



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΛΕΞΗ 5: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ BERNOULLI

Καθ. Γιάννης Γαροφαλάκης

ΜΔΕ Επιστήμης και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

## Διαδικασία Bernoulli

Μία διαδικασία Bernoulli είναι μία πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, X_3, \dots$ , τέτοια ώστε

- ▶ Για κάθε  $i$  η  $X_i$  παίρνει την τιμή 0 ή 1.
- ▶ Για κάθε  $i$  η πιθανότητα το  $X_i$  να είναι 1 είναι πάντα ίση με  $p$ .

Κατά συνέπεια, η διαδικασία Bernoulli είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ομοιόμορφα κατανεμημένων **δοκιμών Bernoulli**.

### Example

- ▶ Μία σειρά ρίψεων ενός νομίσματος
- ▶ Αφίξεις πακέτων σε έναν router

### Βασικές Ιδιότητες Διαδικασιών Bernoulli

- ▶ **Ανεξαρτησία**
- ▶ **Έλλειψη μνήμης**



# Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε κάποιες χρήσιμες σχετιζόμενες τυχαίες μεταβλητές.

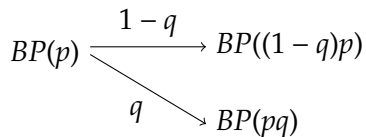
- ▶ **Η τ.μ.  $N$ , που μετρά το πλήθος των αφίξεων που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια  $n$  slot.**
  - ▶  $\Pr\{k \text{ αφίξεις κατά τη διάρκεια } n \text{ slots}\} = p_N(k) = ?$
  - ▶  $E[N] =$
  - ▶  $\text{Var}(N) =$
- ▶ **Η τ.μ.  $T$ , που μετρά το χρόνο μεταξύ διαδοχικών αφίξεων.**
  - ▶  $\Pr\{t \text{ slots μέχρι την επόμενη άφιξη}\} = p_T(t) = ?$
  - ▶  $E[T] =$
  - ▶  $\text{Var}(T) =$
- ▶ **Η τ.μ.  $Y_k$ , που μετρά το χρόνο μέχρι την  $k$ -οστή άφιξη.**
  - ▶  $\Pr\{\text{Η } k\text{-οστή άφιξη γίνεται στο } t \text{ slot}\} = p_{Y_k}(t) = ?$
  - ▶  $E[Y_k] =$
  - ▶  $\text{Var}(Y_k) =$



# Διαχωρισμός και Συγχώνευση Διαδικασιών Bernoulli

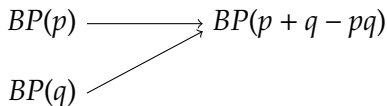
## Διαχωρισμός

Οι διαδικασίες που προκύπτουν από το διαχωρισμό μίας διαδικασίας Bernoulli είναι επίσης Bernoulli.



## Συνένωση

Η διαδικασία που προκύπτει από τη συνένωση δύο διαδικασιών Bernoulli είναι επίσης Bernoulli.



## Παράδειγμα I

Ένα υπολογιστικό σύστημα εκτελεί εργασίες δύο χρηστών. Ο χρόνος χωρίζεται σε slots, κατά τη διάρκεια καθενός από τα οποία το σύστημα είναι *idle* με πιθανότητα  $p_I = 1/6$ , και *busy* με πιθανότητα  $p_B = 5/6$ . Κατά τη διάρκεια ενός busy slot, το σύστημα εκτελεί μία εργασία η οποία με πιθανότητα  $2/5$  προέρχεται από τον πρώτο χρήστη ενώ με πιθανότητα  $3/5$  από το δεύτερο. Θεωρούμε πως τα γεγονότα που αφορούν διαφορετικά slot είναι ανεξάρτητα.

1. Να βρεθεί η πιθανότητα η πρώτη εργασία του χρήστη 1 να εκτελεστεί στον 4ο slot.
2. Δεδομένου πως ακριβώς 5 από τα πρώτα 10 slot είναι idle, να βρεθεί η πιθανότητα το 6ο idle slot να είναι το slot 12.
3. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός slot μέχρι και την 5η εργασία του χρήστη 1, καθώς και ο αναμενόμενος αριθμός από *busy slots* μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.



## Παράδειγμα II

4. (\*) Να βρεθεί η κατανομή, η μέση τιμή και η διακύμανση του αριθμού των εργασιών του χρήστη 2 μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.



# Χρηματοδότηση

- ▶ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ▶ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ▶ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.00**





# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γιάννης Γαροφαλάκης, Αθανάσιος Ν. Νικολακόπουλος . «Ανάλυση Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων. Διαδικασία Bernoulli». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.  
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1094/>.




# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- ▶ που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- ▶ που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- ▶ που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

 Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.