ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ 6-9: ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ MARKOV ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Καθ. Γιάννης Γαροφαλάκης

ΜΔΕ Επιστήμης και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Μοντέλα Markov Διακριτού Χρόνου I

Ένα μοντέλο αλυσίδας Markov (Markov Chain Model) ορίζεται από:

1. Ένα σύνολο καταστάσεων S
2. Ένα σύνολο των πιθανών μεταβάσεων, μεταξύ των καταστάσεων αυτών, δηλαδή τα (i, j) για τα οποία $p_{ij} > 0$ και
3. Τις τιμές των θετικών πιθανοτήτων μετάβασης, $p_{ij} > 0$.

Η *Αλυσίδα Markov Διακριτού Χρόνου* (στο εξής **DTMC**) που αντιστοιχεί στο μοντέλο είναι μία στοχαστική ακολουθία $\{X(n) \in S, n \in \mathbb{Z}\}$ η οποία ικανοποιεί:

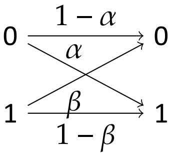
$$\Pr\{X(n+1) = j \mid X(n) = i, X(n-1) = i_{n-1}, \dots, X(0) = i_0\}$$

$$\xrightarrow[\text{Markov}]{\text{Ιδιότητα}} = \Pr\{X(n+1) = j \mid X(n) = i\} = p_{ij} \tag{1}$$

Μία DTMC μπορεί να περιγραφεί πλήρως από το στοχαστικό μητρώο $\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} [p_{ij}]$ το οποίο καλείται **μητρώο πιθανοτήτων μετάβασης**.

Μοντέλα Markov Διακριτού Χρόνου II

Example (**Δυαδικό Επικοινωνιακό Κανάλι**)



Θεωρούμε ένα bit που περνάει μία σειρά τέτοιων links.

Ερωτήσεις

- Χώρος Κατάστασης?
- Μητρώο Πιθανοτήτων Μετάβασης?

Example (**Απλή Ουρά Διακριτού χρόνου**)

Αφίξεις: $BP(p)$
Εξυπηρέτηση: $Geometric(q)$
Χωρητικότητα: K πελάτες
Πολιτική Εξυπηρέτησης: $FCFS$

Ερωτήσεις

- Χώρος Κατάστασης?
- Διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης?
- Μητρώο Πιθανοτήτων Μετάβασης?

Πιθανότητες n βημάτων I

Πρόβλημα: Θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $p_{ij}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \Pr\{i \to j$ σε n βήματα$\}$

Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

Η Λύση μπορεί να βρεθεί αναδρομικά:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}, \forall i, j \qquad (2)$$

η οποία μπορεί να γραφεί πιο συνοπτικά σε matrix form:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)}\mathbf{P} \qquad (3)$$

οπότε λύνοντας την αναδρομή:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(n-2)}\mathbf{P}^2 = \cdots = \mathbf{P}^{(1)}\mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}^n \qquad (4)$$

Πιθανότητες n βημάτων II

Έστω λ_i η i-οστή ιδιοτιμή και που αντιστοιχεί στο δεξιό ιδιοδιάνυσμα u_i, του Μητρώου Πιθανοτήτων Μετάβασης:

$$\mathbf{P}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, i \in S = \{0, 1, 2, ..., M-1\}, \tag{5}$$

Θα εξετάσουμε την περίπτωση που οι ιδιοτιμές είναι διακριτές. Θεωρούμε μητρώο $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 ... \mathbf{u}_{M-1}]$ και διαγώνιο μητρώο $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\mathrm{M}-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Τότε το μητρώο $\mathbf{P}$ μπορεί να γραφτεί:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}, \tag{7}$$

όπου $\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1}$.

Πιθανότητες n βημάτων III

Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με $\mathbf{V}$ την (7), έχουμε

$$\mathbf{VP} = \mathbf{\Lambda V} \tag{8}$$

θεωρούμε το σύνολο των διανυσμάτων γραμμής $\mathbf{v}_i^\top$ που προκύπτουν από το μητρώο:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^\top \\ \mathbf{v}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{M-1}^\top \end{bmatrix} \tag{9}$$

Ισχύει $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{P} = \lambda_i \mathbf{v}_i^\top, i \in S$. Συνεπώς, το $\mathbf{v}_i^\top$ είναι το **αριστερό ιδιοδιάνυσμα** το οποίο σχετίζεται με την ιδιοτιμή λ_i. Επίσης, προσέξτε πως $\mathbf{VU} = \mathbf{I}$ το οποίο συνεπάγεται ότι τα $\mathbf{v}_i$ και $\mathbf{u}_j$ είναι ορθοκανονικά.

Πιθανότητες n βημάτων IV

Υψώνοντας το $\mathbf{P}$ στο τετράγωνο προκύπτει:
$\mathbf{P}^2 = \mathbf{U\Lambda U}^{-1}\mathbf{U\Lambda U}^{-1} = \mathbf{U\Lambda}^2\mathbf{U}^{-1}$. Οπότε, υψώνοντας στη n-οστή δύναμη θα έχουμε:

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{U\Lambda}^n\mathbf{U}^{-1} = \sum_{i\in S} {\lambda_i}^n \mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^\top = \sum_{i\in S} {\lambda_i}^n \mathbf{E_i}, \tag{10}$$

Προσέξτε επίσης πως $\mathbf{I} = \mathbf{UV}^\top = \sum_{i\in S} \mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^\top = \sum_{i\in S} \mathbf{E_i}^\top$, η οποία δίνει την ακόλουθη ταυτότητα:

$$\sum_{i\in S} \mathbf{E_i} = \sum_{i\in S} \mathbf{E_i}^\top = \mathbf{I}, \tag{11}$$

Οι πιθανότητα μετάβασης n-βημάτων από την κατάσταση i στην κατάσταση j γράφεται ως

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in S} {\lambda_k}^n u_{ki} v_{kj}, i, j \in S, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Πιθανότητες n βημάτων V

Συνεπώς η κατανομή n βημάτων μπορεί να εκφραστεί:

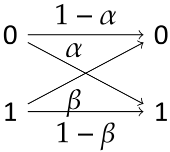
$$\mathbf{p}^\top(n) = \mathbf{p}^\top(0)\mathbf{P}^n = \sum_{k\in S} \lambda_k^n \mathbf{p}^\top(0)\mathbf{u_k}\mathbf{v}_k^\top \tag{13}$$

Συνεπώς, η πιθανότητα η αλυσίδα Markov να είναι στην κατάσταση i τη χρονική στιγμή n δίνεται από τον τύπο

$$p_i(n) = \sum_{k\in S} \lambda_k^n (\mathbf{p}^\top(0)\mathbf{u_k}) v_{ki}, i \in S. \tag{14}$$

Πιθανότητες n βημάτων VI

Example (**Δυαδικό Επικοινωνιακό Κανάλι** (συνέχεια...))



$$\mathbf{P}_{bcc}^{n} = \begin{pmatrix} \frac{\beta+\alpha(1-\alpha-\beta)^n}{a+b} & \frac{\alpha-\alpha(1-\alpha-\beta)^n}{a+b} \\ \frac{\beta-\beta(1-\alpha-\beta)^n}{a+b} & \frac{\alpha+\beta(1-\alpha-\beta)^n}{a+b} \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{bcc}^{n} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{a+b} & \frac{\alpha}{a+b} \\ \frac{\beta}{a+b} & \frac{\alpha}{a+b} \end{pmatrix}$$

1. Υπάρχει μία **οριακή κατανομή** με την οποία βρισκόμαστε σε κάθε κατάσταση!
2. Η κατανομή αυτή είναι **ανεξάρτητη** της αρχικής κατάστασης!

Ερώτηση: Γιατί είναι σημαντικό αυτό?

Πότε Υπάρχει Οριακή Κατανομή?

$\$10^6$ Questions:

- Ποιές Ιδιότητες της Αλυσίδας εξασφαλίζουν ότι:
  1. Το $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ **υπάρχει** $\forall i, j$
  2. Το $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ είναι **ανεξάρτητο** του i
  3. Το $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ είναι **μη μηδενικό** $\forall j$
- Πώς σχετίζεται η "time-average" κατανομή:

  $\varpi_j \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{t} \mathbb{1}_{[X(n)=j]}$ με την οριακή κατανομή.

Πριν επιχειρήσουμε να απαντήσουμε θα πρέπει να ορίσουμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των καταστάσεων και των αλυσίδων.

Κατηγοριοποίηση Αλυσίδων Markov I

Ορισμός Προσβασιμότητα και Επικοινωνία

Μια κατάσταση $j \in S$ είναι **προσβάσιμη** από μια κατάσταση $i \in S$ αν υπάρχει ένας ακέραιος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε $P_{ij}^{(n)} > 0$. Αν η κατάσταση i είναι προσβάσιμη από την κατάσταση j και η κατάσταση j είναι προσβάσιμη από την i, τότε οι καταστάσεις i και j λέγεται ότι **επικοινωνούν** το οποίο συμβολίζεται $i \leftrightarrow j$.

Πρόταση Η Επικοινωνία είναι μια σχέση ισοδυναμίας

- Ανακλαστική ιδιότητα: $i \leftrightarrow i$ για όλα τα $i \in S$.
- Συμμετρική ιδιότητα: αν $i \leftrightarrow j$, τότε $j \leftrightarrow i$.
- Μεταβατική ιδιότητα: αν $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow k$, τότε $i \leftrightarrow k$.

Κατηγοριοποίηση Αλυσίδων Markov II

Ορισμοί **Κλειστά, Ανοιχτά και Αμείωτα σύνολα καταστάσεων**

Ένα σύνολο καταστάσεων C ονομάζεται **κλειστό** αν

$$P_{ij} = 0 \text{ για όλα τα } i \in C, j \notin C \tag{15}$$

αλλιώς, ονομάζεται **ανοιχτό**.
Ένα σύνολο C ονομάζεται **αμείωτο** αν

$$i \leftrightarrow j \text{ για όλα τα } i, j \in C \tag{16}$$

Αν όλες οι καταστάσεις S μιας αλυσίδας Markov είναι αμείωτες, τότε η αλυσίδα ονομάζεται **αμείωτη**. Αν ένα κλειστό σύνολο περιέχει ακριβώς μια κατάσταση, η κατάσταση αυτή ονομάζεται **απορροφητική**.

Κατηγοριοποίηση Αλυσίδων Markov III

Ορίζουμε $f_{ij}^{(n)}$ την πιθανότητα, ξεκινώντας από την i, το βήμα **πρώτης διάβασης** της κατάστασης j να είναι ίσο με n. Αυστηρότερα:

$$f_{ij}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \Pr\{X(0) = i, X(1) \neq j, \ldots, X(n-1) \neq j, X(n) = j\}$$

Τότε η πιθανότητα επίσκεψης της κατάστασης j, ξεκινώντας από την i, θα είναι:

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad (17)$$

Ορισμός Επαναληπτική και Μεταβατική κατάσταση

Αν $f_{ii} = 1$, η κατάσταση i ονομάζεται **επαναληπτική**. Αν $f_{ii} < 1$ η κατάσταση ονομάζεται **μεταβατική**.

Κατηγοριοποίηση Αλυσίδων Markov IV

Μέσος Χρόνος Πρώτης Διέλευσης της i ξεκινώντας από την j: Συμβολίζεται με μ_{ij} και ισχύει:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}, & \text{αν } f_{ij} = 1, \\ \infty, & \text{αν } f_{ij} < 1, \end{cases} \tag{18}$$

Όταν $f_{ij} = 1$, για ένα ζευγάρι καταστάσεων i και j, ο μέσος χρόνος πρώτης διάβασης μ_{ij} ικανοποιεί την αναδρομική εξίσωση

$$\mu_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(\mu_{kj} + 1), \tag{19}$$

Όταν $j = i$, ο μέσος χρόνος πρώτης διάβασης ονομάζεται **Μέσος Χρόνος Επιστροφής στην Κατάσταση** i.

Κατηγοριοποίηση Αλυσίδων Markov V

Ορισμός **Μηδενικά και Βέβαια επαναληπτικές καταστάσεις**

Μια επαναληπτική κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται μια **μηδενικά επαναληπτική** αν $\mu_{ii} = \infty$. Αν $\mu_{ii} < \infty$, ονομάζεται μια **βέβαια επαναληπτική**

Παρατήρηση: Σε μια πεπερασμένη αλυσίδα Markov υπάρχουν μόνο βέβαια επαναληπτικές και μεταβατικές καταστάσεις.

Ορισμός **Περιοδική και Απεριοδική κατάσταση**

Μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται **περιοδική** με περίοδο d_i αν $d_i > 1$ και **απεριοδική** αν $d_i = 1$, όπου

$$d_i = \gcd\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\}. \tag{20}$$

Κατηγοριοποίηση Αλυσίδων Markov VI

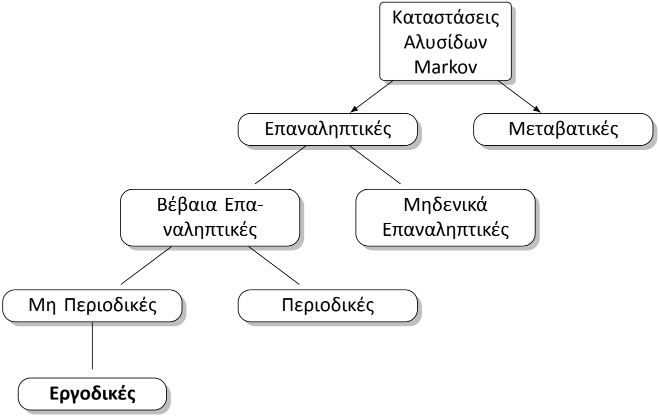
Ορισμός **Εργοδικές κατάστασεις**

Μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται **εργοδική** αν είναι βέβαια επαναληπτική και απεριοδική, δηλαδή, $f_{ii} = 1, \mu_{ii} < \infty$, και $d_i = 1$.
Αν όλες οι καταστάσεις μίας αλυσίδας είναι εργοδικές, η αλυσίδα λέγετε, εργοδική.

Theorem (**Ιδιότητα μιας αμείωτης αλυσίδας Markov**)

Σε μια αμείωτη αλυσίδα Markov όλες οι καταστάσεις ανήκουν στην ίδια κλάση: είναι όλες μεταβατικές, όλες μηδενικά επαναληπτικές, ή όλες βέβαια επαναληπτικές. Επιπλέον, είναι είτε όλες απεριοδικές είτε όλες περιοδικές με ίδια περίοδο.

Κατηγοριοποίηση Αλυσίδων Markov VII



Κατανομές αλυσίδων Markov I

Ορισμός **Στάσιμη κατανομή**

Μία κατανομή $\boldsymbol{\pi}$, καλείται στάσιμη κατανομή αν και μόνο αν,

$$\boldsymbol{\pi}^\top = \boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{P}, \quad \sum \pi_i = 1. \tag{21}$$

Θεώρημα **Στάσιμη κατανομή αμείωτης απεριοδικής αλυσίδας Markov**

Κατανομές αλυσίδων Markov II

Για μια αμείωτη απεριοδική αλυσίδα Markov η **οριακή κατανομή υπάρχει πάντα** και είναι ανεξάρτητη της αρχικής. Επίσης, ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. Οι καταστάσεις της είναι όλες μεταβατικές ή όλες μηδενικά επαναληπτικές. Στην περίπτωση αυτή, **δεν υπάρχει καμία στάσιμη κατανομή** και

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i, j \tag{22}$$

2. Όλες οι καταστάσεις είναι εργοδικές. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει **μια μοναδική στάσιμη κατανομή** και

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \text{ για όλα τα } i, j \in S \tag{23}$$

Επιπλέον, το π_i είναι ίσο με τον αντίστροφο του μέσου χρόνου επιστροφής στην κατάσταση i. Δηλαδή, $\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}$

Υπολογισμός Στάσιμης Κατανομής Εργοδικών Αλυσίδων I

Η στάσιμη κατανομή μπορεί να υπολογιστεί:

- Υπολογίζοντας το μητρώο $\mathbf{P}^n$ (Γενικά Ασύμφορο...)
- Λύνοντας το σύστημα $\boldsymbol{\pi}^\top = \boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{P} \quad \sum \pi_i = 1$
- Λύνοντας τις ``**εξισώσεις ισορροπίας**'' $\sum_{j \neq i} \pi_i p_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j p_{ji}$

Example (Δυαδικό Κανάλι Επικοινωνίας)

$$\mathbf{P}_{Bcc} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τη στάσιμη κατανομή λύνουμε το σύστημα:

Υπολογισμός Στάσιμης Κατανομής Εργοδικών Αλυσίδων ΙΙ

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1(1-\alpha) + \beta\pi_2 \\ \pi_2 &= \pi_1\alpha + \pi_2(1-\beta) \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned} \tag{24}$$

το οποίο δίνει $\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ και $\pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν α=β=1 η αλυσίδα γίνεται περιοδική. Η Οριακή κατανομή δεν υπάρχει, αλλά η στάσιμη κατανομή υπάρχει και ταυτίζεται με την time-average κατανομή.

Example (Ουρά διακριτού χρόνου άπειρου μήκους)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-r & r & & \\ s & 1-r-s & r & \\ & s & 1-r-s & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Υπολογισμός Στάσιμης Κατανομής Εργοδικών Αλυσίδων III

Ερώτηση Υπάρχει η οριακή κατανομή αν

1. $r<s$?
2. $r=s$?
3. $r>s$?

Ερώτηση Ποιος είναι ο μέσος αριθμών εργασιών στο server?

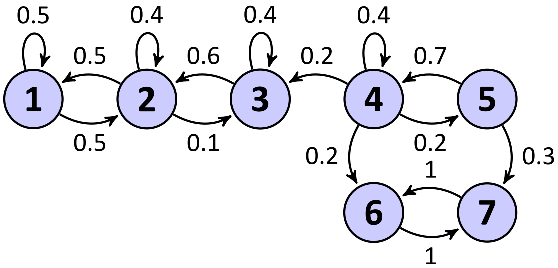
Άσκηση 1

Ένα Λειτουργικό Σύστημα ΛΣ ελέγχει μία CPU μοιράζοντας τον υπολογιστικό χρόνο της μεταξύ εργασιών χρηστών και εσωτερικών διεργασιών του ΛΣ. Ο υπολογιστικός χρόνος της CPU διαιρείται σε μικρά τμήματα σταθερού μήκους, τα slots.
Στο τέλος κάθε slot, η CPU θα συνεχίσει να εξυπηρετεί το ίδιο είδος εργασίας (χρηστών ή ΛΣ) για ένα ακόμα slot, με σταθερή πιθανότητα p_{X} αν εξυπηρετεί χρήστη, και σταθερή πιθανότητα p_{Λ} αν εξυπηρετεί εσωτερική διεργασία του ΛΣ.

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων – πιθανοτήτων μεταβάσεων της αλυσίδας Markov διακριτού χρόνου που μοντελοποιεί τη λειτουργία του παραπάνω συστήματος. Σε τι αντιστοιχούν οι καταστάσεις της αλυσίδας;
2. Παρουσιάστε τη λύση του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση.
3. Μας δίνεται η απαίτηση ο μέσος χρόνος που η CPU εξυπηρετεί εργασίες χρηστών, να είναι το 90% του συνολικού υπολογιστικού χρόνου της, ενώ γνωρίζουμε ότι το p_{Λ} είναι ίσο με 0.2 . Ποια τιμή του p_{X} ικανοποιεί την απαίτηση αυτή;

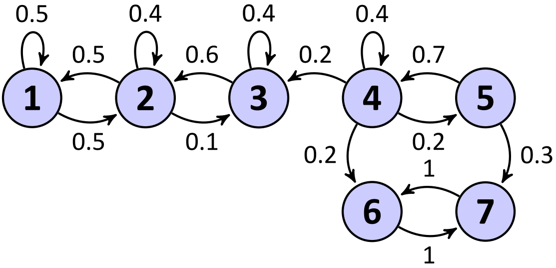
Άσκηση 2

Θεωρείστε την παρακάτω αλυσίδα.



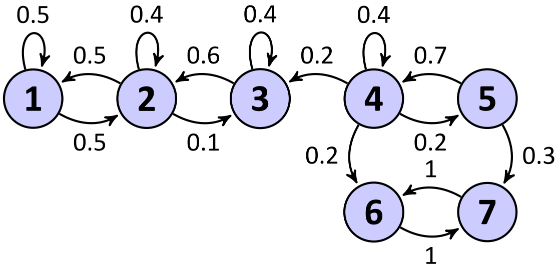
1. Να χαρακτηριστούν οι καταστάσεις της αλυσίδας.
2. Υπάρχουν πιθανότητες μόνιμης κατάστασης δεδομένου πως η αλυσίδα ξεκινάει από την κατάσταση 1. Αν ναι, ποιες είναι?
3. Υπάρχουν πιθανότητες μόνιμης κατάστασης δεδομένου πως η αλυσίδα ξεκινάει από την κατάσταση 6. Αν ναι, ποιες είναι?

Άσκηση 2 (ΙΙ)



4. Θεωρείστε ότι η αλυσίδα ξεκινάει στην κατάσταση 1, αλλά εμείς αρχίζουμε να την παρατηρούμε εφόσον αυτή έχει φθάσει σε ισορροπία.
   α. Να βρεθεί η υπό συνθήκη πιθανότητα η διαδικασία να ήταν στην κατάσταση 2 όταν αρχίσαμε να την παρατηρούμε, δεδομένου πως η κατάσταση αυξήθηκε κατά ένα κατά την πρώτη μετάβαση που παρατηρήσαμε.
   β. Να βρεθεί η πιθανότητα η κατάσταση να αυξήθηκε κατά ένα κατά τη διάρκεια της πρώτης αλλαγής κατάστασης που παρατηρήσαμε.

Άσκηση 2 (III)



5. Θεωρείστε ότι η αλυσίδα ξεκινάει στην κατάσταση 4.
   α. Για κάθε επαναληπτική κλάση, καθορίστε την πιθανότητα να φτάσουμε τελικά στη συγκεκριμένη κλάση.
   β. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι και την μετάβαση με την οποία φθάνουμε μία επαναληπτική κλάση για πρώτη φορά?

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γιάννης Γαροφαλάκης . «Ανάλυση Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων. Διαδικασίες Markov Διακριτού Χρόνου ». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: `https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1094/`.

Σημείωμα Αδειοδότησης