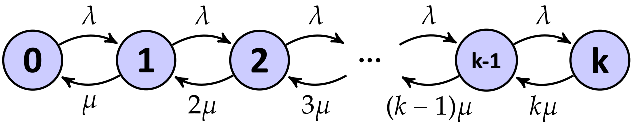
$$F_W(t) = 1 - P_Q e^{-k\mu(1-\rho)t}$$

- **Κατανομή Χρόνου Απόκρισης:**

$$F_T(t) = \frac{P_Q}{1-k(1-\rho)} e^{-k\mu(1-\rho)t} + \left(1 - \frac{P_Q}{1-k(1-\rho)}\right) e^{-\mu t}$$

# Το M/M/k/k Σύστημα Αναμονής

**Μαθηματική Περιγραφή:** BDP με $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = n\mu \end{array} \right\}, n = 0, 1, \ldots, k$




- **Κατανομή Αριθμού Πελατών:** $p_N(n) =$

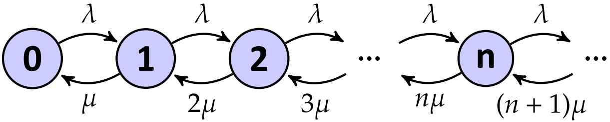
$$\pi_n = \begin{cases} \left[\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}\right]^{-1}, & n = 0 \\ \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}, & n = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

- **Πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει να χαθεί:**

$$\pi_k = \frac{(\lambda/\mu)^k/k!}{\sum_{i=0}^{k} (\lambda/\mu)^i/i!}$$ (Erlang B Formula)

# Το M/M/∞ σύστημα

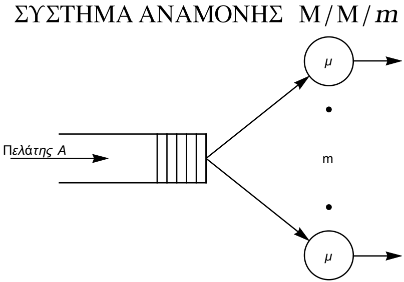
**Μαθηματική Περιγραφή:** BDP με $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = n\mu \end{array} \right\}$




- **Κατανομή Αριθμού Πελατών:** Poisson με παράμετρο $\lambda/\mu$

$$\pi_n = \frac{(\lambda/\mu)^n e^{-\lambda/\mu}}{n!}$$

# Άσκηση - Εκφώνηση




Τη στιγμή $t = 0$ ο πελάτης Α καταθέτει μία αίτηση εξυπηρέτησης και βρίσκει όλους τους $m$ εξυπηρετητές απασχολημένους και άλλους $n$ πελάτες να περιμένουν σε ένα $M/M/m$ σύστημα αναμονής. Όλοι οι πελάτες περιμένουν όσο χρόνο χρειάζεται για να εξυπηρετηθούν και η πολιτική εξυπηρέτησης είναι FCFS, ενώ το σύστημα παύει να δέχεται άλλες αιτήσεις. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στους servers θεωρούμε πως είναι εκθετικά κατανεμημένοι με ρυθμό $\mu$.

# Άσκηση - Ζητούμενα

1. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής του πελάτη A, $\mathbb{E}[W_A]$.
2. Να βρεθεί το μέσο χρονικό διάστημα που πρέπει να περάσει από τη στιγμή άφιξης του A ($t = 0$) μέχρι να αδειάσει τελείως το σύστημα.
3. Έστω $X$ η τυχαία μεταβλητή που μετρά τη σειρά ολοκλήρωσης της εξυπηρέτησης του A (αν για παράδειγμα $X = k$ αν ο k είναι ο k-οστός πελάτης που φεύγει από το σύστημα). Να βρεθεί η κατανομή της $X$.
4. Να βρεθεί η πιθανότητα ο A να ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του πριν τον πελάτη που βρίσκεται ακριβώς μπροστά του.
5. Να βρεθεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $W_A$.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γιάννης Γαροφαλάκης . «Ανάλυση Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων. Διαδικασίες Γεννήσεων - Θανάτων ». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: `https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1094/`.

# Σημείωμα Αδειοδότησης