

Ασκήσεις 1_2021 (Λύσεις)

Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Γιάννης Γαροφαλάκης

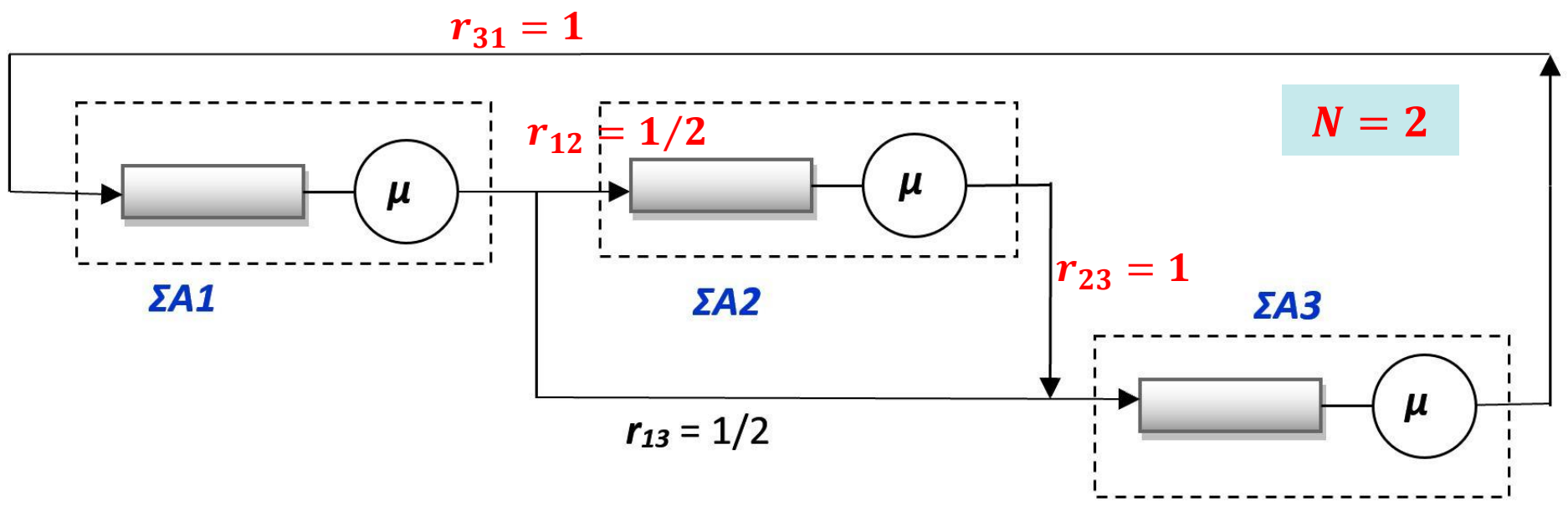
Καθηγητής

Άσκηση 1: Κλειστά δίκτυα συστημάτων αναμονής

Δίνεται το παρακάτω κλειστό δίκτυο τριών Συστημάτων Αναμονής $\Sigma A1$, $\Sigma A2$, $\Sigma A3$, στο οποίο υπάρχουν $N = 2$ εργασίες. Οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικές, ενώ όλες οι ουρές έχουν πρακτικά άπειρο μήκος.

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Buzen, απαντήστε στα παρακάτω:

- (a) Παρουσιάστε τη λύση του δικτύου P_{n_1, n_2, n_3} στη μόνιμη κατάσταση.
- (b) Ποιο από τα τρία ΣA είναι σημείο συμφόρησης (bottleneck) του δικτύου και γιατί;
- (c) Ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκονται όλες οι εργασίες στο $\Sigma A1$ και ποια η πιθανότητα να είναι όλες στο $\Sigma A2$;
- (d) Ποια είναι η πιθανότητα το $\Sigma A3$ να έχει 1 εργασία;
- (e) Απαντήστε στα ερωτήματα (a), (b), (c), (d) αν υπάρχει μόνο μια εργασία στο δίκτυο ($N = 1$ εργασία). Πως αξιοποιείτε τη διαδικασία επίλυσης που χρησιμοποιήσατε για $N = 2$;
- (f) Για την τιμή $\mu = 1$ εργασία/sec και για $N = 2$ εργασίες, λύστε το δίκτυο χρησιμοποιώντας **Mean Value Analysis**.
- (g) Απαντήστε στο ερώτημα (e) χρησιμοποιώντας μια **αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου**, και όχι τον αλγόριθμο του Buzen. Επιβεβαιώστε ότι συμφωνούν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (e) και (g).



Απαντήσεις (1)

a) Η λύση δίνεται από τον γενικό τύπο:

$$p_{\bar{n}} = p_{n_1, n_2, \dots, n_M} = \frac{1}{G(N)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \dots \rho_M^{n_M}$$

Δηλαδή
$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{G(2)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3}$$

όπου $n_1 + n_2 + n_3 = N = 2$ και ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι οι σχετικές χρησιμοποιήσεις των ΣΑ1, ΣΑ2, ΣΑ3 αντίστοιχα.

ΒΗΜΑ 1:

Υπολογισμός των ρ_1, ρ_2, ρ_3 από τις Εξισώσεις:
$$\mu_i \rho_i = \sum_{j=1}^M \mu_j r_{ji} \rho_j$$

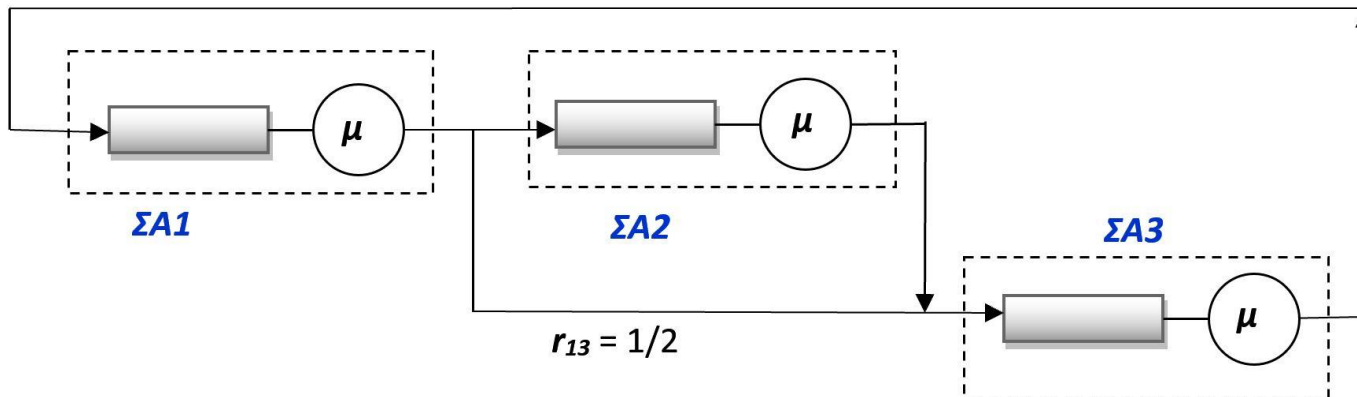
Θα θέσουμε κάποιο $\rho_i = 1$ για να βρούμε τα υπόλοιπα σε σχέση με αυτό.

Απαντήσεις (2)

Δηλαδή, θα έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} \mu\rho_1 &= \mu\rho_3 \\ \mu\rho_2 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 \\ \mu\rho_3 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 + \mu\rho_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \rho_1 &= \rho_3 \\ \rho_2 &= \frac{1}{2}\rho_1 \\ \rho_3 &= \frac{1}{2}\rho_1 + \rho_2 \end{aligned} \right\}$$

Θέτοντας $\rho_1 = 1 = \rho_3$ παίρνουμε $\rho_2 = 1/2$.



Απαντήσεις (3)

ΒΗΜΑ 2: Υπολογισμός του $G(2)$

Σταθμοί Πελάτες	$\rho_1 = 1$	$\rho_2 = 1/2$	$\rho_3 = 1$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 1$	$g_2(1) = 1,5$	$G(1) = g_3(1) = 2,5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 1$	$g_2(2) = 1,75$	$G(2) = g_3(2) = 4,25$

$$g_m(n) = g_{m-1}(n) + \rho_m \cdot g_m(n-1)$$

Η λύση του δικτύου:

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{G(2)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3} \Rightarrow$$

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} \quad (1)$$

Απαντήσεις (4)

- b) Ήδη με δεδομένες τις σχετικές χρησιμοποιήσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα ΣΑ1 και ΣΑ3 είναι bottlenecks, αφού:

$$\rho_1 = 1 = \rho_3 > \rho_2 = 1/2$$

Οι απόλυτες τιμές της χρησιμοποίησης στα τρία συστήματα δίνονται από τη σχέση: $U_i = P(n_i \geq 1) = \rho_i \frac{G(N-1)}{G(N)}$

Δηλαδή:

$$U_1 = U_3 = 1 \cdot \frac{G(1)}{G(2)} = \frac{2,5}{4,25} = \mathbf{0,588} \quad \text{και} \quad U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,5}{4,25} = \mathbf{0,294}$$

που επιβεβαιώνουν ότι τα **ΣΑ1 και ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

- c) Εφαρμόζοντας τη σχέση (1): $P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}$

$$P_{2,0,0} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \mathbf{0,235} \quad \text{και} \quad P_{0,2,0} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{0,0588}$$

Απαντήσεις (5)

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} \quad (1)$$

d) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$P_{1,0,1} + P_{0,1,1} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0,353$$

e) Έχοντας υλοποιήσει τον αλγόριθμο του Buzen, πήραμε όλα τα $G(N)$ για $N \leq 2$, συνεπώς και για $N = 1$:

Σταθμοί \ Πελάτες	$\rho_1 = 1$	$\rho_2 = 1/2$	$\rho_3 = 1$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 1$	$g_2(1) = 1,5$	$G(1) = g_3(1) = 2,5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 1$	$g_2(2) = 1,75$	$G(2) = g_3(2) = 4,25$

Συνεπώς: $G(1) = 2,5$

ενώ τα ρ_i μένουν τα ίδια: $\rho_1 = 1 = \rho_3$ και $\rho_2 = 1/2$

Απαντήσεις (6)

e) (a) Η λύση: $P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{2,5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}$ με $n_1 + n_2 + n_3 = 1$

(b) Τα ρ_i είναι ίδια, οπότε και το συμπέρασμα είναι ίδιο:

Τα **ΣΑ1** και **ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

Οι απόλυτες χρησιμοποιήσεις:

$$U_1 = U_3 = 1 \cdot \frac{G(0)}{G(1)} = \frac{1}{2,5} = \mathbf{0,4} \quad \text{και} \quad U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2,5} = \mathbf{0,2}$$

Φυσικά είναι μικρότερες από την περίπτωση με $N = 2$ όπου είχαμε $U_1 = U_3 = 0,588$ και $U_2 = 0,294$ (γιατί;)

(c) $P_{1,0,0} = \frac{1}{2,5} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \mathbf{0,4}$ και $P_{0,1,0} = \frac{1}{2,5} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \mathbf{0,2}$

(d) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η: $P_{0,0,1} = \frac{1}{2,5} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \mathbf{0,4}$

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}$$

Αν θέλαμε επιπλέον:

- Μέσο αριθμό εργασιών σε ένα σταθμό (για $N = 2$):

$$E[n_1] = 1 \cdot (P_{1,1,0} + P_{1,0,1}) + 2 \cdot P_{2,0,0} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 \cdot \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{3,5}{4,25} \Rightarrow E[n_1] = 0,8235 \text{ εργασίες}$$

- Throughput ενός σταθμού (για $N = 2$):

$\lambda_1 = \mu_1 \cdot U_1 = \mu \cdot 0,588$.Πλέον μας χρειάζεται η τιμή του μ .

Π.χ. για $\mu = 1$ εργ/sec: $\lambda_1 = 1 \cdot 0,588 \Rightarrow \lambda_1 = 0,588$ εργ/sec

- Response Time σε έναν σταθμό (για $N = 2$):

$$\text{N. Little: } E[n_1] = \lambda_1 \cdot T_1 \Rightarrow T_1 = E[n_1]/\lambda_1 = 0,8235/0,588 \Rightarrow T_1 = 1,4 \text{ sec}$$

- Response Time συνολικό (για $N = 2$):

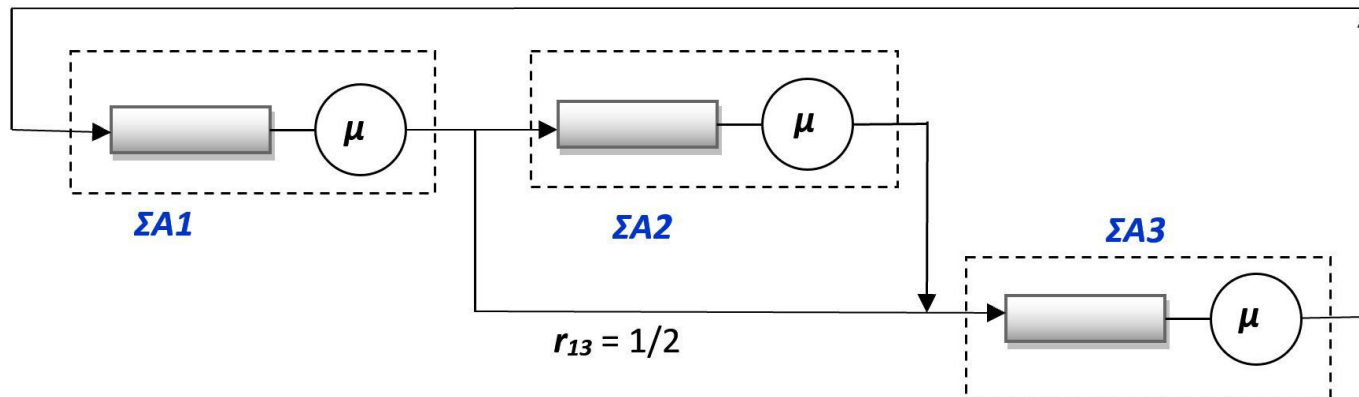
$$\text{N. Little στο δίκτυο: } N = \lambda_1 \cdot T \Rightarrow T = 2/0,588 \Rightarrow T = 3,4 \text{ sec}$$

$$\text{Εναλλακτικά: } T = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 + T_3) + \frac{1}{2}T_3 = \dots = 3,4 \text{ sec}$$

Εναλλακτικά: Διαφορετική επιλογή $\rho_i = 1$

$$\left. \begin{aligned} \mu\rho_1 &= \mu\rho_3 \\ \mu\rho_2 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 \\ \mu\rho_3 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 + \mu\rho_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \rho_1 &= \rho_3 \\ \rho_2 &= \frac{1}{2}\rho_1 \\ \rho_3 &= \frac{1}{2}\rho_1 + \rho_2 \end{aligned} \right\}$$

Θέτοντας $\rho_2 = 1$ παίρνουμε $\rho_1 = \rho_3 = 2$.



Εναλλακτικά (2)

ΒΗΜΑ 2: Υπολογισμός του $G(2)$

Σταθμοί Πελάτες	$\rho_1 = 2$	$\rho_2 = 1$	$\rho_3 = 2$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 2$	$g_2(1) = 3$	$G(1) = g_3(1) = 5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 4$	$g_2(2) = 7$	$G(2) = g_3(2) = 17$

$$g_m(n) = g_{m-1}(n) + \rho_m \cdot g_m(n-1)$$

Η λύση του δικτύου:

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{G(2)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3}$$

\Rightarrow

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{17} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3} \quad (1)$$

Εναλλακτικά (3)

- b) Ήδη με δεδομένες τις σχετικές χρησιμοποιήσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα **ΣΑ1 και ΣΑ3** είναι **bottlenecks**, αφού

$$\rho_1 = 2 = \rho_3 > \rho_2 = 1$$

Οι απόλυτες τιμές της χρησιμοποίησης στα τρία συστήματα δίνονται από τη σχέση: $U_i = P(n_i \geq 1) = \rho_i \frac{G(N-1)}{G(N)}$

Δηλαδή:

$$U_1 = U_3 = 2 \cdot \frac{G(1)}{G(2)} = 2 \cdot \frac{5}{17} = \mathbf{0,588} \quad \text{και} \quad U_2 = 1 \cdot \frac{5}{17} = \mathbf{0,294}$$

ίδια αποτελέσματα φυσικά...

- c) Εφαρμόζοντας τη σχέση (1): $P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{17} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3}$

$$P_{2,0,0} = \frac{1}{17} \cdot 2^2 \cdot 2^0 = \mathbf{0,235}$$

$$P_{0,2,0} = \frac{1}{17} \cdot 2^0 \cdot 2^0 = \mathbf{0,0588}$$

ίδια....

Εναλλακτικά (4)

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{17} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3} \quad (1)$$

d) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$P_{1,0,1} + P_{0,1,1} = \frac{1}{17} \cdot 2^1 \cdot 2^1 + \frac{1}{17} \cdot 2^0 \cdot 2^1 = 0,353 \text{ ίδια...}$$

e) Έχοντας υλοποιήσει τον αλγόριθμο του Buzen, πήραμε όλα τα $G(N)$ για $N \leq 2$, συνεπώς και για $N = 1$:

Σταθμοί Πελάτες	$\rho_1 = 2$	$\rho_2 = 1$	$\rho_3 = 2$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 2$	$g_2(1) = 3$	$G(1) = g_3(1) = 5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 4$	$g_2(2) = 7$	$G(2) = g_3(2) = 17$

Συνεπώς: $G(1) = 5$

ενώ τα ρ_i μένουν τα ίδια: $\rho_1 = 2 = \rho_3$ και $\rho_2 = 1$

Εναλλακτικά (5)

e) (a) Η λύση: $P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{5} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3}$ με $n_1 + n_2 + n_3 = 1$

(b) Τα ρ_i είναι ίδια, οπότε και το συμπέρασμα είναι ίδιο:

Τα **ΣΑ1** και **ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

Οι απόλυτες χρησιμοποιήσεις:

$$U_1 = U_3 = 2 \cdot \frac{G(0)}{G(1)} = 2 \cdot \frac{1}{5} = \mathbf{0,4} \quad \text{και} \quad U_2 = 1 \cdot \frac{1}{5} = \mathbf{0,2}$$

ίδιες.

(c) $P_{1,0,0} = \frac{1}{5} \cdot 2^1 \cdot 2^0 = \mathbf{0,4}$ και $P_{0,1,0} = \frac{1}{5} \cdot 2^0 \cdot 2^0 = \mathbf{0,2}$

(d) Η ζητούμενη πιθανότητα: $P_{0,0,1} = \frac{1}{5} \cdot 2^0 \cdot 2^1 = \mathbf{0,4}$

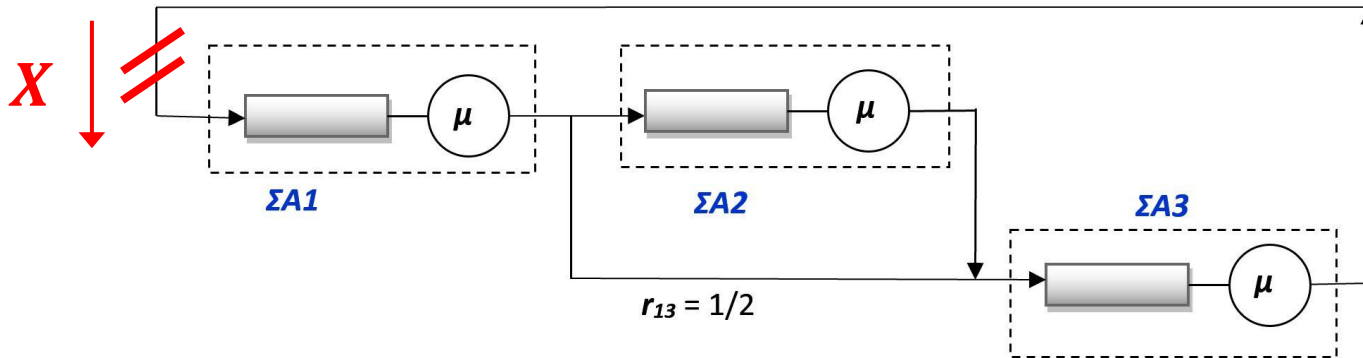
ίδια...

Απαντήσεις (7)

- f) Τα δεδομένα εισόδου που χρειάζεται ο Mean Value Analysis (MVA) αλγόριθμος, είναι:
- $N = 2$: συνολικός αριθμός χρηστών (εργασιών).
 - $Z = 0$: think time.
 - $M = 3$: αριθμός συσκευών (χωρίς τερματικά).
 - $S_i = 1 \text{ sec}$: service time ανά επίσκεψη στο i -στό device.
 - V_i : αριθμός επισκέψεων στο i -στό device.

Μας λείπουν τα V_i τα οποία θα υπολογίσουμε από τις πιθανότητες δρομολόγησης r_{ij} :

Απαντήσεις (8)



$$\begin{aligned}
 V_0 &= V_0 \cdot r_{00} + V_1 \cdot r_{10} + V_2 \cdot r_{20} + V_3 \cdot r_{30} \\
 V_1 &= V_0 \cdot r_{01} + V_1 \cdot r_{11} + V_2 \cdot r_{21} + V_3 \cdot r_{31} \\
 V_2 &= V_0 \cdot r_{02} + V_1 \cdot r_{12} + V_2 \cdot r_{22} + V_3 \cdot r_{32} \\
 V_3 &= V_0 \cdot r_{03} + V_1 \cdot r_{13} + V_2 \cdot r_{23} + V_3 \cdot r_{33} \\
 V_0 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \cdot \mathbf{0} + V_1 \cdot 0 + V_2 \cdot 0 + V_3 \cdot \mathbf{1} \\
 V_1 &= 1 \cdot \mathbf{1} + V_1 \cdot 0 + V_2 \cdot 0 + V_3 \cdot 0 \\
 V_2 &= 1 \cdot 0 + V_1 \cdot \mathbf{1/2} + V_2 \cdot 0 + V_3 \cdot 0 \\
 V_3 &= 1 \cdot 0 + V_1 \cdot \mathbf{1/2} + V_2 \cdot \mathbf{1} + V_3 \cdot 0 \\
 V_0 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \left. \begin{aligned} 1 &= V_3 \\ V_1 &= 1 \\ V_2 &= V_1 \cdot 1/2 \\ V_3 &= V_1 \cdot 1/2 + V_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= \mathbf{1} \\ V_2 &= \mathbf{1/2} \\ V_3 &= \mathbf{1} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

...αναμενόμενα

Απαντήσεις (9)

MVA Αλγόριθμος:

■ Αρχικοποίηση: $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$

■ 1^η Επανάληψη ($n = 1$):

$$\square R_1 = S_1 \cdot (1 + Q_1) = 1 \cdot (1 + 0) = 1, \quad R_2 = 1, \quad R_3 = 1$$

$$\square R = R_1 \cdot V_1 + R_2 \cdot V_2 + R_3 \cdot V_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 = 2,5$$

$$\square X = n / (Z + R) = 1 / (0 + 2,5) = 0,4$$

$$\square Q_1 = X \cdot V_1 \cdot R_1 = 0,4 \cdot 1 \cdot 1 = 0,4 \quad Q_2 = 0,2 \quad Q_3 = 0,4$$

■ 2^η Επανάληψη ($n = 2$):

$$\square R_1 = S_1 \cdot (1 + Q_1) = 1 \cdot (1 + 0,4) = 1,4 \quad R_2 = 1,2 \quad R_3 = 1,4$$

$$\square R = R_1 \cdot V_1 + R_2 \cdot V_2 + R_3 \cdot V_3 = 1,4 \cdot 1 + 1,2 \cdot \frac{1}{2} + 1,4 \cdot 1 = 3,4$$

$$\square X = n / (Z + R) = 2 / (0 + 3,4) = 0,588$$

$$\square Q_1 = X \cdot V_1 \cdot R_1 = 0,588 \cdot 1 \cdot 1,4 = 0,823 \quad Q_2 = 0,353 \quad Q_3 = 0,823$$

Απαντήσεις (10)

MVA Αλγόριθμος (συνέχεια):

■ Τελικοί υπολογισμοί:

$$\square \quad X_1 = X \cdot V_1 = 0,588 \cdot 1 = \mathbf{0,588} \quad X_2 = \mathbf{0,294} \quad X_3 = \mathbf{0,588}$$

$$\square \quad U_1 = X \cdot S_1 \cdot V_1 = 0,588 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{0,588} \quad U_2 = \mathbf{0,294} \quad U_3 = \mathbf{0,588}$$

ίδια αποτελέσματα...

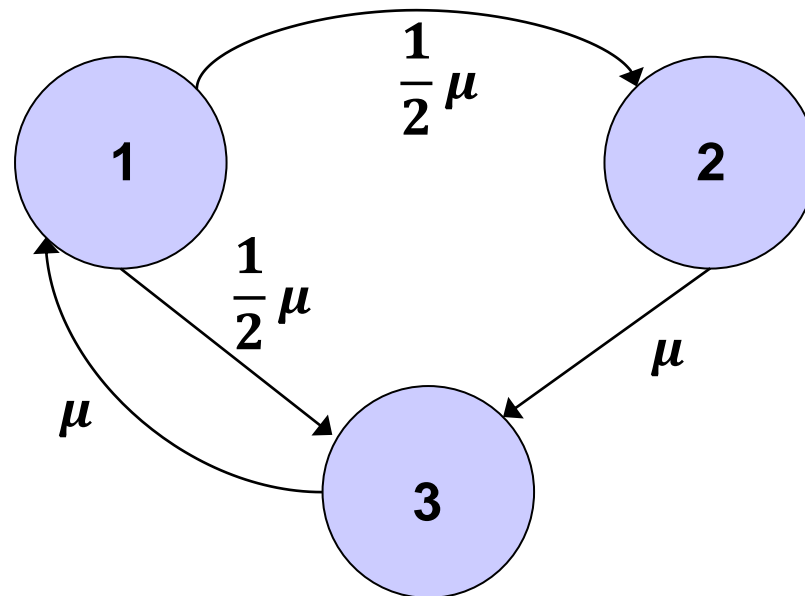
Απαντήσεις (11)

g) Θα έχουμε 3 καταστάσεις:

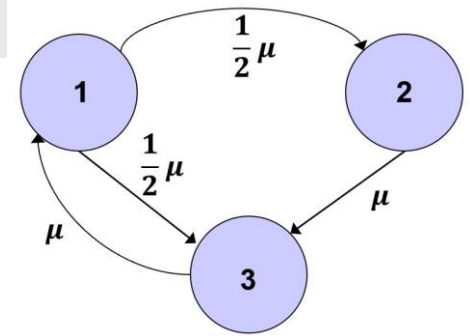
- **1** που αντιστοιχεί στην κατάσταση δικτύου $(n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 0)$
- **2** που αντιστοιχεί στην κατάσταση δικτύου $(n_1, n_2, n_3) = (0, 1, 0)$
- **3** που αντιστοιχεί στην κατάσταση δικτύου $(n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1)$

Δηλαδή η κατάσταση i αντιστοιχεί στην παρουσία του (μοναδικού) πελάτη στο ΣA_i για $i = 1, 2, 3$.

- Το διάγραμμα καταστάσεων – ρυθμών μεταβάσεων της αλυσίδας Markov συνεχούς χρόνου, είναι το εξής:



Απαντήσεις (12)



- Είναι μια *εργοδική* αλυσίδα.
- Υπάρχουν οι *πιθανότητες μόνιμης κατάστασης*.
- Εφαρμόζοντας το *Νόμο ισορροπίας της ροής πιθανότητας*:

$$\text{Κατάσταση 1: } p_1 \cdot \mu = p_3 \cdot \mu \quad (2)$$

$$\text{Κατάσταση 2: } p_2 \cdot \mu = p_1 \cdot \frac{1}{2} \mu \quad (3)$$

$$\text{Κατάσταση 3: } p_3 \cdot \mu = p_1 \cdot \frac{1}{2} \mu + p_2 \cdot \mu \quad (4)$$

$$\text{και η προφανής σχέση: } p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (5)$$

- a) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2), (3), (5), παίρνουμε τη λύση:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = p_3 = 0,4 \\ p_2 = 0,2 \end{array} \right\} (6)$$

Απαντήσεις (13)

- Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης που βρήκαμε παραπάνω, έχουν την εξής αντιστοίχιση με τα προηγούμενα:

$$p_1 = P_{1,0,0} = 0,4 \quad p_2 = P_{0,1,0} = 0,2 \quad p_3 = P_{0,0,1} = 0,4$$

- b) Προφανώς: $U_1 = p_1 = 0,4$ $U_2 = p_2 = 0,2$ $U_3 = p_3 = 0,4$
και **ΣΑ1** και **ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

c) $p_1 = P_{1,0,0} = 0,4$ $p_2 = P_{0,1,0} = 0,2$

d) $p_3 = P_{0,0,1} = 0,4$

Άσκηση 2: Το σύστημα αναμονής M/G/1

Σε ένα M/G/1 σύστημα αναμονής, φθάνουν δύο τύπων εργασίες: *Τύπου 1* (T1) και *Τύπου 2* (T2). Οι εργασίες T1 φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda_1 = 0.25$ εργασίες/sec, ενώ οι T2 φθάνουν επίσης σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, αλλά με μέσο ρυθμό $\lambda_2 = 0.5$ εργασίες/sec.

Οι εργασίες T1 έχουν μέση τιμή και διασπορά του χρόνου εξυπηρέτησης 1 sec και 1 sec^2 αντίστοιχα, ενώ οι εργασίες T2 έχουν μέση τιμή και διασπορά του χρόνου εξυπηρέτησης 0.5 sec και 1 sec^2 αντίστοιχα.

Οι εργασίες και των δύο τύπων εξυπηρετούνται από την ίδια ουρά και εξυπηρετητή με FCFS τρόπο, με την ίδια προτεραιότητα.

- a) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής μια εργασίας;
- b) Βρείτε το μέσο *response time* μιας εργασίας T1 και το μέσο *response time* μιας εργασίας T2.
- c) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός εργασιών στο σύστημα;

Απαντήσεις (1)

Θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση $E[W] = \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)}$ (1)

- a) Μία εργασία *οποιοδήποτε τύπου*, θα έχει κατά μέσο όρο ίδια αναμονή στην ουρά. (γιατί;)

Για τη σχέση (1):

- $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0.25 + 0.5 = 0.75 = 3/4$ εργασίες/sec
- Για να βρούμε το ρ χρειαζόμαστε και το $E[X] = 1/\mu$:
 - Μία εργασία είναι T1 με πιθανότητα $\frac{0.25}{0.2+0.5} = 1/3$
 - Μία εργασία είναι T2 με πιθανότητα $\frac{0.5}{0.2+0.5} = 2/3$

Οπότε, ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης, ανεξαρτήτως τύπου:

$$E[X] = \frac{1}{3}E[X_1] + \frac{2}{3}E[X_2] = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0.5 \Rightarrow E[X] = 2/3 \text{ sec}$$

Απαντήσεις (2)

$$E[W] = \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} \quad (1)$$

$$\rho = \lambda/\mu = \lambda \cdot E[X] = 0.75 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \rho = 1/2$$

- Για τον υπολογισμό του $E[X^2]$ ισχύει η ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε για το $E[X]$:

$$E[X^2] = \frac{1}{3}E[X_1^2] + \frac{2}{3}E[X_2^2] \quad (2)$$

$$- E[X_1^2] = Var[X_1] + (E[X_1])^2 = 1 + 1^2 \Rightarrow E[X_1^2] = 2$$

$$- E[X_2^2] = Var[X_2] + (E[X_2])^2 = 1 + 0.5^2 \Rightarrow E[X_2^2] = 5/4$$

και:

$$(2) \Rightarrow E[X^2] = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow E[X^2] = 3/2$$

Οπότε, από τη σχέση (1), έχουμε το μέσο χρόνο αναμονής μιας εργασίας οποιουδήποτε τύπου:

$$E[W] = \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}}{2(1-1/2)} \Rightarrow E[W] = 9/8 = 1.125 \text{ sec}$$

Απαντήσεις (3)

b) Θα έχουμε:

$$E[T_1] = E[W] + E[X_1] = 1.125 + 1 \Rightarrow E[T_1] = 2.125 \text{ sec}$$

$$E[T_2] = E[W] + E[X_2] = 1.125 + 0.5 \Rightarrow E[T_2] = 1.625 \text{ sec}$$

c) Μέσος αριθμός εργασιών στην ουρά:

$$\text{N. Little: } E[N_Q] = \lambda \cdot E[W] = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8} = 0.844 \text{ εργασίες}$$

και μέσος αριθμός εργασιών στο **σύστημα**:

$$E[N] = E[N_Q] + \rho = 0.844 + 0.5 \Rightarrow E[N] = 1.344 \text{ εργασίες}$$